TD03

Exercice 1. *Si recuit*

1. Réaliser un circuit effectuant l'addition de deux entiers codés en binaire $x = \overline{x_{n-1} \dots x_0}$ et $y = \overline{y_{n-1} \dots y_0}$ en utilisant l'algorithme naïf appris à l'école. Quelle est la taille (nombre de portes) et la profondeur (plus long chemin entre une entrée et la sortie) de ce circuit ?

2. On suppose ici que n est une puissance de 2. Réaliser un circuit effectuant l'addition de x et y en utilisant la méthode récursive suivante : on effectue à la fois le calcul de $\overline{x_{n-1} \dots x_{n/2}} + \overline{y_{n-1} \dots y_{n/2}}$ et le calcul de $\overline{x_{n-1} \dots x_{n/2}} + \overline{y_{n-1} \dots y_{n/2}} + 1$ et on sélectionne le bon en fonction de la retenue sortante du calcul de $\overline{x_{n/2-1} \dots x_0} + \overline{y_{n/2-1} \dots y_0}$. Quelle est la taille et la profondeur de votre circuit ?

3. Soit (C_n) une famille de circuits de profondeur $O(\log(n)^k)$ pour une certaine constante k. Que pouvez-vous dire de la taille de C_n ?
On note NC^k la classe des fonctions calculables par une famille de circuits de taille polynomiale et de profondeur $O(\log(n)^k)$. Que pouvez-vous dire de la complexité de l'addition binaire de deux entiers ?

4. On note AC^0 la classe des fonctions calculables par une famille de circuits booléens de taille polynomiale et de profondeur constante composés exclusivement de portes NOT, ainsi que de portes AND et OR *ayant un nombre d'entrées arbitraire*.
Montrer que l'addition binaire est dans AC^0 (conseil : exprimer le fait qu'une retenue sera présente sur le i-ème bit à l'aide d'une formule logique).
Que devient la classe AC^0 si on supprime la condition de taille polynomiale ?

5. Montrer que $\mathrm{AC}^0 \subseteq \mathrm{NC}^1$.

Exercice 2. *Bien habillé*

On rappelle qu'un *système acceptable de programmation* est une énumération (surjective) des fonctions calculables : $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots$ vérifiant :
- *universalité* : il existe une fonction récursive totale f telle que $\forall n,\, x,\, f(\langle n,\, x\rangle) = \varphi_n(x)$. On note généralement u un numéro tel que $f = \varphi_u$.
- *s-n-m* : pour tous n et m, il existe une fonction récursive totale s_n^m telle que

$$\forall a,\, x_1, \dots,\, x_n,\, y_1, \dots,\, y_m,\, \varphi_{s_n^m(\langle a, x_1, \dots, x_n\rangle)}(\langle y_1, \dots,\, y_m\rangle) = \varphi_a(\langle x_1, \dots,\, x_n,\, y_1, \dots,\, y_m\rangle).$$

1. Montrer qu'on peut se contenter de s_1^1.

2. Montrer qu'il existe une fonction totale c telle que pour tous a et b, $\varphi_{c(\langle a,\, b\rangle)} = \varphi_a \circ \varphi_b$.

3. Soit une énumération vérifiant l'universalité et l'existence d'une telle fonction c. Nous allons montrer l'existence de s_1^1.
Soient $\varphi_p : y \mapsto \langle 0,\, y\rangle$, $\varphi_q : \langle x,\, y\rangle \mapsto \langle x+1,\, y\rangle$. En utilisant ces fonctions, montrer qu'il existe une fonction récursive totale R telle que $\forall n,\, y,\, \varphi_{R(n)}(y) = \langle n,\, y\rangle$.
Conclure.

Exercice 3. *Mariage*

Soit $A = \{j \mid \exists x \ \varphi_j(x) = j\}$.

1. Rappeler le théorème de Rice et le théorème de point fixe de Kleene.

2. Rappeler le lemme de remplissage.

3. On dit qu'un ensemble d'entiers E préserve les fonctions si pour tous entiers i et j, si i appartient à E et $\varphi_i = \varphi_j$ alors j appartient à E. Est-ce que A préserve les fonctions ?

4. Est-ce que A est récursif ?

5. Est-ce que A est récursivement énumérable ?

Exercice 4. *Droits de succession*

✎ Soit $A = \{i \mid \varphi_i = \varphi_{i+1}\}$. L'ensemble A est-il récursif ?