NOTES DES MEMBRES ET CORRESPONDANTS ET NOTES PRÉSENTÉES OU TRANSMISES PAR LEURS SOINS

LOGIQUE MATHÉMATIQUE. — *Problème de la minimalité des réels définis par « forcing » à partir d'un ultrafiltre.* Note (*) de M. **Serge Grigorieff**, présentée par M. Jean Leray.

Soit $\mathfrak{M}$ un modèle transitif de ZF plus l'axiome du choix et soit $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers.

Définition. — Un réel g est dit minimal sur $\mathfrak{M}$ si $g \notin \mathfrak{M}$ et

$$\forall f \quad (f \text{ est un réel de } \mathfrak{M}[g] \Rightarrow f \in \mathfrak{M} \text{ ou } \mathfrak{M}[f] = \mathfrak{M}[g]).$$

Soit $J \in \mathfrak{M}$ un idéal de $\mathfrak{P}(\mathbf{N})$ contenant l'idéal des parties finies. On définit dans $\mathfrak{M}$ l'ensemble $C_J = \{ p : p$ est une fonction à valeurs dans $\{0, 1\}$ dont le domaine est un élément de $J \}$. On ordonne C_J en posant $p \leqq q \Leftrightarrow p \supset q$.

Soit G une partie $\mathfrak{M}$-générique de C_J, G définit un réel

$$g = \{ (n, i) : \{ (n, i) \} \in G \}.$$

Comme G est l'ensemble des restrictions de g aux éléments de J on a $\mathfrak{M}[G] = \mathfrak{M}[g]$. Les réels définis par les parties $\mathfrak{M}$-génériques de C_J sont appelés J-génériques Cohen sur $\mathfrak{M}$.

Si l'idéal J n'est pas maximal il est facile de voir que C_J est isomorphe à un produit, une partie $\mathfrak{M}$-générique se décompose donc, de même le réel associé. Ainsi un J-générique Cohen n'est pas minimal sur $\mathfrak{M}$.

Dans ce qui suit on montre que si J est maximal un J-générique Cohen sur $\mathfrak{M}$ est minimal sur $\mathfrak{M}$ si et seulement si J a pour dual un ultrafiltre sélectif (déf. 1.2).

1. Quelques propriétés combinatoires. — Soit $\sigma(\mathbf{N})$ l'ensemble des suites finies d'entiers. Si $s \in \sigma(\mathbf{N})$, $s : k \to \mathbf{N}$, si $a \in \mathbf{N}$, on note $s \star (a)$ la suite de domaine $k + 1$ qui prolonge s et dont la valeur au point k est a.

Soit J un idéal de $\mathfrak{P}(\mathbf{N})$ contenant l'idéal des parties finies.

Définition 1.1. — *a.* Un arbre A est un sous-ensemble non vide de $\sigma(\mathbf{N})$ clos par restriction de suites. Une subdivision de A est un ensemble d'entiers du type $\{ a : s \star (a) \in A \}$ pour un s de A. A est un J-arbre si aucune subdivision de A n'est dans J. Une branche H de A est une application de **N** dans **N** dont toute restriction à un entier est dans A. H est une J-branche si son image n'est pas dans J.

b. J est un T-idéal si tout J-arbre a une J-branche.

Soit F le dual de J : $F = \{ \mathbf{N} - X ; X \in J \}$.

DÉFINITION 1.2. — Le filtre F est dit sélectif si pour toute partition de **N** en éléments de J il existe un élément de F coupant chaque ensemble de la partition en au plus un point.

THÉORÈME 1.3. — *Si* J *est maximal, alors* J *est un* T*-idéal si et seulement si son ultrafiltre dual est sélectif.*

La preuve de ce théorème dont l'essentiel se trouve dans Booth ([1]) ne sera pas donnée ici.

Signalons que l'existence d'ultrafiltres sélectifs est assurée par l'hypothèse du continu.

2. FORCING AVEC UN ULTRAFILTRE NON SÉLECTIF.

THÉORÈME 2.2. — *Si* J *est un idéal maximal de dual* F *non sélectif, alors un* J*-générique Cohen sur* $\mathfrak{M}$ *n'est pas minimal sur* $\mathfrak{M}$.

Preuve. — Soit G, $\mathfrak{M}$-générique sur C_J, et soit g le réel associé. F n'étant pas sélectif, soit $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une partition de N en éléments de J sans sélecteur dans F. Notons $2^{x_n}/I_n$ le quotient de 2^{x_n} par l'idéal des parties finies de x_n et soit h_n une fonction de choix sur $2^{x_n}/I_n$.

On définit $B : \bigcup_{n \in \mathbf{N}} 2^{x_n} \to \{ 0, 1 \}$ par $B(l) = 1$ si et seulement si, l étant dans 2^{x_n}, diffère du représentant par h_n de sa classe dans $2^{x_n} I_n$ sur un nombre fini pair d'entiers.

On définit alors dans $\mathfrak{M}[g]$ un réel f par $f(n) = 1$ si et seulement si $B(g \upharpoonright x_n) = 1$. Soit K l'idéal maximal défini par $u \in K \Leftrightarrow \bigcup_{n \in u} x_n \in J$; on montre simplement que f est un réel K-générique Cohen sur $\mathfrak{M}$ et donc n'est pas dans $\mathfrak{M}$.

D'autre part, on montre aussi, que G est $\mathfrak{M}[f]$-générique sur Σ, sous-ensemble de C_J défini par

$$p \in \Sigma \quad \Leftrightarrow \quad \forall n [\operatorname{dom}(p) \supset x_n \Rightarrow B(p \upharpoonright x_n) = f(n)].$$

Utilisant l'hypothèse faite sur les x_n on voit aisément que $X = \{ p \in \Sigma : p$ est incompatible avec un élément de G $\}$ est dense dans Σ, et par suite G, donc g, n'est pas dans $\mathfrak{M}[f]$.

C. Q. F. D.

3. « FORCING » AVEC UN T-IDÉAL MAXIMAL.

THÉORÈME 3.1. — *Si* J *est un* T*-idéal maximal, alors un* J*-générique Cohen sur* $\mathfrak{M}$ *est minimal sur* $\mathfrak{M}$.

Preuve. — Soit f un réel de $\mathfrak{M}[g]$ ayant a pour dénotation.

DÉFINITION 3.2. — Deux conditions p_1 et p_2 sont dites a-compatibles (noté $p_1 \mid p_2$) si pour chaque entier n elles ne décident pas $a(n)$ différemment. L'entier n est dit indifférent à la condition p (noté $n \mathrm{I} p$) si $n \notin \mathrm{dom}(p)$ et $(\forall q \leq p)$ $(n \notin \mathrm{dom}\, q \Rightarrow q \cup \{(n, 0)\} \mid q \cup \{(n, 1)\})$.

Soit p une condition, deux cas disjoints sont possibles :

$$(\exists q \leq p)\ (\forall r \leq q)\ \text{non}\ \exists n\, (n \mathrm{I} r) \tag{1}$$

ou

$$(\forall q \leq p)\ (\exists r \leq q)\ \exists n\, (n \mathrm{I} r). \tag{2}$$

Le théorème se déduit aisément des deux lemmes qui suivent :

LEMME 3.3. — *Si p vérifie* (1), *alors il existe* $q \leq p$ *et* H, *fonction injective de* **N** *dans* **N**, *tels que* Image (H) $= \mathbf{N} - \mathrm{dom}(q)$ *et pour tous* $n \in \mathbf{N}$, $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_{n-1} \in \{0, 1\}$, $q \cup \{(\mathrm{H}(0), \varepsilon_0), \ldots, (\mathrm{H}(n-1), \varepsilon_{n-1}), (\mathrm{H}(n), 0)\}$ et $q \cup \{(\mathrm{H}(0), \varepsilon_0), \ldots, (\mathrm{H}(n-1), \varepsilon_{n-1}), (\mathrm{H}(n), 1)\}$ *sont a-incompatibles.*

LEMME 3.4. — *Si p vérifie* (2) *alors il existe* $q \leq p$ *qui décide tous les* $a(n)$, $n \in \mathbf{N}$.

La preuve de ces deux lemmes se fait par une construction d'un J-arbre A et d'une application croissante de A dans C_J qui à s associe P_s dont le domaine est disjoint de l'image de s. Si H est une J-branche de A l'élément q cherché se définit avec la réunion des $\mathrm{P}_{\mathrm{H} \restriction n}$ qui est un élément de C_J car son domaine est disjoint de l'image de H.

Les deux constructions nécessaires aux deux lemmes se déduisent aisément des deux propositions suivantes :

PROPOSITION 3.5. — *Si* $p \in \mathrm{C}_\mathrm{J}$ *et si* $n, n_0, \ldots, n_{k-1}$ *sont des entiers distincts non dans le domaine de p, et si* $(\forall q \leq p)$ *non* $(n \mathrm{I} q)$ *alors, il existe* $q \leq p$ *dont le domaine ne contient pas* $n, n_0, \ldots, n_{k-1}$ *et tel que pour tous* $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_{k-1}$ *dans* $\{0, 1\}$, $q \cup \{(n_0, \varepsilon_0), \ldots, (n_{k-1}, \varepsilon_{k-1}), (n, 0)\}$ *et* $q \cup \{(n_0, \varepsilon_0), \ldots, (n_{k-1}, \varepsilon_{k-1}), (n, 1)\}$ *sont a-incompatibles.*

PROPOSITION 3.6. — *Si p vérifie* (2), *si* $m \in \mathbf{N}$ *et si* $n_0, \ldots, n_k$ *sont indifférents à p, alors* $\{n : (\exists r \leq p)\ [r$ *décide* $a(m)$ *et* $n_0, \ldots, n_k \notin \mathrm{dom}(r)$ *et* $n \mathrm{I} r]\} \notin \mathrm{J}$.

4. « FORCING » DE SILVER GÉNÉRALISÉ.

DÉFINITION 4.1. — J étant un idéal sur **N** de dual F, posons $\mathrm{C}^\mathrm{J} = \{p : p$ est une fonction à valeurs dans $\{0, 1\}$ dont le domaine est un ensemble d'entiers non dans F $\}$. On ordonne C^J par $p \leq q \Leftrightarrow p$ prolonge q.

Comme plus haut une partie G$\mathfrak{M}$-générique de C^J équivaut à un réel $g = \{(n, i) : \{(n, i)\} \in \mathrm{G}\}$ puisque G est l'ensemble des restrictions de g qui appartiennent à $\mathfrak{M}$. Un tel réel est dit J-générique Silver sur $\mathfrak{M}$.

THÉORÈME 4.2. — *Si* J *est un* T-*idéal, un* J-*générique Silver sur* $\mathfrak{M}$ *est minimal sur* $\mathfrak{M}$.

La preuve de ce théorème est identique à celle de 3.1.

Notons $\mathfrak{P}(\mathbf{N})/\mathrm{J}$ le quotient de l'algèbre des parties de **N** par l'idéal J. C'est un anneau de Boole, dont nous notons **O** l'élément nul.

PROPOSITION 4.3. — *Soit* J *un* T-*idéal, alors* $\mathfrak{P}(\mathbf{N})/\mathrm{J} - \{\mathbf{O}\}$ *satisfait la propriété des inf dénombrables. Une partie* $\mathfrak{M}$-*générique de* $\mathfrak{P}(\mathbf{N})/\mathrm{J} - \{\mathbf{O}\}$ *équivaut à un* T-*idéal maximal* J^* *contenant* J. *Si g est un réel* J^*-*générique Cohen sur* $\mathfrak{M}[\mathrm{J}^*]$, *g est aussi un réel* J-*générique Silver sur* $\mathfrak{M}$. *Inversement si g est un réel* J-*générique Silver sur* $\mathfrak{M}$, *l'ensemble* J^* *des domaines des éléments du* G *associé est un* T-*idéal maximal dans* $\mathfrak{M}[\mathrm{J}^*]$ *qui équivaut à une partie* $\mathfrak{M}$-*générique de* $\mathfrak{P}(\mathbf{N})/\mathrm{J} - \{\mathbf{O}\}$, *et g est un réel* J^*-*générique Cohen sur* $\mathfrak{M}[\mathrm{J}^*]$.

Remarque. — L'idéal des parties finies étant un T-idéal, on retrouve un théorème connu de Silver comme cas particulier de 4.2.

(*) Séance du 12 janvier 1970.

(1) D. D. BOOTH, *Countably indexed ultrafilters* (*Thesis*, Wisconsin, 1969).

(14, *avenue Cadiot,*
94-*Maisons-Alfort, Val-de-Marne.*)