

# Éléments de probabilité : correction de l'interrogation 3

L2 informatique, groupe 3

Le 5 avril 2011

## Exercice 1

(6 points)

1. Le nombre  $N$  de voix du candidat  $B$  est compris entre 41 000 et 53 000. La variable aléatoire  $(N - 41\,000)$  suit une loi binomiale de paramètres  $p = 2/3$  et  $n = 12\,000$ . Donc  $P(N = 41\,000 + k) = \binom{12\,000}{k} (2/3)^k (1/3)^{12\,000-k}$  pour  $0 \leq k \leq 12\,000$  et  $E(N) = 41\,000 + 2/3 \times 12\,000 = 49\,000$  et  $Var(N) = 2/3 \times 1/3 \times 12\,000 = 8\,000/3$ .
2.  $P(N \geq 50\,000) \leq P(|N - E(N)| \geq 1\,000) \leq Var(N)/10^6 = (8/3) \cdot 10^{-3}$  par Tchebychev, soit environ 0,3%.

## Exercice 2

(14 points)

1. Pour  $k \geq 1$ ,  $P(X = k) = (4/5)^{k-1} (1/5)$  : loi géométrique de paramètre  $p = 1/5$ . Espérance  $E(X) = 1/p = 5$ , variance  $Var(X) = (1-p)/p^2 = 20$ .
2. Tchebychev :  $P(X \geq 15) = P(|X - E(X)| \geq 10) \leq Var(X)/10^2 = 1/5$ .
3.  $Y_i = 3 - X$  donc pour  $k \in ]-\infty, 2]$ ,  $P(Y_i = k) = P(X = 3 - k) = (4/5)^{2-k} / 5$ . Espérance  $E(Y_i) = 3 - E(X) = -2$  (par linéarité) et variance  $Var(Y_i) = Var(3 - X) = Var(X) = 20$ .
4.  $Y = \sum_{i=1}^{100} Y_i$  donc  $E(Y) = -200$  (par linéarité) et  $Var(Y) = 2\,000$  (par indépendance des  $Y_i$ ).
5. Tchebychev :  $P(Y \geq 200) \leq P(|Y - E(Y)| \geq 400) \leq 2\,000/400^2 = 1/80$  soit 1,25%.