TD08 – Si ça sonne creux, c'est que c'est pas dur

Définition
Un langage est dit unaire lorsqu'il est inclus dans $\{1\}^\star$.

Exercice 1.

1. Donner un algorithme récursif pour résoudre SAT.

2. Soit S un langage unaire NP-dur. En réduisant SAT à S, améliorer l'algorithme précédent pour qu'il devienne polynomial.

3. Qu'en concluez-vous ?

Définition
Un langage $\mathcal{L}$ est dit creux lorsqu'il existe un polynôme p tel que, pour tout n, $\mathcal{L} \cap \Sigma^n$ est de cardinal au plus $p(n)$.

Exercice 2.

1. Soit un langage creux $\mathcal{L}$. Que pouvez-vous dire du cardinal de $\mathcal{L} \cap \Sigma^{\leq n}$?

2. Nous allons montrer que s'il existe un langage $\mathcal{L}$ creux et NP-dur, alors $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$. Soit donc un tel langage $\mathcal{L}$ et soit X dans NP :

$$x \in X \text{ ssi } \exists w \in \Sigma^{p(|x|)}, \langle x,\, w\rangle \in A$$

avec p un polynôme et $A \in \mathsf{P}$. On veut montrer que X est décidable en temps polynomial.
Soit $G(A) = \{\langle x,\, w\rangle,\ \text{tels que } \exists y \in \Sigma^{p(|x|)}, y \geq w \text{ et } \langle x,\, y\rangle \in A\}$.
Montrer que $G(A)$ est dans NP.

3. En utilisant une réduction de $G(A)$ à $\mathcal{L}$, montrer qu'on peut décider X en temps polynomial (conseil : on pourra déterminer un algo polynomial qui, sur l'entrée x, trouve le plus grand w tel que $\langle x,\, w\rangle \in A$ lorsqu'il existe).