# Pré-ordres de simulation et automates cellulaires

## Journées SDA2 — GDR IM

Guillaume Theyssier

LAMA (CNRS, Université de Savoie)

4 octobre 2007

- **Objet syntaxique**
  - un alphabet $A$
  - un réseau régulier de cellules ($\mathbb{Z}$ dans cet exposé)
  - un voisinage $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ (partie finie de $\mathbb{Z}$)
  - une fonction locale $f : A^n \to A$ (où $n = |V|$)

# Automates cellulaires

## Définition

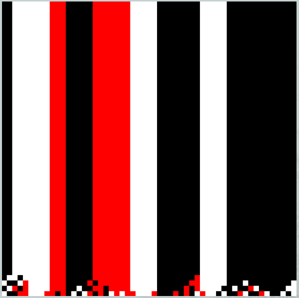
- **Objet syntaxique**
  - un alphabet $A$
  - un réseau régulier de cellules ($\mathbb{Z}$ dans cet exposé)
  - un voisinage $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ (partie finie de $\mathbb{Z}$)
  - une fonction locale $f : A^n \to A$ (où $n = |V|$)

- **Objet étudié**
  - espace des configuration : $A^{\mathbb{Z}}$
  - fonction globale $F : A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$ définie par :

$$F(x)_z = f\left(x_{z+v_1}, \ldots, x_{z+v_n}\right)$$

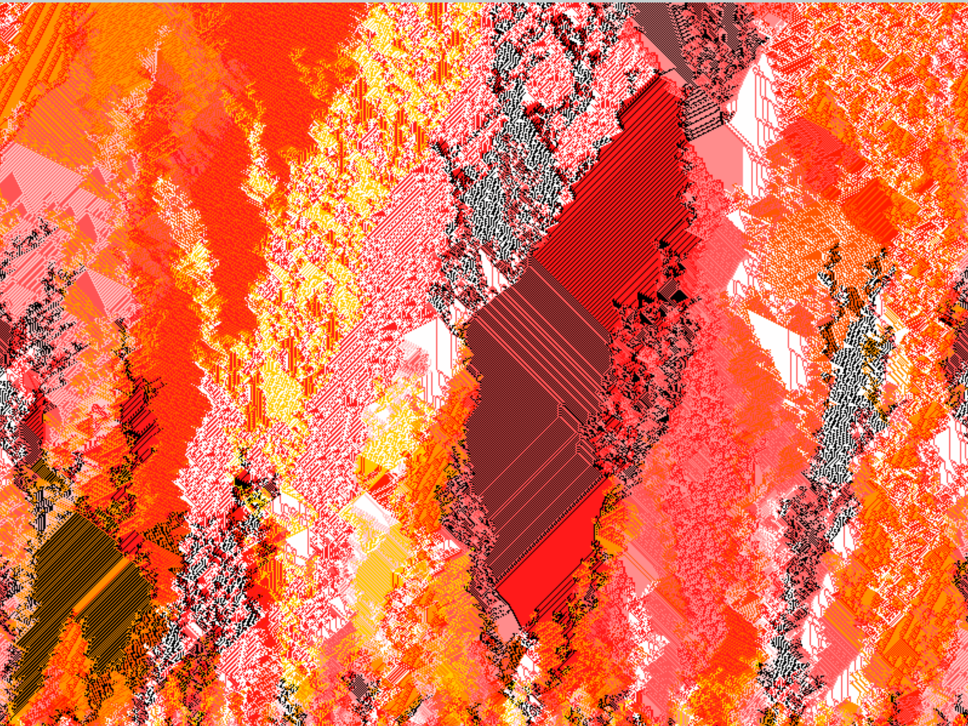
# Automates cellulaires

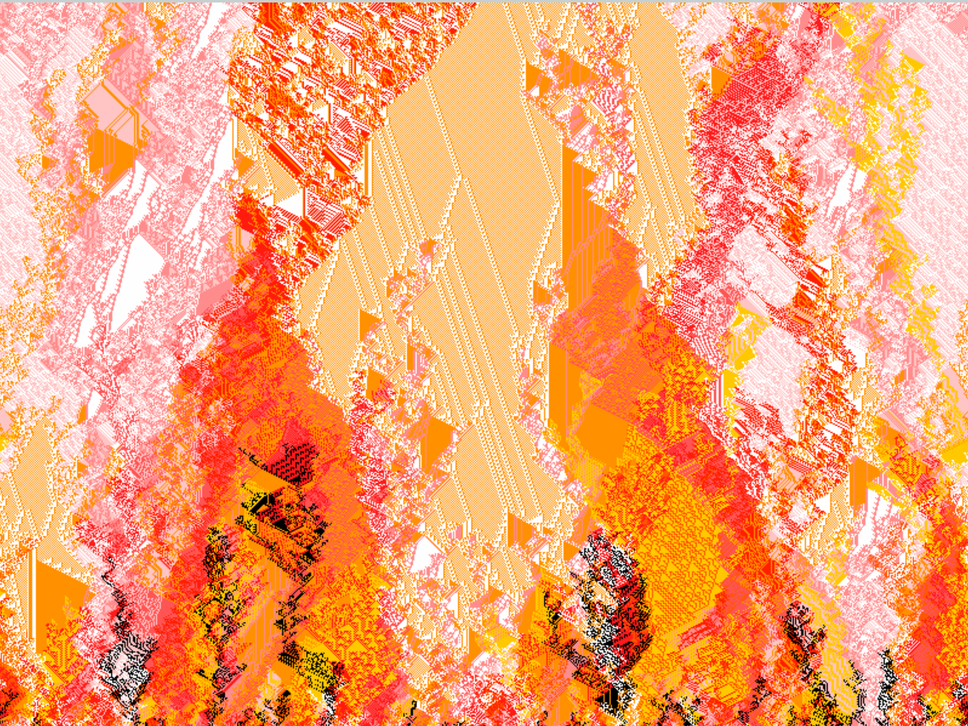
## Exemples

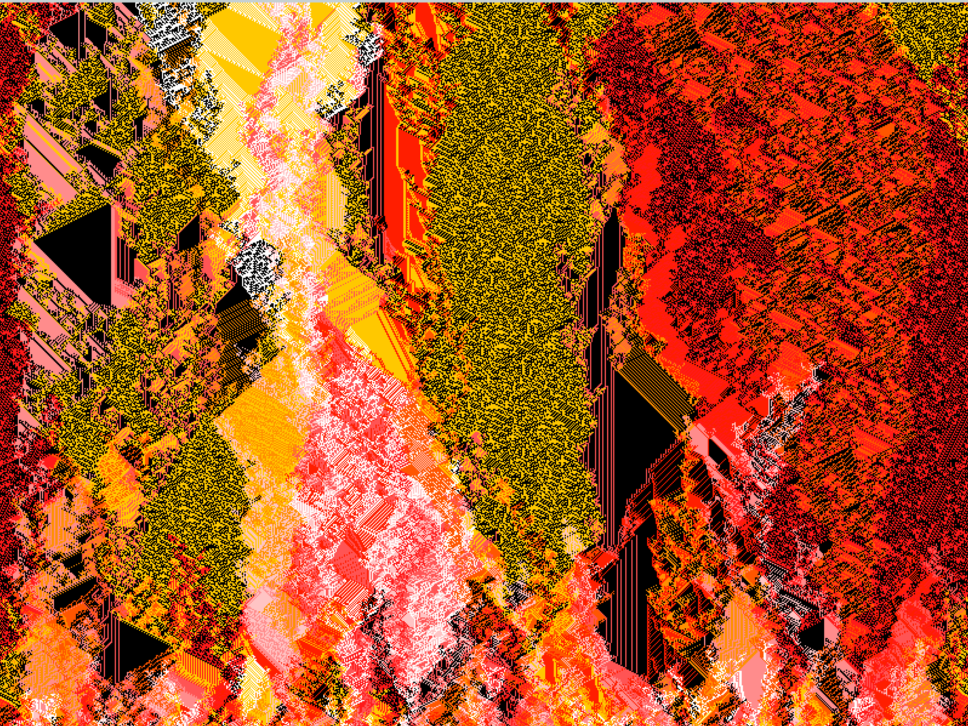


- $A = \{0, 1, 2\}$
- $V = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
- $f =$ majorité

- $A = \{0, 1\}$
- $V = \{-1, 0, 1\}$
- $f(x, y, z) = x + y + z \bmod 2$







- **Topologie sur $A^{\mathbb{Z}}$**
  - topologie produit de la topologie discrète
  - métrisable par $d(x,y) = 2^{-\min\{\|z\|_\infty : x_z \neq y_z\}}$
  - espace compact

- **Topologie sur $A^{\mathbb{Z}}$**
  - topologie produit de la topologie discrète
  - métrisable par $d(x,y) = 2^{-\min\{\|z\|_\infty : x_z \neq y_z\}}$
  - espace compact

- **Caractérisation globale**

  **Théorème (Curtis-Lyndon-Hedlund)**

  *$F$ est la fonction globale d'un AC si et seulement si $F$ est continue et commute avec les décalage.*

  - décalages : les fonctions $\sigma_z$ avec $\left(\sigma_z(x)\right)_{z'} = x_{z+z'}$

# Automates cellulaires

## Problématique de la classification

- approche expérimentale (S. Wolfram)
  - 4 classes
  - définitions floues
  - basé sur l'observation de petits automates
  - pertinence ?

# Automates cellulaires

## Problématique de la classification

- approche expérimentale (S. Wolfram)
  - 4 classes
  - définitions floues
  - basé sur l'observation de petits automates
  - pertinence ?

- approche « systèmes dynamiques »
  - pb du choix de la topologie (Cantor, Besicovitch, ...)
  - notions classiques adaptées aux AC ?

# Automates cellulaires

## Problématique de la classification

- approche expérimentale (S. Wolfram)
  - 4 classes
  - définitions floues
  - basé sur l'observation de petits automates
  - pertinence ?
- approche « systèmes dynamiques »
  - pb du choix de la topologie (Cantor, Besicovitch, ...)
  - notions classiques adaptées aux AC ?
- approche « algorithmique »
  - universalité Turing
  - notions de simulation ad hoc

- **Idées**
  - notion d'échelle (macro-cellules)
  - pré-ordre / simulation
    - classification
    - relation d'équivalence
    - notion d'universalité

# Automates cellulaires

## Les « groupages »

- **Idées**
  - notion d'échelle (macro-cellules)
  - pré-ordre / simulation
    - classification
    - relation d'équivalence
    - notion d'universalité

- **Historique**
  - J. Mazoyer et I. Rapaport (1998)
  - B. Martin II (2001)
  - N. Ollinger (2002)
  - GT (2005)

# Groupages — approche algébrique

## Esquisse générale

- **Ingrédients**
  1. comparaisons “locales” simples
     - alphabet
     - fonction locale
  2. transformations géométriques
     - sur l’espace-temps (indépendamment de l’alphabet)
     - “naturelles”

# Groupages — approche algébrique

## Esquisse générale

- **Ingrédients**
  1. comparaisons “locales” simples
     - alphabet
     - fonction locale
  2. transformations géométriques
     - sur l’espace-temps (indépendamment de l’alphabet)
     - “naturelles”

- **Comparaisons locales à transformation géométrique près**
  - $T_i$ : transformations
  - $<$ : comparaison locale
  - $F_A$ simule $F_B \iff \exists T_1, T_2 : T_1(F_B) < T_2(F_A)$

# Groupages — approche algébrique

## Comparaisons locales

- sous-automate : $F_A \sqsubseteq F_B$

# Groupages — approche algébrique

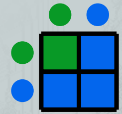
## Comparaisons locales

- sous-automate : $F_A \sqsubseteq F_B$

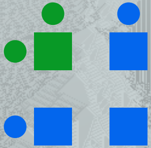
# Groupages — approche algébrique

## Comparaisons locales

- sous-automate : $F_A \sqsubseteq F_B$ (restriction compatible)



$\sqsubseteq$



# Groupages — approche algébrique

## Comparaisons locales

- sous-automate : $F_A \sqsubseteq F_B$ (restriction compatible)

- automate quotient : $F_A \trianglelefteq F_B$

# Groupages — approche algébrique

## Comparaisons locales

- sous-automate : $F_A \sqsubseteq F_B$ (restriction compatible)

- automate quotient : $F_A \trianglelefteq F_B$

# Groupages — approche algébrique

## Comparaisons locales

- sous-automate : $F_A \sqsubseteq F_B$ (restriction compatible)

- automate quotient : $F_A \trianglelefteq F_B$ (coloriage compatible)

# Groupages — approche algébrique

## Comparaisons locales

- sous-automate : $F_A \sqsubseteq F_B$ (restriction compatible)

- automate quotient : $F_A \trianglelefteq F_B$ (coloriage compatible)

- compositions : $\sqsubseteq \trianglelefteq \trianglelefteq \sqsubseteq \trianglelefteq \sqsubseteq \sqsubseteq \cdots$

# Groupages — approche algébrique
## Comparaisons locales

- $F_A \sqsubseteq F_B$ ssi $\exists i : A \to B$ injective et telle que :

$$\begin{array}{ccc}
A^{\mathbb{Z}} & \xrightarrow{\bar{i}} & B^{\mathbb{Z}} \\
\Big\downarrow F_A & & \Big\downarrow F_B \\
A^{\mathbb{Z}} & \xrightarrow{\bar{i}} & B^{\mathbb{Z}}
\end{array}$$

# Groupages — approche algébrique

## Comparaisons locales

- $F_A \sqsubseteq F_B$ ssi $\exists i : A \to B$ injective et telle que :

$$\begin{tikzcd} A^{\mathbb{Z}} \arrow[r, "\bar{i}"] \arrow[d, "F_A"] & B^{\mathbb{Z}} \arrow[d, "F_B"] \\ A^{\mathbb{Z}} \arrow[r, "\bar{i}"] & B^{\mathbb{Z}} \end{tikzcd}$$

- $F_A \trianglelefteq F_B$ ssi $\exists s : B \to A$ surjective et telle que :

$$\begin{tikzcd} A^{\mathbb{Z}} \arrow[d, "F_A"] & B^{\mathbb{Z}} \arrow[l, "\bar{s}"'] \arrow[d, "F_B"] \\ A^{\mathbb{Z}} & B^{\mathbb{Z}} \arrow[l, "\bar{s}"'] \end{tikzcd}$$

# Groupages — approche algébrique

## Comparaisons locales

**Proposition**

*Tous les relations composées sont incluses dans* $\trianglelefteq\!\!\sqsubseteq$

# Groupages — approche algébrique

## Comparaisons locales

**Proposition**

*Tous les relations composées sont incluses dans* $\trianglelefteq\!\sqsubseteq$

**Proposition**

*Les seules relations transitives sont* $\sqsubseteq$, $\trianglelefteq$ *et* $\trianglelefteq\!\sqsubseteq$

# Groupages — approche algébrique

## Comparaisons locales

**Proposition**

*Tous les relations composées sont incluses dans* $\trianglelefteq\!\sqsubseteq$

**Proposition**

*Les seules relations transitives sont* $\sqsubseteq$, $\trianglelefteq$ *et* $\trianglelefteq\!\sqsubseteq$

**Proposition**

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & \trianglelefteq\!\sqsubseteq & & \\
 & \nearrow & & \nwarrow & \\
\trianglelefteq & & \not\rightleftarrows & & \sqsubseteq
\end{array}
$$

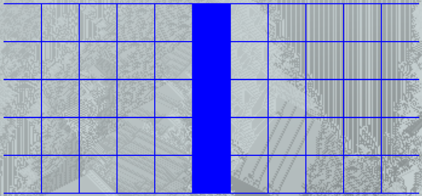
« $\rightarrow$ » : inclusion stricte.
« $\not\rightarrow$ » : non-inclusion.

- **Trois opérations / trois paramètres**

# Groupages — approche algébrique

## Transformations géométriques

- **Trois opérations / trois paramètres**



**Formellement...**

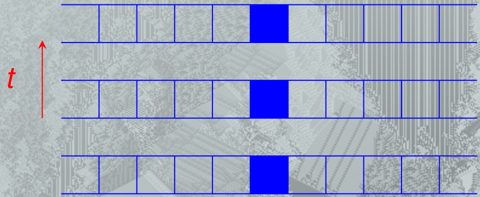
$$F_A^{<1,1,0>} = F_A$$

# Groupages — approche algébrique

## Transformations géométriques

- **Trois opérations / trois paramètres**

  - compression du temps




**Formellement...**

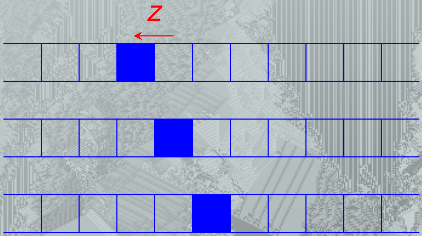
$$F_A^{<1,t,0>} = {F_A}^t$$

# Groupages — approche algébrique

## Transformations géométriques

- **Trois opérations / trois paramètres**

  - compression du temps
  - décalage régulier du réseau




**Formellement...**

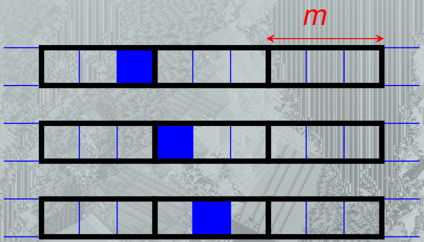
$$F_A^{<1,t,z>} = \sigma_z \circ F_A{}^t$$

# Groupages — approche algébrique

## Transformations géométriques

- **Trois opérations / trois paramètres**

  - compression du temps
  - décalage régulier du réseau
  - groupage de cellules en blocs




**Formellement...**

$$F_A^{<m,t,z>} = \mathbf{b}_m \circ \sigma_z \circ {F_A}^t \circ \mathbf{b}_m^{-1}$$

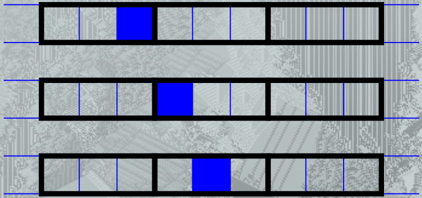
avec $\mathbf{b}_m : A^{\mathbb{Z}} \to (A^m)^{\mathbb{Z}}$ bijection canonique

# Groupages — approche algébrique

## Transformations géométriques

- **Trois opérations / trois paramètres**

  - compression du temps
  - décalage régulier du réseau
  - groupage de cellules en blocs



**Proposition**

$F_A^{<m,t,z>}$ *est un automate cellulaire.*

# Groupages — approche algébrique
## Définitions

$$F_A \preceq_{\sqsubseteq} F_B \iff \exists m, m', t, t', z, z' \,:\, F_A^{<m,t,z>} \sqsubseteq F_B^{<m',t',z'>}$$

$$F_A \preceq_{\trianglelefteq} F_B \iff \exists m, m', t, t', z, z' \,:\, F_A^{<m,t,z>} \trianglelefteq F_B^{<m',t',z'>}$$

$$F_A \preceq_{\underline{\lhd\sqsubset}} F_B \iff \exists m, m', t, t', z, z' \,:\, F_A^{<m,t,z>} \underline{\lhd\sqsubset} F_B^{<m',t',z'>}$$

# Groupages — approche algébrique

## Définitions

$$F_A \preceq_{\sqsubseteq} F_B \iff \exists m, m', t, t', z, z' : F_A^{<m,t,z>} \sqsubseteq F_B^{<m',t',z'>}$$

$$F_A \preceq_{\trianglelefteq} F_B \iff \exists m, m', t, t', z, z' : F_A^{<m,t,z>} \trianglelefteq F_B^{<m',t',z'>}$$

$$F_A \preceq_{\trianglelefteq\sqsubseteq} F_B \iff \exists m, m', t, t', z, z' : F_A^{<m,t,z>} \trianglelefteq\sqsubseteq F_B^{<m',t',z'>}$$

**Proposition**

*$\preceq_{\sqsubseteq}$, $\preceq_{\trianglelefteq}$ et $\preceq_{\trianglelefteq\sqsubseteq}$ sont des pré-ordres*

$$F_A \preceq_{\sqsubseteq} F_B \iff \exists m, m', t, t', z, z' : F_A^{<m,t,z>} \sqsubseteq F_B^{<m',t',z'>}$$

$$F_A \preceq_{\trianglelefteq} F_B \iff \exists m, m', t, t', z, z' : F_A^{<m,t,z>} \trianglelefteq F_B^{<m',t',z'>}$$

$$F_A \preceq_{\trianglelefteq\!\sqsubseteq} F_B \iff \exists m, m', t, t', z, z' : F_A^{<m,t,z>} \trianglelefteq\!\sqsubseteq F_B^{<m',t',z'>}$$

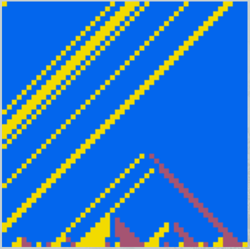
### Proposition

*$\preceq_{\sqsubseteq}$, $\preceq_{\trianglelefteq}$ et $\preceq_{\trianglelefteq\!\sqsubseteq}$ sont des pré-ordres*

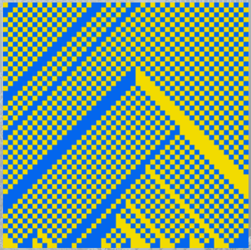
- on peut toujours imposer $z = 0$
- si $t = 1$, la simulation est **totale**
- si $z = z' = 0$, la simulation est **droite**

# Groupages — approche algébrique

## Exemples



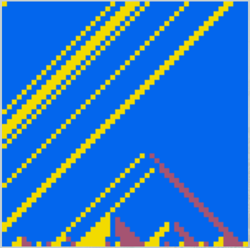
$F_A$



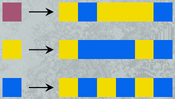
$F_B$

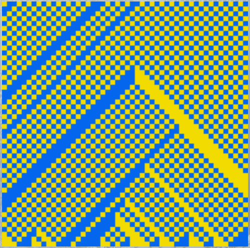
# Groupages — approche algébrique

## Exemples



$F_A$



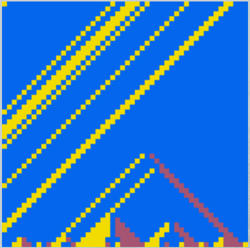


$F_B$

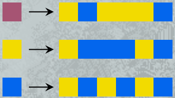
$$F_A \preceq_{\sqsubseteq} F_B$$

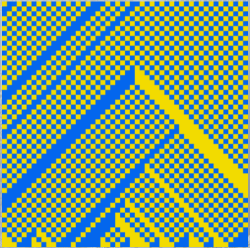
# Groupages — approche algébrique

## Exemples



$F_A$





$F_B$

$$F_A \preceq_{\sqsubseteq} F_B$$

car $F_A \sqsubseteq F_B^{<6,6,0>}$

## Proposition

$$\begin{array}{ccccc} & & \preceq_{\trianglelefteq\sqsubseteq} & & \\ & \nearrow & & \nwarrow & \\ \preceq_{\trianglelefteq} & & \not\rightleftarrows & & \preceq_{\sqsubseteq} \\ \not\updownarrow & & \nwarrow\!\!\!\nearrow & & \not\updownarrow \\ \sqsubseteq & & \not\rightleftarrows & & \trianglelefteq \end{array}$$

« $\longrightarrow$ » : inclusion stricte.
« $\not\longrightarrow$ » : non-inclusion.

# Groupages — approche dynamique

- **Sous-système stable**
  - $\Sigma$ un sous-shift de $A^{\mathbb{Z}}$
  - $\Sigma$ stable pour $F_A$ si $\exists t$ avec $F_A^t(\Sigma) \subseteq \Sigma$

# Groupages — approche dynamique

- **Sous-système stable**
  - $\Sigma$ un sous-shift de $A^{\mathbb{Z}}$
  - $\Sigma$ stable pour $F_A$ si $\exists t$ avec $F_A^t(\Sigma) \subseteq \Sigma$

- **Facteur**
  - $\phi : A^{\mathbb{Z}} \to B^{\mathbb{Z}}$
  - $\phi$ continue, surjective, commute avec les décalages
  - $F_B$ facteur de $F_A$ si $\phi \circ F_A = F_B \circ \phi$

# Groupages — approche dynamique

- **Sous-système stable**
  - $\Sigma$ un sous-shift de $A^{\mathbb{Z}}$
  - $\Sigma$ stable pour $F_A$ si $\exists t$ avec $F_A^t(\Sigma) \subseteq \Sigma$
- **Facteur**
  - $\phi : A^{\mathbb{Z}} \to B^{\mathbb{Z}}$
  - $\phi$ continue, surjective, commute avec les décalages
  - $F_B$ facteur de $F_A$ si $\phi \circ F_A = F_B \circ \phi$
- **Généralisations**
  - $\phi$ commute faiblement : $\exists a, b : \sigma^a \circ \phi = \phi \circ \sigma^b$
  - $\Sigma$ n'est pas clôt par $\sigma$, mais par $\sigma^n$

# Groupages — approche dynamique

- **Facteurs de sous-systèmes**
  - $F_A \preceq F_B$ si $F_A$ est facteur d'un sous-système de $F_B$

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow{\phi} & A^{\mathbb{Z}} \\ {\scriptstyle F_B^t}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F_A} \\ \Sigma & \xrightarrow{\phi} & A^{\mathbb{Z}} \end{array}$$

# Groupages — approche dynamique

- **Facteurs de sous-systèmes**
  - $F_A \preceq F_B$ si $F_A$ est facteur d'un sous-système de $F_B$

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow{\phi} & A^{\mathbb{Z}} \\ {\scriptstyle F_B^t}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F_A} \\ \Sigma & \xrightarrow{\phi} & A^{\mathbb{Z}} \end{array}$$

  - c'est un pré-ordre (très général)

# Groupages — approche dynamique

- **Facteurs de sous-systèmes**
  - $F_A \preceq F_B$ si $F_A$ est facteur d'un sous-système de $F_B$

$$\begin{tikzcd} \Sigma \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "F_B^t"'] & A^{\mathbb{Z}} \arrow[d, "F_A"] \\ \Sigma \arrow[r, "\phi"] & A^{\mathbb{Z}} \end{tikzcd}$$

  - c'est un pré-ordre (très général)
  - on retrouve les simulations $\preceq_{\sqsubseteq}$, $\preceq_{\trianglelefteq}$ et $\preceq_{\trianglelefteq\!\sqsubseteq}$ droites et totales par
    - contraintes sur $\Sigma$
    - contraintes sur $\phi$

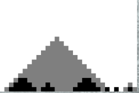
# Structure des pré-ordres

- *Conventions pour la suite*
  - on considère seulement $\preceq_{\sqsubseteq}$, $\preceq_{\trianglelefteq}$ et $\preceq_{\trianglelefteq\!\sqsubseteq}$
  - $\preceq$ désigne indifféremment l'une des trois

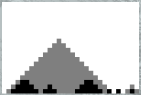
# Structure des pré-ordres

- *Conventions pour la suite*
  - on considère seulement $\preceq_{\sqsubseteq}$, $\preceq_{\trianglelefteq}$ et $\preceq_{\trianglelefteq\!\sqsubseteq}$
  - $\preceq$ désigne indifféremment l'une des trois
- **Bas de l'ordre**
  - automate à 1 état est minimum global
  - nilpotents à hauteur 1
  - classe de l'identité à hauteur 1

# Structure des pré-ordres

- *Conventions pour la suite*
  - on considère seulement $\preceq_{\sqsubseteq}$, $\preceq_{\trianglelefteq}$ et $\preceq_{\trianglelefteq\!\!\sqsubseteq}$
  - $\preceq$ désigne indifféremment l'une des trois
- **Bas de l'ordre**
  - automate à 1 état est minimum global
  - nilpotents à hauteur 1
  - classe de l'identité à hauteur 1
- **Ordres induits**
  - chaîne infinie croissante : $(MAX_n)$ 

# Structure des pré-ordres

- *Conventions pour la suite*
  - on considère seulement $\preceq_{\sqsubseteq}$, $\preceq_{\trianglelefteq}$ et $\preceq_{\underline{\triangleleft\!\sqsubset}}$
  - $\preceq$ désigne indifféremment l'une des trois
- **Bas de l'ordre**
  - automate à 1 état est minimum global
  - nilpotents à hauteur 1
  - classe de l'identité à hauteur 1
- **Ordres induits**
  - chaîne infinie croissante : $(MAX_n)$ 
  - 2 chaînes infinies croissante incomparables
  - tout arbre fini
  - chaîne infinie décroissante
  - ...

# Universalité intrinsèque

**Définition**

*$F_A$ est $\preceq$-universel si $\forall F_B : F_B \preceq F_A$*

# Universalité intrinsèque

**Définition**

*$F_A$ est $\preceq$-universel si $\forall F_B : F_B \preceq F_A$*

**Théorème**

*Il existe des automates $\preceq_{\sqsubseteq}$-universels.*

# Universalité intrinsèque

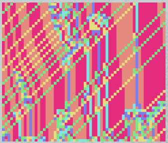
**Définition**

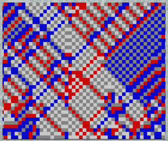
*$F_A$ est $\preceq$-universel si $\forall F_B : F_B \preceq F_A$*

**Théorème**

*Il existe des automates $\preceq_{\sqsubseteq}$-universels.*

**Démonstration.**





$\square$

# Universalité intrinsèque

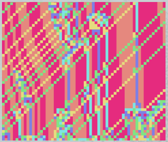
**Définition**

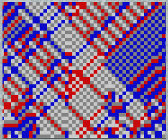
*$F_A$ est $\preceq$-universel si $\forall F_B : F_B \preceq F_A$*

**Théorème**

*Il existe des automates $\preceq_{\sqsubseteq}$-universels.*

**Démonstration.**





$\square$

- **Autres propriétés :**
  - si $F_A$ est $\preceq$-universel, alors il simule totalement tout $F_B$
  - $\preceq_{\sqsubseteq}$-universel implique Turing-universel (réciproque fausse)

# Universalité intrinsèque

**Proposition**

*Si $F_A \times F_B$ est universel, alors $F_A$ ou $F_B$ l'est.*

# Universalité intrinsèque

### Proposition

*Si $F_A \times F_B$ est universel, alors $F_A$ ou $F_B$ l'est.*

### Théorème

*La $\preceq_{\sqsubseteq}$- et la $\preceq_{\trianglelefteq\!\!\!\sqsubseteq}$-universalité sont indécidables.*

# Universalité intrinsèque

**Proposition**

*Si $F_A \times F_B$ est universel, alors $F_A$ ou $F_B$ l'est.*

**Théorème**

*La $\preceq_{\sqsubseteq}$- et la $\preceq_{\trianglelefteq}$-universalité sont indécidables.*

**Démonstration.**

- $T$ : jeu de tuiles NE-déterministe
- savoir si $T$ pave périodiquement le plan est indécidable
- automate $T \times U$ où $U$ universel

$\square$

# Universalité intrinsèque

**Proposition**

*Si $F_A \times F_B$ est universel, alors $F_A$ ou $F_B$ l'est.*

**Théorème**

*La $\preceq_{\sqsubseteq}$- et la $\preceq_{\trianglelefteq\sqsubseteq}$-universalité sont indécidables.*

**Démonstration.**

- $T$ : jeu de tuiles NE-déterministe
- savoir si $T$ pave périodiquement le plan est indécidable
- automate $T \times U$ où $U$ universel

$\square$

**Corollaire**

*Si $F_A$ n'est pas $\preceq$-universel, alors il existe une chaîne infinie croissante au dessus de lui.*

# Topologie des pré-ordres

ouvert fermé

# Topologie des pré-ordres

ouvert fermé

- **Fermés remarquables**
  - surjectifs
  - réversibles
  - linéaires
  - « *équicontinus* »
  - expansifs (vrai pour $\preceq_{\sqsubseteq}$)

# Topologie des pré-ordres

ouvert fermé

- **Fermés remarquables**
  - surjectifs
  - réversibles
  - linéaires
  - « *équicontinus* »
  - expansifs (vrai pour $\preceq_{\sqsubseteq}$)
- **Ouverts remarquables**
  - « *sensibles aux conditions initiales* » (pour $\preceq_{\trianglelefteq}$ seulement)
  - Turing-universels

# Problèmes ouverts

# Problèmes ouverts

- existe-t il des automates $\preceq_{\trianglelefteq}$-universels ?

# Problèmes ouverts

- existe-t il des automates $\preceq_{\trianglelefteq}$-universels ?
- $\preceq_{\sqsubseteq}$-universalité et $\preceq_{\trianglelefteq\!\!\!\sqsubseteq}$-universalité équivalentes ?

# Problèmes ouverts

- existe-t il des automates $\preceq_{\trianglelefteq}$-universels ?
- $\preceq_{\sqsubseteq}$-universalité et $\preceq_{\trianglelefteq\!\sqsubseteq}$-universalité équivalentes ?
- un ordre induit dense dans l'un des pré-ordres ?

# Problèmes ouverts

- existe-t il des automates $\preceq_{\trianglelefteq}$-universels ?
- $\preceq_{\sqsubseteq}$-universalité et $\preceq_{\trianglelefteq\!\sqsubseteq}$-universalité équivalentes ?
- un ordre induit dense dans l'un des pré-ordres ?
- quels automates au niveau 1 ? à hauteur finie ?

# Problèmes ouverts

- existe-t il des automates $\preceq_{\trianglelefteq}$-universels ?
- $\preceq_{\sqsubseteq}$-universalité et $\preceq_{\trianglelefteq\sqsubseteq}$-universalité équivalentes ?
- un ordre induit dense dans l'un des pré-ordres ?
- quels automates au niveau 1 ? à hauteur finie ?
- Turing-universel implique hauteur infinie ?