Éléments de probabilité : correction de l'interrogation 2

L2 informatique, groupe 3

Le 18 mars 2011

Exercice 1

1. La probabilité d'obtenir pile est donc 1/3. X prend ses valeurs entre 2 et 8. Pour obtenir $X = 2$, il faut que le dé donne 1 et la pièce donne pile, donc $P(X = 2) = 1/18$; pour obtenir $X = 8$, il faut que le dé donne 6 et la pièce donne face, donc $P(X = 8) = 1/9$; enfin, pour obtenir $X = k$ pour $3 \leq k \leq 7$, il faut que le dé donne $k - 1$ et la pièce pile, ou $k - 2$ et la pièce face, donc $P(X = k) = 1/9 + 1/18 = 1/6$. Ainsi, la loi de X est :

k	2	3	4	5	6	7	8
$P(X = k)$	1/18	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/9

2. X étant la somme du numéro de tiroir et du numéro de compartiment, par linéarité de l'espérance on a : $E(X) = 7/2 + (1/3 + 4/3) = 31/6$. On peut retrouver ce résultat en calculant l'espérance à partir des probabilités calculées ci-dessus.

Exercice 2

1. $P(S = n) = \binom{40}{n}(1/4)^n(3/4)^{40-n}$. En outre, $E(S) = \sum_{i=1}^{40} E(X_i)$ où X_i vaut 1 ou 0 selon que la i-ème réponse est correcte ou non. Donc $E(X_i) = 1/4$ et $E(S) = 10$.
2. $P(S \geq 38) = \sum_{i=38}^{40} P(S = i) = 7141/4^{40} \simeq 7.10^{-21}$.
3. Markov : $P(S \geq 38) \leq E(S)/38 = 5/19 \simeq 0{,}26$. Il s'agit donc d'une majoration très grossière.

Exercice 3

1. Avec deux dés, le nombre de façons d'obtenir $1 + i$ est i pour $1 \leq i \leq 6$, de même pour $13 - i$. Le nombre total de cas est 36. Ainsi, $P(X_1 = 1 + i) = P(X_1 = 13 - i) = i/36$ pour $1 \leq i \leq 6$.
   Par linéarité de l'espérance, $E(X_1)$ est deux fois l'espérance du nombre de points effectués avec un dé, donc $E(X_1) = 7$.
2. Le premier lancer a toujours lieu, donc $P(D_1)$ est la probabilité d'avoir un double. Il y a 6 doubles parmi 36 cas possibles, donc $P(D_1) = 1/6$.
   Si D_{i-1} a eu lieu, alors il y a un i-ème tour, donc $P(D_i|D_{i-1}) = 1/6$. Par ailleurs, $P(D_i|\overline{D_{i-1}}) = 0$ puisqu'il n'y a pas de i-ème tour s'il n'y a pas eu de double au tour $(i - 1)$.
   Donc $P(D_i) = P(D_i|D_{i-1})P(D_{i-1}) + P(D_i|\overline{D_{i-1}})P(\overline{D_{i-1}}) = P(D_{i-1})/6$. On en déduit $P(D_i) = 1/6^i$.
3. Pour $k = 0$: $P(X_i = 0|D_{i-1}) = 0$ et $P(X_i = 0|\overline{D_{i-1}}) = 1$.
   Pour $k \geq 2$: $P(X_i = k|D_{i-1}) = P(X_1 = k)$.
4. Pour $k \geq 2$: $P(X_i = k) = P(X_i = k|D_{i-1})P(D_{i-1}) + P(X_i = k|\overline{D_{i-1}})P(\overline{D_{i-1}}) = P(X_1 = k)/6^{i-1}$.
   Puisque la valeur $X_i = 0$ n'intervient pas dans l'espérance, on a donc $E(X_i) = E(X_1)/6^{i-1}$.
5. Par linéarité, $E(S_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = 7\sum_{i=0}^{n-1}(1/6)^i$, donc quand n tend vers l'infini, $E(S_n)$ tend vers $7/(1 - 1/6) = 42/5 = 8{,}4$. La limite de S_n correspond au nombre de cases parcourues lors d'un tour, donc en moyenne un joueur parcourt 8,4 cases à chaque tour.