TD01 - Les machines rament

Exercice 1. *Galons*

1. Rappeler comment simuler une machine de Turing à plusieurs rubans par une machine à un ruban.

2. En combien de temps fonctionne la simulation ?

Rappel

Une RAM sur l'alphabet $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_k\}$ est un ensemble infini de registres $R_1, R_2, \ldots$ pouvant chacun contenir un mot, un ensemble fini ordonné de noms de ligne distincts $N_1, N_2, \ldots$ et une instruction par ligne du type :

1. pour chaque $1 \leq j \leq k$, $\mathrm{add}_j\ R$ (ajoute a_j à la droite du registre R) ;
2. $\mathrm{del}\ R$ (efface la lettre la plus à gauche du registre R si elle existe) ;
3. $\mathrm{clr}\ R$ (met le mot vide dans le registre R) ;
4. $R \leftarrow R'$ (copie le mot de R' dans R en le laissant aussi dans R') ;
5. $\mathrm{jmp}\ N$ (va à la ligne N) ;
6. pour chaque $1 \leq j \leq k$, $R\ \mathrm{jmp}_j\ N$ (si la première lettre du mot dans R est a_j, va à la ligne N, sinon va à la ligne suivante) ;
7. stop (fin du programme).

En fait, les règles 1, 2, 6 et 7 forment un ensemble minimal suffisant pour les fonctions calculables par RAM.

Exercice 2. *Échauffement à la rame*

✎ Écrire un programme RAM prenant un mot x en entrée (c'est-à-dire qu'un des registres contient $x = x_1 \ldots x_n$ au départ) et renvoyant le miroir de ce mot, c'est-à-dire qu'un des registres contient $\bar{x} = x_n \ldots x_1$ à la fin.

Exercice 3. *Équivalence Turing / RAM*

Nous allons montrer que toute fonction calculable par une RAM est calculable par une machine de Turing.
Une SRM (machine à un seul registre) sur $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_k\}$ est une machine qui n'a qu'un seul registre pouvant contenir n'importe quel mot de Σ^*. Ses instructions sont de trois sortes :

1. pour chaque $1 \leq j \leq k$, add_j (ajoute a_j à la droite du registre) ;
2. del (efface la lettre la plus à gauche du registre si elle existe) ;
3. pour chaque $1 \leq j \leq k$, $\mathrm{jmp}_j N$ (va à la ligne N si le registre commence par a_j).

Si Φ est une fonction partielle de Σ^* alors un programme P qui est une SRM sur $\Sigma' = \Sigma \cup \{,\}$ calcule Φ si quand le registre contient $u_1, \ldots, u_n$, pour des mots $u_1, \ldots, u_n \in \Sigma^*$, alors P s'arrête et le registre contient $\Phi(u_1, \ldots, u_n)$.

1. Soient $u_1, \dots, u_n$ des mots sur l'alphabet Σ. Donner une SRM qui sur l'entrée $u_1, \dots, u_n$ calcule $u_2, \dots, u_n, u_1$.

2. Montrer que toute fonction calculable par une RAM est calculable par une SRM.

3. Montrer que toute fonction calculable par une SRM est calculable par une machine de Turing.

4. Évaluer le temps de la simulation de la machine RAM par la machine de Turing.