Complexité algorithmique : exercices

M1 informatique

Le 15 décembre 2014

Exercice 1 – Vrai ou faux ?

1. Sur une entrée x, une machine de Turing non déterministe polynomiale peut avoir tous ses chemins acceptants.
2. Si $A \in \mathsf{P}$ et $B \leq_m^p A$, alors $B \in \mathsf{P}$.
3. Si A est NP-complet et $A \leq_m^p B$, alors B est NP-complet.
4. $\mathsf{DTIME}(n^2) \subseteq \mathsf{EXP}$.

Exercice 2

Donner un algorithme non déterministe pour le problème suivant :

— *entrée* : un graphe non orienté G, et un entier k ;

— *question* : existe-t-il un chemin *simple* de longueur k dans G ? (Un chemin est simple s'il ne passe pas deux fois par le même sommet.)

Quelle est la complexité de votre algorithme ? Le problème appartient-il à la classe NP ?

Exercice 3

Soit SAC à DOS le problème suivant :

— *entrée* : des poids entiers $p_1, \ldots, p_n$ et des valeurs entières $v_1, \ldots, v_n$, un poids limite A et un entier V ;

— *question* : existe-t-il $E \subseteq \{1, \ldots, n\}$ tel que

$$\sum_{i \in E} a_i \leq A \quad \text{et} \quad \sum_{i \in E} v_i \geq V\ ?$$

Montrer que SAC à DOS est NP-complet.

Indication : effectuer une réduction de SOMME PARTIELLE.

Exercice 4

Soit NAE4SAT le problème suivant :

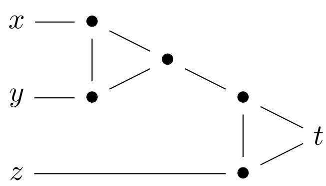
— *entrée* : une formule $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ en 4-CNF ;

— *question* : existe-t-il une affectation des variables telle que chaque clause contienne au moins un littéral vrai et un littéral faux ?

1. Réduire 3SAT à NAE4SAT en ajoutant une même nouvelle variable z à chaque clause.
2. En déduire que NAE4SAT est NP-complet.

Exercice 5
Soit 3COL le problème suivant :
- *entrée* : un graphe non orienté G ;
- *question* : peut-on colorier les sommets avec trois couleurs, de sorte que deux sommets adjacents aient des couleurs distinctes ?

1. On dispose de trois couleurs pour colorier des graphes, sans que deux sommets adjacents soient de même couleur. Montrer que le graphe ci-dessous, nommé « gadget de clause », vérifie la propriété suivante :
   - si x, y et z sont coloriés de la même couleur, alors t doit être colorié avec la même couleur ;
   - sinon, t peut être colorié d'une quelconque couleur.



2. À partir d'une formule $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ en 3-CNF, on considère les sommets suivants :
   - trois sommets V, F et $\perp$;
   - les littéraux x_i et $\neg x_i$;
   - les clauses C_j.

   Sur ces sommets, on construit le graphe suivant :
   - on relie les trois sommets V, F et $\perp$;
   - pour chaque i, on relie x_i, $\neg x_i$ et $\perp$;
   - pour chaque clause $C_j = (l_1 \vee l_2 \vee l_3)$, on relie C_j, $\perp$ et F ; de plus, on insère une copie du gadget de clause avec $x = l_1$, $y = l_2$, $z = l_3$ et $t = C_j$.

   On appelle G_ϕ le graphe obtenu.
   Dessiner G_ϕ pour la formule
   $$\phi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3).$$
3. Montrer qu'une affectation satisfaisant ϕ procure un coloriage valide de G_ϕ.
4. Montrer qu'un coloriage valide de G_ϕ fournit une affectation satisfaisant ϕ.
5. Montrer que 3COL est NP-complet.