Détermination projective

Yann Pequignot

Sous la direction de Jacques Duparc
Avec l'assistance de Raphaël Carroy

Section de Mathématiques | Projet de Master - Master Thesis
Printemps 2010

École Polytechnique Fédérale de Lausanne

Résumé

Donald A. Martin, John R. Steel et W. Hugh Woodin ont reçu en 1988 le prix Karp de l'ASL (Association for Symbolic Logic) pour les articles intitulés *A Proof of Projective Determinacy* ([MS89]) et *Supercompact cardinals, sets of reals, and weakly homogeneous trees* ([Woo88]). Martin et Steel montrent que l'existence de n cardinaux de Woodin avec un cardinal mesurable au-dessus d'eux implique la détermination de la classe projective $\mathbf{\Pi}^1_{n+1}$. Ce projet de Master est une étude de ce résultat.

Abstract

Donald A. Martin, John R. Steel and W. Hugh Woodin received in 1988 the Karp prize of the ASL (Association for Symbolic Logic) for the articles entitled *A Proof of Projective Determinacy* ([MS89]) and *Supercompact cardinals, sets of reals, and weakly homogeneous trees* ([Woo88]). Martin and Steel showed that the existence of n Woodin cardinals with a measurable cardinal above them implies the determinacy of the projective class $\mathbf{\Pi}^1_{n+1}$. This Master Thesis is a study of this result.

Remerciements

Je souhaite remercier le Pr. Jacques Duparc pour m'avoir accordé sa confiance et m'avoir offert le cadre nécessaire à ce travail. J'adresse ma reconnaissance à Raphaël Carroy pour l'intérêt et le sérieux avec lequel il a suivi et relu mon travail. Je veux aussi saluer ici mes compagnons d'études Kevin Fournier, Alexandre Granchamp, et Mathias Rime, car leur amitié et leur passion pour les mathématiques m'ont été d'un grand soutien. Ma pensée va aussi à Alessandro Facchini qui m'a suivi de façon éclairée lors de mes projets de semestre en logique.

Sur un plan plus personnel, je souhaite adresser une pensée toute particulière à ma Maman qui m'a transmis le goût pour la compréhension avec la foi en la possibilité de trouver des réponses. Ma reconnaissance va également à ma compagne, Sarah, pour la bonne humeur et le soutien sincère qu'elle a su m'apporter.

« L'homme, monotone monde,
Croit agrandir son empire
Et de ses fiévreuses mains
Ne sortent jamais que des bornes. »

Giuseppe Ungaretti

« Though we may never see precisely how the protean dancing stuff of everything endlessly becomes itself, we have no choice, being human and full of desire, but to go on perpetually seeking clarity of vision. The ultimate form within form, the final shape of change, may elude us. The pursuit of the idea of form—even the form of force, of endlessly interacting process—is man's inevitable, crucial need. »

John Unterecker

Avant-propos

J'ai toujours été fasciné par les développements de la connaissance dont la portée mettait en perspective notre savoir. Arrivant au terme des mes études universitaires en mathématiques, mon attention était portée sur l'activité mathématique et philosophique que le constat de l'incomplétude de la théorie des ensembles avait motivé. Je voulais comprendre quelles attitudes avait été adoptées et quels outils avaient été imaginés. Avec l'idée que les indices se trouvaient dans les mathématiques de ce domaine elles-mêmes, j'ai étudié l'article *A Proof of Projective Determinacy* de Martin et Steel paru en 1989.

Les notions de base en théorie des ensembles se trouvent dans [Jec03] et [Kun80]. Partant de mes connaissances, j'ai cherché dans un premier temps à acquérir les notions supposées connues dans [MS89]. Le premier chapitre et les deux premières sections du deuxième chapitre contiennent ces concepts et les démonstrations nécessaires qui s'y rapportent. Le chapitre 1 porte sur la notion de mesurabilité et le début du chapitre 2 sur les notions d'interprétation relative, d'injection élémentaire et d'ultrapuissance de l'univers.

J'ai ensuite entrepris de comprendre l'article en question. La troisième et dernière section du deuxième chapitre porte sur l'exposition générale du type central de construction d'interprétations relatives utilisé : les systèmes inductifs d'ultrafiltres et les limites directes d'ultrapuissances qui s'y rapportent.

Le chapitre 3 est, au niveau conceptuel, certainement le plus important de ce travail. Suivant Martin et Steel, j'expose les notions d'ensemble Souslin, d'arbre homogène et d'ensemble homogènement Souslin. La deuxième section établit la base de la preuve par induction : en présence d'un cardinal mesurable, les ensembles co-analytiques sont homogènement Souslin. La deuxième section contient le cœur du lien entre les hypothèses de grand cardinal et la détermination : un ensemble homogènement Souslin est déterminé. La dernière section de ce chapitre assure que le projet d'induction est fondé : le complémentaire de la projection d'un ensemble homogènement Souslin est Souslin. Le théorème principal de Martin et Steel assure le pas d'induction. Il dit que sous certaines hypothèses, le complémentaire de la projection d'un ensemble homogènement Souslin est homogènement Souslin.

Les chapitres 4 et 5 contiennent les développements techniques nécessaires à la réalisation du pas d'induction. Le premier porte sur les extenseurs, le deuxième sur les arbres d'itérations.

Dans le chapitre 6, j'expose l'hypothèse de grand cardinal sur laquelle repose la preuve de Martin et Steel. La notion de cardinal de Woodin est définie et différentes caractérisations équivalentes sont établies. Les lemmes techniques permettant les construction souhaitées en présence d'un tel cardinal sont démontrés.

Le chapitre 7 voit s'établir l'assemblage des notions des chapitres précédents pour donner la démonstration du résultat souhaité. Un théorème, qui selon les auteurs Martin et Steel contient toutes les idées nécessaires à la preuve du théorème principal, est démontré. Le théorème principal est ensuite énoncé et la démonstration du corollaire qui s'impose est donnée.

L'annexe A expose rapidement les notions et résultats qui forment le paysage mathématique de l'article de Martin et Steel. L'annexe B porte sur une énumération des suites finies dont il est usage au chapitre 3.

En cherchant à m'approprier le résultat de Martin et Steel, j'espère avoir nullement porté préjudice à leur remarquable travail. J'endosse humblement l'entière responsabilité des éventuelles erreurs qui auraient échappé à mon souci de justesse. Je tiens par ailleurs à préciser que je ne clame aucune valeur scientifique, au sens strict, au sujet des notes de début de chapitre en police sans sérif.

Table des matières

Notations

$\mathscr{P}(E)$	les parties de E, l'ensemble des sous-ensembles de l'ensemble E
$\emptyset$	l'ensemble vide
ω	l'ensemble des naturels $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{Q}$	l'ensembles des nombres rationnels
$\alpha, \beta, \gamma, \xi$	représentent des ordinaux
κ, λ	représentent des cardinaux
${}^{E}F$	l'ensemble des fonctions de E vers F
ZFC	théorie axiomatique des ensembles de Zermelo et Fraenkel avec l'axiome du choix
$f"E$	l'ensemble des images par f des éléments de E
α^{+}	cardinal successeur d'un ordinal α
κ^{λ}	exponentiation cardinale
${}^{<\omega}E$	l'ensemble des suites finies d'éléments de E
$\mathrm{long}(s)$, $s \in {}^{<\omega}E$	la longueur de la suite s, i.e. la cardinalité de son domaine.
$s^\frown t$	la suite résultant de la concaténation de s avec t
$f \restriction E$	la restriction de la fonction f au sous-ensemble E de son domaine.
$E - F$	le complémentaire de F dans E, $\{x \in E \mid x \notin F\}$
$\triangle_{\alpha<\lambda} f(\alpha)$	intersection diagonale de f
${}^{n}[E]$	l'ensemble des sous-ensembles de E de cardinalité n
${}^{<\omega}[E]$	l'ensemble des sous-ensembles de cardinalité finie de l'ensemble E
$\lvert E\rvert$	le cardinal de l'ensemble E
$\phi^{\boldsymbol{M},\boldsymbol{E}}$	relativisée de la formule ϕ à l'interprétation relative $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{E})$
$\boldsymbol{ON}$	la classe des ordinaux
$s \subseteq t$, $s, t \in {}^{<\omega}X$	t prolonge s, dans le sens où $\exists n \leq \mathrm{long}(t)(s = t \restriction n)$
$s \subsetneq t$, $s, t \in {}^{<\omega}X$	t étend proprement s, i.e. $s \subseteq t$ et $s \neq t$
$\mathrm{Im}(f)$	l'ensemble des images par f des éléments de son domaine
V	l'univers, i.e. la classe définie par la formule $x = x$.
c_x^a	la fonction constante égale à x définie sur ${}^{a}V_{\kappa}$
id_E	la fonction identité sur l'ensemble E
σ_{rq}, $r, q \in {}^{<\omega}X$	la permutation de $\mathrm{long}(q^\frown r)$ qui réalise $(q^\frown r) \circ \sigma_{rq} = r^\frown q$.

Chapitre 1

Mesurabilité

Sur la pointe d'une herbe
devant l'infini du ciel
une fourmi

Ozaki Hôsai

Rien n'est grand en soi. Le propre d'un objet grand est d'imposer la petitesse aux autres objets qui l'entourent. Pour concevoir un objet plus grand que tous les autres, il suffit de se donner une mesure nouvelle qui assure de façon ad hoc la suprématie de cet objet sur les autres objets existants.

1.1 Le problème de la mesure

Le problème de la mesure est exposé pour la première fois par Lebesgue en 1902. Il pose la question suivante : Existe-t-il une fonction m qui associe à chaque ensemble borné de nombres réels X un nombre réel positif ou nul $m(X)$ de telle sorte que les conditions suivantes soient vérifiées :

a) m n'est pas identiquement nulle ;

b) m est invariante par translation, i.e. pour tout ensemble borné de nombre réels X et tout nombre réel r :

$$m(X) = m(\{x + r \mid x \in X\});$$

c) m est σ-additive, i.e. pour toute famille dénombrable $\langle X_n \mid n \in \omega \rangle$, si chaque X_n est un ensemble borné de nombres réels, si les X_n sont disjoints deux à deux et si $\bigcup_{n\in\omega} X_n$ est un ensemble borné de nombre réels, alors

$$m\Big(\bigcup_{n\in\omega} X_n\Big) = \sum_{n\in\omega} m(X_n).$$

Remarquons que la σ-additivité implique en particulier que pour tous ensembles bornés de nombre réels A et B,

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B).$$

Par conséquent, une solution m du problème de la mesure est **monotone** dans le sens où, pour tous ensembles bornés de nombres réels A et B, si $A \subseteq B$, alors $m(A) \leq m(B)$.

L'existence d'une solution du problème de la mesure dépend évidemment de ce qu'on entend par un ensemble de nombres réels. En 1907, Giuseppe Vitali construit, à l'aide de l'axiome du choix, un ensemble borné de nombres réels non mesurable pour la mesure de Lebesgue. Cette construction permet de montrer de façon générale qu'en présence de l'axiome du choix, il n'existe pas de fonction satisfaisant le problème de la mesure.

Théorème 1.1.1 (Giuseppe Vitali). *Sous l'hypothèse de l'axiome du choix, il n'existe pas de fonction satisfaisant le problème de la mesure.*

Démonstration. Supposons l'existence d'une fonction m satisfaisant les conditions a),b) et c) ci-dessus. Considérons sur les nombres réels la relation d'équivalence suivante $x \sim y$ si et seulement si $x - y$ est rationnel. Il y a égalité entre l'intersection de la classe d'équivalence d'un nombre réel x avec l'intervalle $[0,1]$ et l'ensemble $\{x + r \in [0,1] \mid r \text{ est rationnel}\}$. Par l'axiome du choix, il existe un ensemble $\mathscr{V}$ contenant exactement un élément de l'intersection de chacune des classes d'équivalence avec l'intervalle $[0,1]$. On appelle cet ensemble l'ensemble de Vitali. Comme par définition $\mathscr{V} \subseteq [0,1]$, $\mathscr{V}$ est un ensemble borné de nombres réels. Pour chaque nombre rationnel $r \in [-1,1]$, notons $\mathscr{V} + r = \{v + r \mid v \in \mathscr{V}\}$ la translation par r de l'ensemble de Vitali. Observons que pour deux rationnels $r, s \in [-1,1]$ distincts, $(\mathscr{V} + r) \cap (\mathscr{V} + s) = \emptyset$. En effet, si $c \in (\mathscr{V} + r) \cap (\mathscr{V} + s)$, alors il existe $v_1, v_2 \in \mathscr{V}$ tels que $v_1 - v_2 = s - r$, alors $v_1 \sim v_2$ et par définition de $\mathscr{V}$, nécessairement $v_1 = v_2$ et donc $r = s$. Nous considérons alors l'ensemble suivant :

$$X = \bigcup_{r \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} \mathscr{V} + r.$$

D'une part $[0,1] \subseteq X$ et d'autre part $X \subseteq [-1,2]$. Il s'ensuit par monotonie de m que

$$m([0,1]) \leq m(X) \leq m([-1,2]).$$

Or par c), $m(X) = \sum_{r \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} m(\mathscr{V} + r)$ et par b), nous avons $m(\mathscr{V} + r) = m(\mathscr{V})$ pour tout rationnel $r \in [-1,1]$. Ainsi, il n'est pas possible que $m(\mathscr{V})$ soit strictement positif puisque alors $m([-1,2])$ serait infini. Or, le fait que $m(\mathscr{V})$ soit nul implique que $m([0,1]) = 0$ et ceci contredit a). Pour voir ceci, commençons par remarquer que la monotonie de m implique que tout sous-ensemble de $[0,1]$ aurait une mesure nulle. Observer de plus que les valeurs de m sur les parties de $[0,1]$ déterminent m par les conditions b) et c), car tout sous-ensemble borné de nombre réels s'écrit comme une union finie de translatés de parties de $[0,1]$. Il ne saurait donc exister une telle fonction. $\square$

Deux remarques s'imposent. Comme indiqué dans la preuve du théorème précédent, une solution du problème de la mesure est déterminée par ses valeurs sur les sous-ensembles de l'intervalle unité $[0,1]$. Il s'ensuit que le problème de la mesure se rapporte à l'existence d'une fonction définie sur $\mathscr{P}([0,1])$ vérifiant les conditions a),b) et c). Ensuite, notons que l'intégralité des conditions a),b) et c) est nécessaire pour obtenir le résultat précédent à l'aide de l'axiome du choix.

À la lumière de ces remarques, Banach propose une formulation plus générale du problème de la mesure qui consiste à remplacer la condition b) par la condition $m(\{x\}) = 0$ pour tout x. C'est une condition nécessaire minimale pour écarter les solutions triviales de la forme $m(X)$ vaut 1 si $x \in X$ et 0 sinon, pour un élément distingué x. Banach réalise que le remplacement de b) par sa condition faisait disparaître toutes considérations géométriques du problème, de sorte que l'intervalle unité $[0,1]$ peut être remplacé par un ensemble abstrait quelconque S. De plus, si m est une fonction σ-additive, non identiquement nulle, à valeur réelle positive ou nulle sur $\mathscr{P}(S)$, alors nécessairement $m(S) > 0$ et il nous est possible de la normaliser. Ainsi, le problème de la mesure de Banach peut donc aussi bien s'énoncer comme suit : Existe-t-il un ensemble non vide S et une fonction $m : \mathscr{P}(S) \to [0,1]$ de sorte que les propriétés suivantes soient vérifiées :

i) $m(S)$=1 ;

ii) $m(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in S$;

iii) m est σ-additive, i.e. pour toute collection $\{X_n \mid n \in \omega\} \subseteq S$ de sous-ensembles de S disjoints deux à deux :

$$m\Big(\bigcup_{n\in\omega} X_n\Big) = \sum_{n\in\omega} m(X_n).$$

Nous appelons une telle fonction une **mesure sur** S.

Nous rappelons un résultat classique de la théorie de la mesure. Pour toute suite $\langle X_n \mid n \in \omega\rangle$ de sous-ensembles de S descendante pour l'inclusion, i.e. $X_n \supseteq X_{n+1}$ pour tout $n \in \omega$, nous avons $m(\bigcap_{n\in\omega} X_n) = \lim_{n\to\infty} m(X_n)$.

Le lemme suivant énonce une propriété simple mais importante des mesures que nous allons utiliser de façon répétée par la suite.

Lemme 1.1.2. *Soit m une mesure sur un ensemble S. Toute famille $T \subseteq \mathscr{P}(S)$ d'ensembles disjoints deux à deux ne contient qu'un nombre dénombrable d'ensemble de mesure non nulle.*

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il existe une famille non dénombrable $T \subseteq \mathscr{P}(S)$ d'ensembles de mesure strictement positive, deux à deux disjoints. Il existe alors $N \in \omega$, $N > 0$ tel que $T_N = \{X \in T \mid m(X) > \frac{1}{N}\}$ est non dénombrable. Ceci découle du fait qu'une union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable par l'axiome du choix dénombrable et du fait que $T = \bigcup_{n>0} T_n$. Ainsi, il existe $X_1, \ldots, X_N \in T_N$ distincts qui vérifient par σ-additivité de m

$$m\big(\bigcup_{k=1}^{N} X_k\big) = \sum_{k=1}^{N} m(X_k) > 1.$$

Ceci contredit, par monotonie de m, le fait que $m(S) = 1$. □

Banach remarque également que seule la cardinalité de l'ensemble S a une importance dans son problème de la mesure et qu'il est donc possible de généraliser la propriété iii) de la façon suivante.

Définition 1.1.3. Soit m une mesure sur un ensemble S. Pour un cardinal λ, la mesure m est dite λ-**additive** si pour tout ordinal $\gamma < \lambda$ et toute collection de sous-ensembles disjoints deux à deux $\{X_\alpha \mid \alpha < \gamma\} \subseteq S$,

$$m\Big(\bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha\Big) = \sum_{\alpha<\gamma} m(X_\alpha),$$

où une somme transfinie de réels est définie comme le supremum des sommes de sous-collections finies, i.e.

$$\sum_{\alpha<\gamma} m(X_\alpha) = \sup\Big\{\sum_{k=1}^{n} m(X_{f(k)}) \mid n \in \omega \text{ et } f \in {}^n\gamma\Big\}.$$

Remarquons que la σ-additivité équivaut à la $\aleph_1$-additivité.

Lemme 1.1.4. *Si κ est le plus petit cardinal tel qu'il existe une mesure sur κ, alors toute mesure sur κ est κ-additive.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que, premièrement, κ est le plus petit cardinal à admettre une mesure et, deuxièmement, qu'il existe une mesure m sur κ qui ne soit pas κ-additive. Il existe alors $\gamma < \kappa$ et une collection $\{X_\alpha \mid \alpha < \gamma\} \subseteq \kappa$ de sous-ensembles de κ disjoints deux à deux tels que $m\big(\bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha\big) \neq \sum_{\alpha<\gamma} m(X_\alpha)$. Comme m est $\aleph_1$-additive par définition, nécessairement $\gamma \geq \aleph_1$. De plus, seul un nombre dénombrable des X_α sont de mesure non nulle par le Lemme 1.1.2. Ainsi par $\aleph_1$-additivité de m, nous avons :

$$\begin{aligned}0 &= \sum_{\alpha<\gamma} m(X_\alpha) - \sum_{\substack{\beta \text{ tel que} \\ m(X_\beta)>0}} m(X_\beta) = \sum_{\alpha<\gamma} m(X_\alpha) - m\Big(\bigcup_{\substack{\beta \text{ tel que} \\ m(X_\beta)>0}} X_\beta\Big) \\ &\neq m\Big(\bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha\Big) - m\Big(\bigcup_{\substack{\beta \text{ tel que} \\ m(X_\beta)>0}} X_\beta\Big) = m\Big(\bigcup_{\substack{\alpha \text{ tel que} \\ m(X_\alpha)=0}} X_\alpha\Big).\end{aligned}$$

Ainsi, pour le cardinal $\lambda = |\gamma|$, qui vérifie $\aleph_1 \leq \lambda < \kappa$, nous avons une collection $\{X_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ de sous-ensembles disjoints deux à deux de κ vérifiant d'une part $m(X_\alpha) = 0$ pour tout $\alpha < \lambda$ et d'autre part, $m(\bigcup_{\alpha<\lambda} X_\alpha) > 0$. Notons $r = m(\bigcup_{\alpha<\lambda} X_\alpha)$ et définissons une mesure $\overline{m}$ sur λ par

$$\overline{m}(X) = \frac{m\big(\bigcup_{\alpha\in X} X_\alpha\big)}{r},$$

pour tout $X \subseteq \lambda$. En effet, nous avons $\overline{m}(\lambda) = \frac{r}{r} = 1$, $\overline{m}(\{\alpha\}) = \frac{m(X_\alpha)}{r} = 0$ pour tout $\alpha < \lambda$ et la $\aleph_1$-additivité de $\overline{m}$ découle de de cette même propriété possédée par m. Par conséquent, $\overline{m}$ contredit la minimalité de m. □

Nous faisons donc la définition suivante. Un cardinal κ tel que $\kappa > \omega$ est dit **mesurable à valeurs réelles** s'il existe une mesure κ-additive sur κ.

Observons que si m est une mesure κ-additive sur $\kappa > \omega$, alors pour tout sous-ensemble $X \subseteq \kappa$ tel que $|X| < \kappa$,

$$m(X) = m\Big(\bigcup_{x\in X}\{x\}\Big) = \sum_{x\in X} m(\{x\}) = 0.$$

En particulier, $m(\beta) = 0$ pour tout $\beta < \kappa$. Il s'ensuit qu'un cardinal mesurable à valeurs réelles est régulier. En effet, si $\alpha < \kappa$, m est une mesure κ-additive sur κ et $f \in {}^{\alpha}\kappa$, alors $\big|f[\alpha]\big| \leq \alpha < \kappa$ et donc

$$m(\sup f[\alpha]) = m\Big(\bigcup f[\alpha]\Big) = \sum_{\beta\in f[\alpha]} m(\beta) = 0.$$

Il est démontrable dans ZFC qu'un cardinal mesurable à valeurs réelles est faiblement inaccessible (voir [Kan94], p.24). De plus s'il existe un cardinal faiblement inaccessible κ, alors $L_\kappa \models$ ZFC. L'existence d'un cardinal mesurable à valeur réelles n'est donc pas prouvable dans ZFC.

1.2 La distinction d'Ulam

Au sujet des mesures, Ulam a observé la dichotomie importante suivante. Pour une mesure m sur κ,

i) $A \subseteq \kappa$ est un **atome pour** m si $m(A) > 0$ et pour tout $B \subseteq A$,

$$m(B) = 0 \text{ ou } m(B) = m(A);$$

ii) m est **sans atome** s'il n'existe pas d'atome pour m.

L'importance de cette distinction a été illustrée par Ulam, notamment par le théorème suivant.

Théorème 1.2.1 (Ulam). *Si m est une mesure κ-additive sans atome sur un cardinal κ, alors $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$.*

Lemme 1.2.2. *Soit m une mesure κ-additive sans atome sur un cardinal κ, alors*

1) Pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$ et tout $X \subseteq \kappa$ tel que $m(X) > 0$, il existe $Y \subseteq X$ tel que $0 < m(Y) < \varepsilon$;

2) Pour tout $X \subseteq \kappa$, il existe $Y \subseteq \kappa$ tel que $m(Y) = \frac{1}{2}m(X)$.

Démonstration. 1). Soit $X \subseteq \kappa$ tel que $m(X) > 0$. Nous définissons par récurrence sur $n \in \omega$ une suite $\{X_n \mid n \in \omega\} \subseteq \kappa$ telle que $X_0 = X$ et $0 < m(X_{n+1}) \leq \frac{1}{2}m(X_n)$ pour tout $n \in \omega$. Pour cela, remarquons que si $Y \subseteq \kappa$ vérifie $m(Y) > 0$, alors comme m est sans atomes il existe $A \subseteq Y$ tel que $0 < m(A) < m(Y)$. Nous avons de plus $m(A) + m(Y - A) = m(Y)$, ainsi on peut choisir entre $B = A$ ou $B = Y - A$ de sorte que $0 < m(B) \leq \frac{1}{2}m(Y)$. Prenant alors $n \in \omega$ tel que $\frac{1}{2^n}m(X) < \varepsilon$, X_{n+1} satisfait l'énoncé.

2). Soit $X \subseteq \kappa$ tel que $m(X) > 0$. Par récurrence transfinie, nous définissons une suite $\{X_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ telle que $X_\alpha \supseteq X_\beta$ pour tout $\alpha < \beta$ et vérifiant $m(X_\alpha) \geq \frac{1}{2}m(X)$

ou $X_\alpha = \emptyset$. Nous posons $X_0 = X$. Pour $\alpha < \omega_1$, si $m(X_\alpha) \leq \frac{1}{2}m(X)$ alors nous posons $X_{\alpha+1} = \emptyset$ et si $m(X_\alpha) > \frac{1}{2}m(X)$ nous choisissons $X_{\alpha+1} \subseteq X_\alpha$ tel que $m(X_\alpha) > m(X_{\alpha+1}) > \frac{1}{2}m(X)$. Ce choix est possible par *1)* qui nous assure qu'il existe $Y \subseteq X_\alpha$ tel que

$$0 < m(Y) < m(X_\alpha) - \frac{1}{2}m(X).$$

Ainsi, en posant $X_{\alpha+1} = X_\alpha - Y$, nous avons bien

$$m(X_\alpha) = m(Y) + m(X_{\alpha+1}) > m(X_{\alpha+1}) = m(X_\alpha) - m(Y) > \frac{1}{2}m(X).$$

Si $\beta < \omega_1$ est limite, alors nous posons $X_\beta = \bigcap_{\alpha<\beta} X_\alpha$. Si pour tout $\alpha < \beta$, $X_\alpha \neq \emptyset$, nous avons

$$m(X_\alpha) > m(X_\beta) \geq \frac{1}{2}m(X).$$

Maintenant, il existe $\alpha < \omega_1$ tel que $m(X_\alpha) = \frac{1}{2}m(X)$ sinon la collection $\{X_\alpha - X_{\alpha+1} \mid \alpha < \omega_1\}$ contredirait le Lemme 1.1.2. □

Preuve de 1.2.1. Nous montrons que m ne peut pas être $(2^{\aleph_0})^+$-additive et que donc nécessairement $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$.

Nous considérons sur ${}^{<\omega}\omega$ le bon ordre donné par

$$s < t \text{ si et seulement si } \begin{cases} \text{long}(s) < \text{long}(t), \text{ ou} \\ \text{long}(s) = \text{long}(t) \text{ et } s <_{lex} t, \end{cases}$$

où $<_{lex}$ est l'ordre lexicographique. Pour chaque $s \in {}^{<\omega}\omega$, nous définissons par induction sur ce bon ordre à l'aide du Lemme 1.2.2, un sous-ensemble $X_s \subseteq \kappa$ de sorte que

1) $m(X_s) = m\left(\bigcup_{n\in\omega} X_{s^\frown(n)}\right)$;
2) $X_{s^\frown(n)} \cap X_{s^\frown(m)} = \emptyset$ pour tous $m, n \in \omega$ distincts;
3) $m(X_{s^\frown(n)}) = 2^{-(n+1)}m(X_s)$ pour tout $n \in \omega$.

Posons $X_\emptyset = \kappa$. Pour $t > \emptyset$, remarquons que t s'écrit $s^\frown(n)$ pour $n \in \omega$ et $s < t$. Si $n = 0$, nous appliquons le Lemme 1.2.2 pour choisir $X_{s^\frown(0)}$ tel que $X_{s^\frown(0)} \subseteq X_s$ et $m(X_{s^\frown(0)}) = \frac{1}{2}m(X_s)$. Si $n > 0$, nous appliquons également le Lemme 1.2.2 pour choisir $X_{s^\frown(n)}$ tel que

$$X_{s^\frown(n)} \subseteq X_s - \bigcup_{k<n} X_{s^\frown(k)} \quad \text{et} \quad m(X_{s^\frown(n)}) = \frac{1}{2}m\Big(X_s - \bigcup_{k<n} X_{s^\frown(k)}\Big).$$

Pour tout $s \in {}^{<\omega}\omega$, les éléments de la collection $\{X_{s^\frown(n)} \mid n \in \omega\}$ sont disjoints deux à deux et ils vérifient $m(X_{s^\frown(n)}) = 2^{-(n+1)}m(X_s)$ et donc

$$m\Big(\bigcup_{n\in\omega} X_{s^\frown(n)}\Big) = m(X_s).$$

Notons N_s l'ensemble de mesure nulle $X_s - \bigcup_{n\in\omega} X_{s^\frown(n)}$.

Pour chaque $f \in {}^{\omega}\omega$, nous définissons alors $X_f = \bigcap_{n\in\omega} X_{f\restriction n}$. Nous avons

$$m(X_f) = \lim_{n\to\infty} m(X_{f\restriction n}) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} 2^{-f(k)+1} \leq \lim_{n\to\infty} 2^{-n} = 0.$$

Donc chaque X_f est de mesure nulle. Par ailleurs, nous avons partitionné κ de la façon suivante :

$$\kappa = \Big(\bigcup_{f\in{}^{\omega}\omega} X_f\Big) \cup \Big(\bigcup_{s\in{}^{<\omega}\omega} N_s\Big).$$

Nous avons donc écrit κ comme l'union d'une famille de cardinalité $2^{\aleph_0}$ d'ensembles de mesure nulle, disjoints deux à deux. Il s'ensuit que m n'est pas $(2^{\aleph_0})^+$-additive, comme annoncé. □

Par ailleurs, les mesures qui possèdent un atome ont la propriété suivante. Supposons que κ possède une mesure κ-additive avec un atome $A \subseteq \kappa$. Alors nous pouvons définir une autre mesure μ sur κ par

$$\mu(X) = \frac{m(X\cap A)}{m(A)},$$

pour tout $X \subseteq \kappa$. Cette mesure est κ-additive et prend ses valeurs dans $\{0,1\}$. Une telle mesure est avantageusement représentée comme l'ultrafiltre :

$$U_\mu = \{X \subseteq \kappa \mid \mu(X) = 1\}$$

Nous rappelons la définition d'un ultrafiltre.

Définition 1.2.3. Un **ultrafiltre** sur un ensemble S est un ensemble $U \subseteq \mathscr{P}(S)$ vérifiant les propriétés suivantes

i) $S \in U$ et $\emptyset \notin U$;

ii) Pour tout $X \in U$ et pour tout $Y \subseteq S$, $X \subseteq Y$ implique $Y \in U$;

iii) Pour tous $X, Y \in U$, $X \cap Y \in U$;

iv) Pour tout $X \subseteq X$, $X \in U$ ou $S - X \in U$.

Un ultrafiltre U sur S est dit **non principal** s'il vérifie de plus

v) pour tout $x \in S$, $\{x\} \notin U$.

Dans le cas où S est un cardinal κ, nous adoptons la convention suivante

vi) Pour tout ordinal $\alpha < \kappa$, le segment final $\kappa - \alpha = \{\beta \in \kappa \mid \beta \geq \alpha\} \in U$.

Un ultrafiltre U sur S est dit λ-**complet** pour un cardinal λ si pour tout $\gamma < \lambda$ et toute famille $\{X_\alpha \mid \alpha < \gamma\} \subseteq U$, $\bigcap_{\alpha<\gamma} X_\alpha \in U$.

Le point vi) de la définition précédente est une convention que nous prenons du fait du lien étroit entre la notion d'ultrafiltre et celle de mesure avec atome. En effet, pour l'ultrafiltre U_μ définit ci-dessus, la κ-additivité de μ entraîne que $\mu(\alpha) = \mu(\bigcup_{\beta<\alpha}\{\beta\}) = 0$. Or $1 = \mu(\kappa) = \mu(\alpha)+\mu(\kappa-\alpha)$ et donc $\mu(\kappa-\alpha) = 1$ et $\kappa-\alpha \in U_\mu$. Le point ii) de la définition est vérifié par U_μ du fait de la monotonie de la mesure μ. Le point iv) découle, quant à lui, du fait que pour tout $X \subseteq \kappa$, $1 = \mu(X) + \mu(\kappa - X)$. En outre, l'ultrafiltre U_μ issu de la mesure μ est non principal, car la propriété ii) d'une mesure nous assure que $\mu(\{\alpha\}) = 0$ pour tout $\alpha \in \kappa$.

Par ailleurs, la λ-complétude d'un ultrafiltre possède une caractérisation duale.

Lemme 1.2.4. *Un ultrafiltre U sur S est λ-complet si et seulement si pour tout $\gamma < \lambda$ et toute famille $\{X_\alpha \mid \alpha < \gamma\} \subseteq S$, si $\bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha \in U$, alors il existe $\alpha < \gamma$ tel que $X_\alpha \in U$.*

Démonstration. Par contraposition, supposons qu'il existe $\gamma < \lambda$ et $\{X_\alpha \mid \alpha < \gamma\} \subseteq S$ tel que $\bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha \in U$ mais que pour tout $\alpha < \gamma$, $X_\alpha \notin U$. Ainsi $S - X_\alpha \in U$ pour tout α et

$$S - \bigcap_{\alpha<\gamma}(S - X_\alpha) = \bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha \in U.$$

Donc $\bigcap_{\alpha<\gamma}(S - X_\alpha) \notin U$ et donc U n'est pas λ-complet.

Réciproquement, par contraposition également, supposons qu'il existe $\gamma < \lambda$ et $\{X_\alpha \mid \alpha < \gamma\} \subseteq U$ tel que $\bigcap_{\alpha<\gamma} X_\alpha \notin U$. Dans ce cas, $\bigcup_{\alpha<\gamma}(S - X_\alpha) = S - \bigcap_{\alpha<\gamma} X_\alpha \in U$, alors que $S - X_\alpha \notin U$ pour tout $\alpha < \gamma$. □

Ainsi, si U est un ultrafiltre non principal et κ-complet sur un cardinal κ, alors la condition vi) est automatiquement vérifiée.

Par ailleurs, la κ-additivité de μ implique la κ-complétude de U_μ. En effet, soient $\gamma < \kappa$ et une famille $\{X_\alpha \mid \alpha < \gamma\} \subseteq \kappa$ telle que $\bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha \in U_\mu$. Alors si $X_\alpha \notin U_\mu$ pour tout α, i.e. $\mu(X_\alpha) = 0$ la κ-additivité de μ implique que $\mu\big(\bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha\big) \leq \sum_{\alpha<\gamma} \mu(X_\alpha) = 0$, contredisant le fait que $\bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha \in U_\mu$.

Notons également qu'un ultrafiltre non principal induit une mesure à valeur dans $\{0,1\}$ de façon évidente. La κ-complétude implique alors la κ-additivité de la mesure induite.

Ces considérations sur l'ultrafiltre κ-complet associé à une mesure κ-additive avec atome sur un cardinal κ nous mènent à la définition du concept le plus important de la théorie des grands cardinaux.

Définition 1.2.5. Un cardinal $\kappa > \omega$ est **mesurable** s'il existe un ultrafiltre κ-complet non principal sur κ.

Cette notion est une généralisation directe de l'existence d'ultrafiltres sur ω qui sont bien sûr ω-complets. La propriété de clôture par intersection finie est trivialement préservée lorsque l'on considère l'union d'une chaîne de filtres pour l'inclusion. Ainsi, en considérant le filtre C des sous-ensembles cofinis de ω, i.e. ceux dont le complémentaire est fini, et l'ensemble des filtres contenant C, l'existence d'un ultrafiltre non principal sur ω découle du Lemme de Zorn. Cependant, la κ-complétude pour $\kappa > \omega$ n'est pas préservée de la même façon, de sorte que l'existence de cardinal mesurable doit être explicitement formulée. C'est ce que démontre le théorème suivant.

Théorème 1.2.6 (Ulam et Tarski)**.** *Un cardinal mesurable est fortement inaccessible.*

Démonstration. Soit U un ultrafiltre κ-complet sur un cardinal $\kappa > \omega$. En tant que cardinal mesurable à valeurs réelles, κ est régulier comme nous l'avons déjà remarqué. Supposons par l'absurde que pour un cardinal $\lambda < \kappa$, nous avons une fonction injective $f : \kappa \to {}^\lambda 2$. Remarquons que pour tout $\alpha < \lambda$, il existe $i_\alpha \in \{0,1\}$ tel que $X_\alpha = \{\xi \in \kappa \mid f(\xi)(\alpha) = i_\alpha\} \in U$. Par κ-complétude de U, nous avons $X = \bigcap_{\alpha<\lambda} X_\alpha \in U$. Cependant, si $\eta, \xi \in X$, alors pour tout $\alpha \in \lambda$, $f(\xi)(\alpha) = i_\alpha =$

$f(\eta)(\alpha)$, i.e. $f(\xi) = f(\eta)$, et donc $\xi = \eta$ par injectivité de f. Cela implique $|X| \leq 1$, contredisant le fait que $X \in U$. $\square$

Rappelons que pour κ fortement inaccessible, V_κ satisfait ZFC.

Par analogie avec la théorie de la mesure, si U est un ultrafiltre sur un cardinal κ, nous dirons qu'une propriété $\phi(x)$ est vérifiée (U-)**presque partout** si $\{\alpha < \kappa \mid \phi(\alpha)\} \in U$.

1.3 Ultrafiltres normaux

Définition 1.3.1. Un ultrafiltre U sur un cardinal λ est **normal** si pour tout $f \in {}^\lambda U$, l'**intersection diagonale** de f appartient à U, i.e.

$$\mathop{\triangle}_{\alpha<\lambda} f(\alpha) = \{\xi < \lambda \mid \xi \in \bigcap_{\alpha<\xi} f(\alpha)\} \in U.$$

Par convention, $0 \notin \triangle_{\alpha<\lambda} f(\alpha)$ quelque soit $f \in {}^\lambda U$.

Remarquons qu'un ultrafiltre normal U sur λ est λ-complet. En effet, pour $f \in {}^\gamma U$ pour $\gamma < \lambda$, considérons $\overline{f} \in {}^\lambda U$ définie par $\overline{f}(\alpha) = f(\alpha)$ pour $\alpha < \gamma$, et $\overline{f}(\alpha) = \lambda$ si $\gamma \leq \alpha < \lambda$. Observons alors que

$$(\lambda - \gamma) \cap \mathop{\triangle}_{\alpha<\lambda} \overline{f}(\alpha) \subseteq \bigcap_{\alpha<\gamma} f(\alpha),$$

ainsi comme les segments finaux appartiennent à l'ultrafiltre selon notre définition 1.2.3, la normalité de U implique que $\bigcap_{\alpha<\gamma} f(\alpha) \in U$.

Le lemme suivant exprime une caractérisation importante de la normalité d'un ultrafiltre : Un ultrafiltre U sur un cardinal λ est normal si et seulement si toute fonction $f \in {}^\lambda\lambda$ régressive U-presque partout est constante U-presque partout.

Lemme 1.3.2. *Soit U un ultrafiltre sur un cardinal λ. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1) U est normal ;

2) Pour toute fonction $f \in {}^\lambda\lambda$ telle que $\{\xi < \lambda \mid f(\xi) < \xi\} \in U$, il existe $\alpha < \lambda$ tel que $\{\xi < \lambda \mid f(\xi) = \alpha\} \in U$.

Démonstration. 1)⇒2). Supposons que U est normal et qu'il existe une fonction $f \in {}^\lambda\lambda$ telle que $X = \{\xi < \lambda \mid f(\xi) < \xi\} \in U$ et pourtant pour tout $\alpha < \lambda$, $f^{-1}(\{\alpha\}) \notin U$. Alors pour tout $\alpha < \lambda$, $\lambda - f^{-1}(\{\alpha\}) \in U$ et par normalité de U, l'intersection diagonale $\triangle_{\alpha<\lambda}(\lambda - f^{-1}(\{\alpha\})) \in U$. Or $X \cap \triangle_{\alpha<\lambda}(\lambda - f^{-1}(\{\alpha\})) = \emptyset$. En effet, si $\xi \in X \cap \triangle_{\alpha<\lambda}(\lambda - f^{-1}(\{\alpha\}))$, i.e. $\xi \in X$, $\xi \neq 0$ et $\xi \in \bigcap_{\alpha<\xi} \lambda - f^{-1}(\{\alpha\})$, alors $f(\xi) \neq \alpha$ pour tout $\alpha < \xi$ ce qui est impossible par définition de X.

2)⇒1). Par contraposition, supposons que U n'est pas normal. Il existe alors une fonction $g \in {}^\lambda U$ telle que $\triangle_{\alpha<\lambda} g(\alpha) \notin U$. Par conséquent, $X = \lambda - \triangle_{\alpha<\lambda} g(\alpha) \in U$ et nous définissons $f \in {}^\lambda\lambda$ par $f(\xi) = \min\{\alpha \mid \xi \notin g(\alpha)\}$ si $\xi \in X$, et $f(\xi) = \xi$ si $\xi \in \lambda - X$. Observons que comme pour tout $\xi \in X$, nous avons par définition de X que $\xi \notin \bigcap_{\alpha<\xi} g(\alpha)$, nécessairement $f(\xi) < \xi$ par définition de f. Or aucun $f^{-1}(\{\alpha\})$ n'appartient à U. En effet, pour tout $\alpha < \lambda$, $g(\alpha) \in U$ par hypothèse et $f^{-1}(\{\alpha\}) \cap g(\alpha) \subseteq \{\alpha\} \notin U$ car par définition de f, $\xi \notin g(f(\xi))$ pour tout $\xi \in X$. $\square$

Lemme 1.3.3. *Si κ est un cardinal mesurable, alors il existe un ultrafiltre normal sur κ.*

Démonstration. Soit U un ultrafiltre κ-complet sur κ. Nous définissons sur ${}^{\kappa}\kappa$ la relation d'équivalence

$$f \sim g \text{ si et seulement si } \{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) = g(\alpha)\} \in U$$

et nous définissons un ordre total strict sur les classes d'équivalences par

$$[f] < [g] \text{ si et seulement si } \{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) < g(\alpha)\} \in U.$$

Il est facile de voir que cette relation est bien définie et asymétrique. Elle est transitive car si $[f] < [g]$ et $[g] < [h]$, alors

$$\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) < h(\alpha)\} \supseteq \{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) < g(\alpha)\} \cap \{\alpha < \kappa \mid g(\alpha) < h(\alpha)\} \in U.$$

C'est de plus un ordre total car pour tous $[f]$ et $[g]$, comme $<$ est un ordre total sur κ, nous avons la partition suivante

$$\kappa = \{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) < g(\alpha)\} \cup \{\alpha < \kappa \mid g(\alpha) < f(\alpha)\} \cup \{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) = g(\alpha)\}.$$

La κ-complétude de U implique en outre que cet ordre linéaire est un bon ordre sur les classes d'équivalences. En effet, supposons que $\{[f_n] \mid n \in \omega\}$ est une suite décroissante et posons $X_n = \{\alpha < \kappa \mid f_{n+1}(\alpha) < f_n(\alpha)\} \in U$ pour tout $n \in \omega$. La κ-complétude de U implique alors en particulier que $X = \bigcap_{n\in\omega} X_n \in U$. Or X doit être vide car si $\alpha \in X$, alors la suite d'ordinaux $\{f_n(\alpha) \mid n \in \omega\}$ est décroissante, contredisant le fait que $<$ est un bon ordre sur κ.

Nous pouvons donc considérer une fonction $f \in {}^{\kappa}\kappa$ dont la classe $[f]$ est l'élément $<$-minimal de l'ensemble

$$\left\{[g] \middle| g \in {}^{\kappa}\kappa \wedge \forall \gamma \in \kappa \left(g^{-1}(\kappa - (\gamma+1)) \in U\right)\right\}$$

qui est non vide car $[\mathrm{id}_\kappa]$ lui appartient, où id_κ est la fonction identité sur κ.

Pour cette fonction nous définissons alors l'ultrafiltre

$$U' = \{X \subseteq \kappa \mid f^{-1}(X) \in U\},$$

et nous montrons qu'il est normal sur κ. Par le Lemme 1.3.2 il nous suffit de voir que toute fonction régressive U'-presque partout est constante U'-presque partout. Soit donc $h \in {}^{\kappa}\kappa$ régressive U'-presque partout. Posons $g = h \circ f$ la composition de f avec h. Nous avons par définition de U' que

$$\{\alpha < \kappa \mid g(\alpha) < f(\alpha)\} \supseteq f^{-1}(\{\beta < \kappa \mid h(\beta) < \beta\}) \in U'.$$

Par conséquent $[g] < [f]$ et par minimalité de $[f]$, il existe $\gamma < \kappa$ tel que $g^{-1}(\kappa - (\gamma+1)) \notin U$, donc $\{\alpha < \kappa \mid g(\alpha) \leq \gamma\} \in U$. Or

$$\bigcup_{\beta \leq \gamma} \{\alpha < \kappa \mid g(\alpha) = \beta\} = \{\alpha < \kappa \mid g(\alpha) \leq \gamma\} \in U$$

ainsi par κ-complétude (voir Lemme 1.2.4), il existe $\beta \leq \gamma$ tel que $\{\alpha < \kappa \mid g(\alpha) = \beta\} \in U$ et donc g est constante U-presque partout. Par définition de g et de U', cela signifie que $\{\alpha < \kappa \mid h(\alpha) = \beta\} \in U'$ et donc que h est U'-constante presque partout. □

Théorème 1.3.4 (Rowbottom). *Soit U un ultrafiltre normal sur κ. Pour tout $n \in \omega$, $n > 0$, et toute fonction $F : {}^n[\kappa] \to \{0,1\}$, il existe $X \in U$ tel que $F \restriction {}^n[X]$ est constante.*

Démonstration. Par induction sur $n > 0$. Si $n = 1$, c'est évident. Supposons que pour un certain $n > 0$ pour toute fonction $G : {}^n[\kappa] \to \{0,1\}$ il existe $X \in U$ tel que $G \restriction {}^n[\kappa]$ est constante et considérons $F : {}^{n+1}[\kappa] \to \{0,1\}$ arbitraire. Pour tout $\alpha < \kappa$ définissons $F_\alpha : {}^n[\kappa] \to \{0,1\}$ par

$$F_\alpha(s) = \begin{cases} F(s \cup \{\alpha\}) & \text{si } \alpha < \min s; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par l'hypothèse d'induction, pour tout $\alpha < \kappa$, il existe $X_\alpha \in U$ et $c_\alpha \in \{0,1\}$ tels que $F_\alpha \restriction {}^n[X_\alpha] = c_\alpha$. Remarquons que l'association à chaque $\alpha < \kappa$ de c_α consiste en une fonction $c : \kappa \to \{0,1\}$ et qu'il existe donc $Y \in U$ tel que $c \restriction Y$ est constante. Par ailleurs, la normalité de U implique que l'intersection diagonale $X = \triangle_{\alpha<\kappa} X_\alpha \in U$. Posons $Z = Y \cap X$ et montrons que $F \restriction {}^{n+1}[Z]$ est constante. Pour ceci considérons $\{\xi, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \in {}^{n+1}[Z]$ où $\xi < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n$ et donc $\xi < \min\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Par définition de l'intersection diagonale, nous avons que $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in X_\xi$ et donc par définition de F_ξ et de X_ξ :

$$F(\{\xi, \alpha_1, \ldots \alpha_n\} = F(\{\xi\} \cup \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}) = F_\xi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = c_\xi.$$

De plus $\xi \in Y$ et comme $c \restriction Y$ est constante, il en résulte que $F \restriction {}^{n+1}[\kappa]$ est constante. □

Corollaire 1.3.5. *Soit U un ultrafiltre normal sur κ. Pour tout $n \in \omega$, $n > 0$, nous définissons*

$$U_n = \{X \subseteq {}^n[\kappa] \mid \exists X' \in U(F_X \restriction {}^n[X'] = 1)\}$$

où $F_X : {}^n[\kappa] \to \{0,1\}$ est la fonction caractéristique de X, i.e.

$$F_X(s) = \begin{cases} 1 & si\ s \in X; \\ 0 & si\ s \notin X. \end{cases}$$

Alors U_n est un ultrafiltre κ-complet sur ${}^n[\kappa]$.

La définition de l'ultrafiltre κ-complet U_n sur ${}^n[\kappa]$ induit par l'ultrafiltre normal U sur κ se formule également comme

$$U_n = \left\{X \subseteq {}^n[\kappa] \middle| \exists X' \in U({}^n[X'] \subseteq X)\right\}.$$

Démonstration. Remarquer tout d'abord que pour $F : {}^n[\kappa] \to \{0,1\}$ si $X, Y \in U$ sont tels que $F{\restriction}^n[X]$ et $F{\restriction}^n[Y]$ sont constantes, alors $F{\restriction}^n[X] = F{\restriction}^n[Y]$. En effet, comme $X \cap Y \in U$ il existe $s \in X \cap Y$ et donc $F{\restriction}^n[X](s) = F{\restriction}^n[Y](s)$. Par conséquent, si $X \in U_n$ alors il n'existe pas de $Y \in U$ tel que $F_X{\restriction}^n[Y] = 0$.

Montrons que U_n est un ultrafiltre sur ${}^n[\kappa]$. Puisque ${}^n[\kappa] \in U_n$, il suffit de prendre $X' = \kappa$. Si $X \in U_n$ et $Y \subseteq {}^n[\kappa]$ contient X, alors pour $X' \in U$ tel que $F_X{\restriction}^n[X'] = 1$ nous avons aussi $F_Y{\restriction}^n[X'] = 1$. Pour tout $s \in {}^n[\kappa]$, $\{s\} \notin U_n$ car $X' = \kappa - \sup s \in U$ et donc $F_{\{s\}}{\restriction}^n[X'] = 0$. De plus, pour tout $X \subseteq {}^n[\kappa]$ si $X \notin U_n$, alors il existe $X' \in U$ tel que $F_X{\restriction}^n[X'] = 0$ et donc $F_{{}^n[\kappa]-X}{\restriction}^n[X'] = 1$, i.e. ${}^n[\kappa] - X \in U_n$. Afin de remarquer que U_n est κ-complet, soit $\{X_\alpha \mid \alpha < \gamma\} \subseteq U_n$ pour $\gamma < \kappa$. Montrons que $X = \bigcap_{\alpha<\gamma} X_\alpha \in U_n$. Pour tout $\alpha < \gamma$, il existe $X'_\alpha \in U$ tel que $F_{X_\alpha}{\restriction}^n[X'_\alpha] = 1$, alors par κ-complétude de U, $X' = \bigcap_{\alpha<\gamma} X'_\alpha \in U$ et nous avons $F_X{\restriction}^n[X'] = 1$, i.e. $X \in U_n$. □

Notes. Les sections 1.1 et 1.2 sont inspirées de la section 2 du chapitre 1 de [Kan94]. Toutefois, le Théorème 1.1.1 est une adaptation personnelle de l'argument classique pour la mesure de Lebesgue. Le lemme 1.3.2 est inspiré des exercices 5.10 et 5.11 à la page 53 de [Kan94]. Le Lemme 1.3.3 est tiré du Théorème 10.20 p. 134 de [Jec03]. Le Théorème 1.3.4 trouve sa source par exemple dans le théorème 10.22, p. 136 de [Jec03].

Chapitre 2

Interprétations relatives

À qui la poursuit
la luciole
apporte sa lumière

Otomo Oemaru

La richesse d'une théorie incomplète ne serait-elle pas sa capacité à permettre en son sein la conception d'autres univers différents que celui incomplètement sous-entendue par elle-même ?
La considération d'objets s'imposant par leur taille sur un univers d'objet supposé par une théorie est intrinsèquement un tel enrichissement de cette théorie.

2.1 Interprétations relatives

Une **interprétation relative** de la théorie des ensembles en elle-même consiste en un couple de formules $(\boldsymbol{M}(x,v), \boldsymbol{E}(x,y,v))$ dont les seules variables libres sont respectivement x, v et x, y, v. Nous pensons à v comme un paramètre définissant la classe $\{x \mid \boldsymbol{M}(x,v)\}$ et la relationnelle $\{(x,y) \mid \boldsymbol{E}(x,y,v)\}$. Intuitivement, $\boldsymbol{M}$ représente le domaine de notre interprétation et $\boldsymbol{E}$ l'interprétation du symbole d'appartenance. Pour toute formule ϕ du langage de la théorie des ensembles, nous définissons la formule $\phi^{\boldsymbol{M},\boldsymbol{E}}$ appelée la **relativisée** de ϕ à notre interprétation relative par induction sur la hauteur des formules :

$$\begin{aligned}
(x = y)^{\boldsymbol{M},\boldsymbol{E}} &: x = y \\
(x \in y)^{\boldsymbol{M},\boldsymbol{E}} &: E(x,y,v) \\
(\neg\phi)^{\boldsymbol{M},\boldsymbol{E}} &: \neg\phi^{\boldsymbol{M},\boldsymbol{E}} \\
(\phi \wedge \psi)^{\boldsymbol{M},\boldsymbol{E}} &: \phi^{\boldsymbol{M},\boldsymbol{E}} \wedge \psi^{\boldsymbol{M},\boldsymbol{E}} \\
(\exists x \phi)^{\boldsymbol{M},\boldsymbol{E}} &: \exists x \big(\boldsymbol{M}(x,v) \wedge \phi^{\boldsymbol{M},\boldsymbol{E}}\big)
\end{aligned}$$

Nous adoptons la notation classique $x \in \boldsymbol{M}(v)$ en lieu et place de $\boldsymbol{M}(x,v)$.

Dans le cas particulier où $\boldsymbol{E}(x,y,v) : x \in y$, nous notons simplement par $\boldsymbol{M}(x,v)$ l'interprétation relative et $\phi^{\boldsymbol{M}}$ la relativisée de ϕ à $\boldsymbol{M}$.

En analogie avec le vocabulaire de la théorie des modèles, nous adoptons les définitions suivantes.

Définition 2.1.1. Soit $(\boldsymbol{M},\boldsymbol{E})$ une interprétation relative.

1) Pour un énoncé ϕ, nous disons que ϕ **est vraie dans** $(\boldsymbol{M},\boldsymbol{E})$ ou de façon équivalente que $(\boldsymbol{M},\boldsymbol{E})$ **satisfait** ϕ, si ZFC $\vdash \phi^{\boldsymbol{M},\boldsymbol{E}}$;
2) Pour un ensemble d'énoncés T, nous disons que T **est vrai dans** $(\boldsymbol{M},\boldsymbol{E})$ ou de façon équivalente que $(\boldsymbol{M},\boldsymbol{E})$ **est un modèle de** T, si tout énoncé de T est vraie dans $(\boldsymbol{M},\boldsymbol{E})$.

Définition 2.1.2. Soit $(\boldsymbol{M},\boldsymbol{E})$ une interprétation relative.

1) $\boldsymbol{M}$ est une classe **transitive**, si

$$\text{ZFC} \vdash \forall x \forall y \big((\boldsymbol{M}(y) \wedge x \in y) \to \boldsymbol{M}(x)\big);$$

2) $\boldsymbol{M}$ contient tous les ordinaux, si

$$\text{ZFC} \vdash \forall x \big(x \in \boldsymbol{ON} \to \boldsymbol{M}(x)\big)$$

3) $(\boldsymbol{M},\boldsymbol{E})$ est un **modèle de** ZFC, si pour tout énoncé de σ de ZFC,

$$\text{ZFC} \vdash \sigma^{\boldsymbol{M},\boldsymbol{E}}.$$

Finalement, $(\boldsymbol{M},\boldsymbol{E})$ est un **modèle transitif** de ZFC, s'il vérifie 1) et 3). C'est un **modèle intérieur** de ZFC s'il vérifie 1), 2) et 3).

Définition 2.1.3. Soient $(\boldsymbol{M}_1,\boldsymbol{E}_1)$ et $(\boldsymbol{M}_2,\boldsymbol{E}_2)$ deux interprétations relatives et $\boldsymbol{j}(x,y)$ une formule à deux variables. Nous disons que $\boldsymbol{j}$ est une **fonctionnelle** de $\boldsymbol{M}_1$ vers $\boldsymbol{M}_2$, si

$$\text{ZFC} \vdash \forall x \in \boldsymbol{M}_1 \exists! y \in \boldsymbol{M}_2 \boldsymbol{j}(x,y).$$

Nous notons dans ce cas $\boldsymbol{j} : \boldsymbol{M}_1 \to \boldsymbol{M}_2$. De plus, nous adoptons la notation plus classique suivante, pour $a \in \boldsymbol{M}_1$, $\boldsymbol{j}(a)$ est l'unique ensemble $b \in \boldsymbol{M}_2$ tel que ZFC $\vdash \boldsymbol{j}(a,b)$.

Nous faisons les définitions suivantes pour une fonctionnelle $\boldsymbol{j} : \boldsymbol{M}_1 \to \boldsymbol{M}_2$.

1) $\boldsymbol{j}$ est **injective**, si

$$\text{ZFC} \vdash \forall x \in \boldsymbol{M}_1 \forall y \in \boldsymbol{M}_1 \forall z \in \boldsymbol{M}_2 \big(\boldsymbol{j}(x,z) \wedge \boldsymbol{j}(y,z) \to x = y\big)$$

2) $\boldsymbol{j}$ est **surjective**, si

$$\text{ZFC} \vdash \forall y \in \boldsymbol{M}_2 \exists x \in \boldsymbol{M}_1 \boldsymbol{j}(x,y)$$

3) $\boldsymbol{j}$ est **bijective**, si $\boldsymbol{j}$ est injective et surjective.
4) $\boldsymbol{j}$ est un **isomorphisme**, si $\boldsymbol{j}$ est bijective et

$$\text{ZFC} \vdash \forall x \in \boldsymbol{M}_1 \forall y \in \boldsymbol{M}_1 \left(\boldsymbol{E}_1(x,y) \longleftrightarrow \boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{j}(x),\boldsymbol{j}(y))\right).$$

5) $\boldsymbol{j}$ vérifie le **schéma d'élémentarité**, si pour toute formule $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ de la théorie des ensembles et tous $a_1,\ldots,a_n \in \boldsymbol{M}_1$,

$$\mathrm{ZFC} \vdash \phi[a_1,\ldots,a_n]^{\boldsymbol{M}_1,\boldsymbol{E}_1} \longleftrightarrow \phi[\boldsymbol{j}(a_1),\ldots,\boldsymbol{j}(a_n)]^{\boldsymbol{M}_2,\boldsymbol{E}_2}.$$

6) $\boldsymbol{j}$ est une **injection élémentaire**, si elle est injective et vérifie le schéma d'élémentarité.

Remarquons qu'un isomorphisme vérifie le schéma d'élémentarité.

Observons que si $\boldsymbol{j}:\boldsymbol{M}_1 \to \boldsymbol{M}_2$ est une injection élémentaire entre deux classes $\boldsymbol{M}_1$ et $\boldsymbol{M}_2$, nous avons pour toute formule $\phi(v_1,\ldots,v_n)$ absolue pour $\boldsymbol{M}_1$ et $\boldsymbol{M}_2$, et tous $a_1,\ldots,a_n \in \boldsymbol{M}_1$

$$\begin{aligned}\mathrm{ZFC} \vdash \phi[a_1,\ldots,a_n] \longleftrightarrow \phi[a_1,\ldots,a_n]^{\boldsymbol{M}_1}& \\ \longleftrightarrow \phi[\boldsymbol{j}(a_1),\ldots,\boldsymbol{j}(a_n)]^{\boldsymbol{M}_2} &\longleftrightarrow \phi[\boldsymbol{j}(a_1),\ldots,\boldsymbol{j}(a_n)].\end{aligned}$$

Nous utilisons cette observation à plusieurs reprises, notamment dans le lemme suivant. Pour les formules que nous utilisons, l'absoluité pour les modèles transitifs de ZFC est un résultat classique (voir par exemple [Kun80], Chapter IV).

Lemme 2.1.4. *Supposons que* ZFC $\vdash \boldsymbol{j}:\boldsymbol{M}_1 \to \boldsymbol{M}_2$ *est une injection élémentaire d'un modèle intérieur de* ZFC *vers un modèle transitif de* ZFC*. Alors pour tout ordinal* α*,* $\boldsymbol{j}(\alpha)$ *est un ordinal et* $\boldsymbol{j}(\alpha) \geq \alpha$*.*

Démonstration. Soit α un ordinal, c'est à dire ZFC $\vdash$ ord(α) où ord(x) est la formule absolue disant que x est transitif et bien ordonné par $\in$. Comme $\boldsymbol{M}_1$ est un modèle intérieur, $\alpha \in \boldsymbol{M}_1$. Par l'observation précédant le lemme, nous avons ZFC $\vdash$ ord($\boldsymbol{j}(\alpha)$).

Par induction sur les ordinaux, montrons que pour tout ordinal α, $\alpha \leq \boldsymbol{j}(\alpha)$. Observons tout d'abord que $\boldsymbol{j}(\emptyset)=\emptyset$, car la formule $z=\emptyset$ est absolue.

Supposons maintenant que $\alpha \leq \boldsymbol{j}(\alpha)$ et montrons que $\alpha+1 \leq \boldsymbol{j}(\alpha+1)$. Comme $y = x \cup \{x\}$ est une formule absolue, $\alpha+1=\alpha\cup\{\alpha\}$ implique $\boldsymbol{j}(\alpha+1)=\boldsymbol{j}(\alpha)\cup\{\boldsymbol{j}(\alpha)\}=\boldsymbol{j}(\alpha)+1$. Par hypothèse d'induction, $\boldsymbol{j}(\alpha+1)=\boldsymbol{j}(\alpha)+1 \geq \alpha+1$.

Supposons enfin pour β limite que $\alpha \leq \boldsymbol{j}(\alpha)$ pour tout $\alpha<\beta$. Comme un ordinal est transitif, pour tout $\alpha<\beta$, nous avons $\alpha\subseteq\beta$. Ainsi, par absoluité de la formule $x \subseteq y$, nous avons $\boldsymbol{j}(\alpha)\subseteq\boldsymbol{j}(\beta)$ pour tout $\alpha<\beta$. Ainsi, par hypothèse d'induction, pour tout $\alpha<\beta$, $\alpha\subseteq\boldsymbol{j}(\alpha)\subseteq\boldsymbol{j}(\beta)$ et donc $\beta\subseteq\boldsymbol{j}(\beta)$, i.e. $\beta\leq\boldsymbol{j}(\beta)$. □

Lemme 2.1.5. *Soit T une théorie du langage de la théorie des ensembles qui étend* ZFC *et* $\boldsymbol{j}(x,y)$ *une formule à deux variables libres. Supposons que* $T \vdash \boldsymbol{j}(x,y)$ *est une injection élémentaire de* $(V,\in)$ *dans un modèle* $(\boldsymbol{M},\in)$ *transitif de* ZFC *et que* $\boldsymbol{j}$ *est **non triviale**, i.e.* $T \vdash \exists x\big(x \neq \boldsymbol{j}(x)\big)$*. Alors* $T \vdash$ *« il existe un plus petit ordinal δ tel que $\boldsymbol{j}(\delta)>\delta$ ». En outre, δ est limite et pour tout ensemble x tel que* rang(x) $<\delta$*,* $\boldsymbol{j}(x)=x$*.*

Démonstration. Soit x un ensemble de rang minimal tel que $\boldsymbol{j}(x)\neq x$. Posons $\delta=$ rang(x). Remarquons que $x\subseteq\boldsymbol{j}(x)$, car par élémentarité de $\boldsymbol{j}$ et minimalité du rang de x, si $y\in x$ alors $y=\boldsymbol{j}(y)\in\boldsymbol{j}(x)$. Par conséquent, nous pouvons choisir $z\in\boldsymbol{j}(x)-x$. Maintenant si rang($\boldsymbol{j}(x)$) $\leq\delta$, alors par minimalité de δ, $\boldsymbol{j}(z)=z\in\boldsymbol{j}(x)$

qui est équivalent à la formule contradictoire $z \in x$. Par conséquent, $\mathrm{rang}(\boldsymbol{j}(x)) > \delta$. Or la formule $v_0 = \mathrm{rang}(v_1)$ est Δ_1^{ZFC} et donc absolue pour les modèles transitifs de ZFC (voir [Kan94], Lemme 0.2, p.5). Il découle alors du schéma d'élémentarité que

$$T \vdash \mathrm{rang}(x) = \delta \longleftrightarrow \big(\mathrm{rang}(\boldsymbol{j}(x)) = \boldsymbol{j}(\delta)\big)^{\boldsymbol{M}} \longleftrightarrow \mathrm{rang}(\boldsymbol{j}(x)) = \boldsymbol{j}(\delta).$$

Ainsi, $\boldsymbol{j}(\delta) = \mathrm{rang}(\boldsymbol{j}(x)) > \delta$. En outre, δ est limite car si $\delta = \alpha + 1$, alors comme $\mathrm{rang}(\alpha) = \alpha < \delta$, nous avons la contradiction $\boldsymbol{j}(\delta) = \boldsymbol{j}(\alpha+1) = \boldsymbol{j}(\alpha)+1 = \alpha+1 = \delta$. De plus, δ est minimal car par définition de δ, nous avons de façon générale que pour tout ensemble x avec $\mathrm{rang}(x) < \delta$, $\boldsymbol{j}(x) = x$. □

Pour une injection élémentaire $\boldsymbol{j}$ comme dans le lemme précédent, nous notons $\delta = \mathrm{crit}(\boldsymbol{j})$ le **point critique** de $\boldsymbol{j}$ pour une formule satisfaisant

$$T \vdash \delta = \mathrm{crit}(\boldsymbol{j}) \longleftrightarrow \delta \text{ est le plus petit ordinal déplacé par } \boldsymbol{j}.$$

2.2 Ultrapuissances de l'univers

Soit U un ultrafiltre sur un ensemble S. Notons $\boldsymbol{F_S}$ la classe des fonctions de domaine S. Nous définissons sur $\boldsymbol{F_S}$ la relationnelle d'équivalence

$$f \sim_U g \text{ si et seulement si } \{x \in S \mid f(x) = g(x)\} \in U$$

ainsi que la relationnelle

$$f \in_U g \text{ si et seulement si } \{x \in S \mid f(x) \in g(x)\} \in U.$$

Afin de considérer comme une classe le quotient de la classe $\boldsymbol{F_S}$ par la relationnelle d'équivalence $\sim_U$, nous utilisons une astuce indiquée par Scott pour définir pour chaque fonction f de domaine S l'ensemble

$$[f]_U = \{g \in \boldsymbol{F_S} \mid g \sim_U f \wedge \forall h \in \boldsymbol{F_S}(f \sim_U h \to \mathrm{rang}(g) \leq \mathrm{rang}(h))\}.$$

C'est bien un ensemble car pour α le rang d'un élément de rang minimal de la classe non vide $\{g \in \boldsymbol{F_S} \mid g \sim_U f\}$, nous avons $[f]_U \in V_{\alpha+2}$.

Nous formons alors la classe **Ult** comme la classe des $[f]_U$ pour $f \in \boldsymbol{F_S}$. La classe **Ult** n'est rien d'autre que la formule de la théorie des ensemble

$$\mathbf{Ult}(x) : \exists f \in \boldsymbol{F_S}(x = [f]_U).$$

tandis que la relationnelle $\sim_U$ est la formule à deux variables libres $\boldsymbol{S}_U(x,y)$ donnée par exemple par

$$\boldsymbol{S}_U(f,g) : f \in \boldsymbol{F_S} \wedge g \in \boldsymbol{F_S} \wedge \forall X \subseteq S\Big(\big(\forall y \in S(f(y) = g(y) \to y \in X)\big) \to X \in U\Big),$$

Ainsi, lorsque nous disons que $\sim_U$ est une relationnelle d'équivalence, nous entendons que

$$\begin{aligned} \mathrm{ZFC} \vdash \forall x \boldsymbol{S}_U(x,x) \wedge \forall x,y,z\Big(\big(\boldsymbol{S}_U(x,y) \wedge \boldsymbol{S}_U(y,z)\big) \to \boldsymbol{S}_U(x,z)\Big) \\ \wedge \forall x \forall y\,\big(\boldsymbol{S}_U(x,y) \longleftrightarrow \boldsymbol{S}_U(y,x)\big) \end{aligned}$$

En outre, la relationnelle $\in_U$ sur $\boldsymbol{F_S}$ induit une relationnelle $\boldsymbol{E_U}$ sur **Ult** qui est donnée par la formule à deux variables libres suivante

$$\boldsymbol{E_U}(x,y) : \exists f,g \in \boldsymbol{F_S}\Big(x = [f]_U \wedge y = [g]_U \wedge \{z \in S \mid f(z) \in g(z)\} \in U\Big).$$

Cette relationnelle est bien définie sur **Ult** car

$$\begin{aligned}\text{ZFC} \vdash \boldsymbol{E_U}(x,y) \longleftrightarrow \Big(&\mathbf{Ult}(x) \wedge \mathbf{Ult}(y) \wedge \\ &\forall f,g \in \boldsymbol{F_S}\big((x=[f]_U \wedge y=[g]_U) \to \{z \in S \mid f(x) \in g(x)\} \in U\big)\Big)\end{aligned}$$

L'interprétation relative constituée par le couple de formule $(\mathbf{Ult}, \boldsymbol{E_U})$ est appelée l'**ultrapuissance** de l'univers V par l'ultrafiltre U. Nous avons une version du théorème de Łoś pour cette interprétation relative. Ce théorème est en fait un schéma de théorèmes de ZFC car la relation de satisfaction entre formules et classes propres n'est pas formalisable dans ZFC.

Théorème 2.2.1. *Pour toute formule $\phi(v_1,\dots,v_n)$ de la théorie des ensembles et toutes fonctions $f_1,\dots,f_n \in \boldsymbol{F_S}$,*

$$\mathit{ZFC} \vdash \phi\big[[f_1]_U,\dots,[f_n]_U\big]^{\mathbf{Ult},\boldsymbol{E_U}} \longleftrightarrow \{x \in S \mid \phi[f_1(x),\dots,f_n(x)]\} \in U.$$

En particulier, pour tout énoncé σ,

$$\mathit{ZFC} \vdash \sigma^{\mathbf{Ult},\boldsymbol{E_U}} \longleftrightarrow \sigma$$

Démonstration. Par induction sur la hauteur des formules.

Formules atomiques. Pour $\phi : x = y$ et $\phi : x \in y$, c'est immédiat par définition de $\boldsymbol{S_U}$ et de $\boldsymbol{E_U}$.

Connecteurs logiques. Pour la négation, puisque pour $X \subseteq S$, $X \in U$ si et seulement si $S - X \notin U$, nous avons

$$\begin{aligned}\text{ZFC} \vdash (\neg\phi[f])^{\mathbf{Ult},\boldsymbol{E_U}} &\longleftrightarrow \neg(\phi[f])^{\mathbf{Ult},\boldsymbol{E_U}} \\ &\longleftrightarrow \{x \in S \mid \phi[f(x)]\} \notin U \longleftrightarrow \{x \in S \mid \neg\phi[f(x)]\} \in U.\end{aligned}$$

Quant à la conjonction, nous utilisons le fait que $X \in U$ et $Y \in U$ si et seulement si $X \cap Y \in U$, et donc

$$\begin{aligned}\text{ZFC} \vdash (\phi \wedge \psi)^{\mathbf{Ult},\boldsymbol{E_U}} &\longleftrightarrow \phi^{\mathbf{Ult},\boldsymbol{E_U}} \wedge \psi^{\mathbf{Ult},\boldsymbol{E_U}} \\ &\longleftrightarrow \big(\{x \in S \mid \phi\} \in U \wedge \{x \in S \mid \psi\} \in U\big) \longleftrightarrow \{x \in S \mid \phi \wedge \psi\} \in U.\end{aligned}$$

Quantificateur existentiel. Supposons pour commencer que

$$\text{ZFC} \vdash (\exists y\,\phi\big[[f_1],\dots,[f_n]\big])^{\mathbf{Ult},\boldsymbol{E_U}}. \tag{2.1}$$

Il existe alors $[g] \in \mathbf{Ult}$ tel que $\text{ZFC} \vdash \phi\big[[g],[f_1],\dots,[f_n]\big]$. Par conséquent,

$$\text{ZFC} \vdash \{x \in S \mid \phi[g(x), f_1(x),\dots,f_n(x)]\} \in U,$$

et donc

$$\mathrm{ZFC} \vdash \{x \in S \mid \exists y \phi[f_1(x), \ldots, f_n(x)]\} \in U. \tag{2.2}$$

Réciproquement, si 2.2 est vérifiée, par l'axiome du choix, choisissons pour chaque $x \in S$ un témoin $y_x \in V$ tel que $\mathrm{ZFC} \vdash \phi[y_x, f_1(x), \ldots, f_n(x)]^{\mathbf{Ult},\boldsymbol{E}_U}$. Nous définissons alors $g : S \to V$ par $g(x) = y_x$ qui vérifie alors $\mathrm{ZFC} \vdash \phi\left[[g], [f_1], \ldots, [f_n]\right]^{\mathbf{Ult},\boldsymbol{E}_U}$ et implique (2.1). □

Pour chaque ensemble $x \in V$, notons $c_x : S \to \{x\}$ la fonction constante. Nous définissons la fonctionnelle $\boldsymbol{j} : V \to \mathbf{Ult}$ par $\boldsymbol{j}(x) = [c_x]_U$, i.e. comme la formule à deux variables libres

$$\boldsymbol{j}(x, y) : y = [c_x]_U.$$

Par le Théorème précédent, la fonctionnelle $\boldsymbol{j}$ est une injection élémentaire. En effet, pour toute formule $\phi(v_1, \ldots, v_n)$, et tous ensembles $x_1, \ldots, x_n$, $\phi[x_1, \ldots, x_n]$ est équivalent à $\phi[c_{x_1}(s), \ldots, c_{x_n}(s)]$ quelque soit $s \in S$. Ainsi, l'ensemble $\{s \in S \mid \phi[c_{x_1}(s), \ldots, c_{x_n}(s)]\}$ est soit vide soit égale à S suivant si $\phi[x_1, \ldots, x_n]$ ou non. Par conséquent, $\phi[x_1, \ldots, x_n]$ est équivalent à $\{s \in S \mid \phi[c_{x_1}(s), \ldots, c_{x_n}(s)]\} \in U$ qui équivaut par le Théorème 2.2.1 à $\phi[\boldsymbol{j}(x_1), \ldots, \boldsymbol{j}(x_n)]^{\mathbf{Ult},\boldsymbol{E}_U}$.

Remarquons que l'ultrapuissance $\boldsymbol{E}_U$ est « **set-like** » sur **Ult**, à savoir pour tout $[f]_U \in \mathbf{Ult}$, $\{[g]_U \in \mathbf{Ult} \mid [g]_U \boldsymbol{E}_U [f]_U\}$ est un ensemble. En effet, si $[g]_U \boldsymbol{E}_U [f]_U$, définissons $g' : S \to V$ par

$$g'(s) = \begin{cases} g(s) & \text{si } g(s) \in f(s); \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous avons clairement $g' \sim_U g$, i.e. $\mathrm{ZFC} \vdash \boldsymbol{S}_U(f, g)$. En outre $\mathrm{rang}(g') \leq \mathrm{rang}(f)$, et donc $[g]_U \in V_{\mathrm{rang}(f)+2}$. Par conséquent $\{[g]_U \in \mathbf{Ult} \mid [g]_U \boldsymbol{E}_U [f]_U\} \in V_{\mathrm{rang}(f)+3}$ et c'est donc un ensemble.

De plus, $\boldsymbol{E}_U$ est **extensionnelle** sur **Ult** car, par le Théorème 2.2.1, ZFC prouve la relativisation de l'axiome d'extensionnalité à l'interprétation relative $(\mathbf{Ult}, \boldsymbol{E}_U)$.

Observons cependant que la relativisation de l'axiome de fondation à $(\mathbf{Ult}, \boldsymbol{E}_U)$, à savoir,

$$\forall x \in \mathbf{Ult}\left[\exists y \in \mathbf{Ult}(y \boldsymbol{E}_U x) \to \exists y \in \mathbf{Ult}\left(y \boldsymbol{E}_U x \wedge \neg \exists y \in \mathbf{Ult}(z \boldsymbol{E}_U x \wedge z \boldsymbol{E}_U y)\right)\right]$$

n'équivaut pas au fait que la relationnelle $\boldsymbol{E}_U$ est **bien fondée** sur **Ult**, i.e. que

$$\mathrm{ZFC} \vdash \forall X \subseteq \mathbf{Ult}\left(X \neq \emptyset \to \exists y \in X(\neg(\exists z \in X)\boldsymbol{E}_U(z, y))\right).$$

En fait, une hypothèse forte sur l'ultrafiltre est nécessaire pour assurer cela.

Théorème 2.2.2. *Soient U un ultrafiltre sur un ensemble S et $(\mathbf{Ult}, \boldsymbol{E}_U)$ l'ultrapuissance correspondante.* ZFC *montre que U est $\aleph_1$-complet sur S si et seulement si $\boldsymbol{E}_U$ est bien fondée sur* **Ult**.

Démonstration. $\Rightarrow$. Par l'absurde, supposons que U est $\aleph_1$-complet et qu'il existe dans **Ult** une chaîne infinie descendante $\{[f_n]_U \mid n \in \omega\}$ pour $\boldsymbol{E}_U$. Nous avons donc pour tout $n \in \omega$ que $X_n = \{x \in S \mid f_{n+1}(x) \in f_n(x)\} \in U$ et par $\aleph_1$-complétude de U, $X = \bigcap_{n\in\omega} X_n \in U$. Il existe donc $x \in X$ pour lequel la suite $\{f_n(x) \mid n \in \omega\}$ est infinie descendante pour l'appartenance, contredisant l'axiome de fondation.

$\Leftarrow$. Par contraposition, supposons qu'il existe $\{X_n \mid n \in \omega\} \subseteq U$ tel que $X = \bigcap_{n\in\omega} X_n \notin U$. Pour $Y_k = \bigcap_{n<k} X_n \in U$ nous avons $Y_{k+1} = Y_k \cap X_k \subseteq X_k$ et $\bigcap_{k\in\omega} Y_k = X \notin U$. Définissons pour chaque $n \in \omega$ une fonction $f_n : S \to \omega$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} \min\{k \geq n \mid x \in Y_k - Y_{k+1}\} - n & \text{si } \{k \geq n \mid x \in Y_k - Y_{k+1}\} \neq \emptyset; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous avons pour tout $n \in \omega$ que

$$\{x \in S \mid f_{n+1}(x) \in f_n(x)\} \supseteq Y_{n+1} - X \in U.$$

En effet, pour tout $x \in Y_{n+1} - X$, il existe $k \geq n+1$ tel que $x \in Y_k - Y_{k+1}$. Ainsi, pour k minimal, nous avons $f_{n+1}(x) = k - (n+1) \in k - n = f_n(x)$. Il s'ensuit que $\{[f_n]_U \mid n \in \omega\}$ est une suite infinie descendante pour $\boldsymbol{E}_U$. □

Ainsi, pour un ultrafiltre $\aleph_1$-complet U sur un ensemble S, la relationnelle $\boldsymbol{E}_U$ est set-like, extensionnelle et bien fondée sur **Ult**. Par le théorème de collapse de Mostowski (voir [Kun80], Theorem 5.14, p. 106), il existe une formule $\boldsymbol{M}$ unique décrivant une classe transitive et une fonctionnelle $\boldsymbol{i}$ unique qui soit un isomorphisme entre **Ult** et $\boldsymbol{M}$.

Remarquons que $\boldsymbol{M}$ est un modèle transitif de ZFC par le Théorème 2.2.1 et qu'il contient tous les ordinaux. Pour voir ceci, considérons l'injection élémentaire $\boldsymbol{j}_U = \boldsymbol{i} \circ \boldsymbol{j} : V \to M$. Par le Lemme 2.1.4, pour tout ordinal α, $\boldsymbol{j}_U(\alpha)$ est un ordinal $\geq \alpha$. Ainsi pour tout ordinal α, soit $\alpha = \boldsymbol{j}_U(\alpha) \in \boldsymbol{M}$ ou alors $\alpha \in \boldsymbol{j}_U(\alpha) \in \boldsymbol{M}$ et donc, comme $\boldsymbol{M}$ est transitive, $\alpha \in \boldsymbol{M}$.

Convention. Si U est un ultrafiltre $\aleph_1$-complet sur un ensemble S, le modèle intérieur de ZFC $(\mathbf{Ult}, \in)$, noté simplement $\mathbf{Ult}(U)$, est l'interprétation relative fournie par le théorème de collapse de Mostowski à partir de $(\mathbf{Ult}, \boldsymbol{E}_U)$. De plus, l'injection élémentaire $\boldsymbol{j}_U : V \to \mathbf{Ult}(U)$ désigne la composition $\boldsymbol{i} \circ \boldsymbol{j}$ dont l'expression formelle est

$$\boldsymbol{j}_U(x, y) : \exists z \big(\boldsymbol{j}(x, z) \wedge \boldsymbol{i}(z, y)\big).$$

Pour $f : S \to V$, nous conservons cependant la notation $[f]_U$ pour représenter l'élément correspondant $\boldsymbol{i}([f]_U)$ du collapse de Mostowski.

Proposition 2.2.3. *Supposons qu'il existe un cardinal mesurable κ et que U est un ultrafiltre κ-complet sur κ. Considérons l'injection élémentaire correspondante $\boldsymbol{j}_U : V \to$ $\mathbf{Ult}(U)$ dans le modèle intérieur $\mathbf{Ult}(U)$. Alors κ est le point critique de $\boldsymbol{j}_U$, i.e. $\kappa =$ $\mathrm{crit}(\boldsymbol{j}_U)$.*

Démonstration. Remarquons que par le Lemme 2.1.4, pour tout ordinal α, $\boldsymbol{j}(\alpha)$ est un ordinal et $\alpha \leq \boldsymbol{j}_U(\alpha)$. Nous commençons par montrer que $\boldsymbol{j}_U(\alpha) = \alpha$ pour tout

$\alpha < \kappa$. Sinon, soit $\alpha < \kappa$ le plus petit ordinal tel que $\alpha < \boldsymbol{j}_U(\alpha)$. Soit $f : \kappa \to V$ tel que $[f]_U = \alpha$, alors $\{\xi < \kappa \mid f(\xi) < \alpha\} \in U$ et par κ-complétude de U (voir Lemme 1.2.4) il existe $\beta < \alpha$ tel que $\{\xi < \kappa \mid f(\xi) = \beta\} \in U$. Ainsi par minimalité de α, nous avons la contradiction $\alpha = [f]_U = \boldsymbol{j}_U(\beta) = \beta$.

Ensuite, rappelons que pour tout $\alpha < \kappa$, $\kappa - (\alpha + 1) \in U$. Il s'ensuit que pour la fonction identité $\mathrm{id} : \kappa \to \kappa$, nous avons pour tout $\alpha < \kappa$:

$$\alpha = \boldsymbol{j}_U(\alpha) < [\mathrm{id}]_U < \boldsymbol{j}_U(\kappa).$$

Par conséquent, $\kappa \leq [\mathrm{id}]_U < \boldsymbol{j}_U(\kappa)$ et donc $\mathrm{crit}(\boldsymbol{j}_U) = \kappa$. □

Nous reprenons le cadre du Lemme 2.1.5, nous donnons maintenant, en quelque sorte, une réciproque au théorème précédent.

Théorème 2.2.4. *Soit T une théorie du langage de la théorie des ensembles qui étend* ZFC *et $\boldsymbol{j}(x,y)$ une formule à deux variables libres. Supposons que T prouve que $\boldsymbol{j}(x,y)$ est une injection élémentaire de $(V,\in)$ dans un modèle intérieur $(\boldsymbol{M},\in)$ qui est* ***non triviale****, i.e. $T \vdash \exists x\big(x \neq \boldsymbol{j}(x)\big)$. Alors T prouve que* $\mathrm{crit}(\boldsymbol{j})$ *est un cardinal mesurable.*

Démonstration. Posons $\kappa = \mathrm{crit}(\boldsymbol{j})$. Nécessairement, $\kappa > \omega$ car tout ordinal $\alpha \leq \omega$ est définissable, donc par élémentarité de $\boldsymbol{j}$, nous avons $\boldsymbol{j}(\alpha) = \alpha$. Nous définissons alors

$$U = \{X \subseteq \kappa \mid \kappa \in \boldsymbol{j}(X)\},$$

et nous montrons que U est un ultrafiltre κ-complet sur κ. Tout d'abord par définition de $\kappa = \mathrm{crit}(\boldsymbol{j})$, nous avons bien $\kappa \in \boldsymbol{j}(\kappa)$.

Par ailleurs, si $X \in U$ et $Y \subseteq \kappa$ vérifient $X \subseteq Y$, alors $\kappa \in \boldsymbol{j}(X) \subseteq \boldsymbol{j}(Y)$ et donc $Y \in U$. En effet, pour tout $x \in \boldsymbol{j}(X)$, $\mathrm{rang}(x) < \kappa$ et donc par le Lemme 2.1.5, $\boldsymbol{j}(x) = x$ et par élémentarité $x \in X \subseteq Y$ et donc $\boldsymbol{j}(x) \in \boldsymbol{j}(Y)$.

De plus, pour tout $\alpha \in \kappa$, $\{\alpha\} \notin U$ car par élémentarité de $\boldsymbol{j}$ et absoluité de la formule $\{x\} = y$, nous avons $\boldsymbol{j}(\{\alpha\}) = \{\boldsymbol{j}(\alpha)\} = \{\alpha\}$.

Le fait que pour $X \subseteq \kappa$ $\kappa \in \boldsymbol{j}(X)$ ou $\kappa \in \boldsymbol{j}(\kappa - X)$ découle de l'absoluité de la formule $z = x \cup y$ et de l'élémentarité de $\boldsymbol{j}$. En effet, nous avons pour tout $X \subseteq \kappa$ que $\boldsymbol{j}(\kappa) = \boldsymbol{j}(X) \cup \boldsymbol{j}(\kappa - X)$.

Pour la κ-complétude, soit $\gamma < \kappa$ et $F \in {}^{\gamma}U$. Alors comme $\kappa \in \boldsymbol{j}(F(\alpha))$ pour tout $\alpha < \gamma$, nous avons $\kappa \in \bigcap_{\alpha<\gamma} \boldsymbol{j}(F(\alpha))$. Or comme $\boldsymbol{j}(\alpha) = \alpha$ pour tout $\alpha < \gamma$ et comme « être une fonction » est une formule absolue pour les modèles transitifs de ZFC, $\boldsymbol{j}(F)$ est une fonction de domaine γ telle que $\boldsymbol{j}(F)(\alpha) = \boldsymbol{j}(F(\alpha))$. Par conséquent,

$$\boldsymbol{j}\Big(\bigcap\{F(\alpha) \mid \alpha < \gamma\}\Big) = \bigcap\{\boldsymbol{j}(F)(\alpha) \mid \alpha < \gamma\} = \bigcap\{\boldsymbol{j}(F(\alpha)) \mid \alpha < \gamma\},$$

et donc $\bigcap\{F(\alpha) \mid \alpha < \gamma\} \in U$. □

Pour l'ultrafiltre κ-complet U défini sur $\kappa = \mathrm{crit}(\boldsymbol{j})$ dans le théorème précédent, nous pouvons considérer le modèle intérieur $\mathbf{Ult}(U)$ et l'injection élémentaire $\boldsymbol{j}_U : V \to \mathbf{Ult}(U)$. Observons que $\boldsymbol{j}$ peut être factorisée comme $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \circ \boldsymbol{j}_U$ pour l'injection élémentaire $\boldsymbol{k} : \mathbf{Ult}(U) \to \boldsymbol{M}$ définie par

$$\boldsymbol{k}([f]_U) = \boldsymbol{j}(f)(\kappa).$$

La fonctionnelle $\boldsymbol{k}$ est bien injective car si pour $f, g : \kappa \to V$, nous avons $\boldsymbol{k}([f]_U) = \boldsymbol{k}([g]_U)$, alors $\boldsymbol{j}(f)(\kappa) = \boldsymbol{j}(g)(\kappa)$ et donc

$$\kappa \in \{\alpha < \boldsymbol{j}(\kappa) \mid \boldsymbol{j}(f)(\alpha) = \boldsymbol{j}(g)(\alpha)\} = \boldsymbol{j}(\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) = g(\alpha)\}),$$

ainsi par définition de U, $[f]_U = [g]_U$.

De plus $\boldsymbol{k}$ est élémentaire. En effet, soit $\phi(v_1, \ldots, v_n)$ une formule de la théorie des ensembles et $[f_1]_U, \ldots, [f_n]_U \in \mathbf{Ult}(U)$. Alors,

$$\begin{aligned} \text{ZFC} \vdash \phi\left[[f_1]_U, \ldots, [f_n]_U\right]^{\mathbf{Ult}(U)} &\longleftrightarrow \{\alpha < \kappa \mid \phi[f_1(\alpha), \ldots, f_n(\alpha)]\} \in U \\ &\longleftrightarrow \kappa \in \{\alpha < \boldsymbol{j}(\kappa) \mid \phi[\boldsymbol{j}(f_1)(\alpha), \ldots, \boldsymbol{j}(f_n)(\alpha)]^{\boldsymbol{M}}\} \\ &\longleftrightarrow \phi[\boldsymbol{j}(f_1)(\kappa), \ldots, \boldsymbol{j}(f_n)(\kappa)]^{\boldsymbol{M}} \\ &\longleftrightarrow \phi[\boldsymbol{k}([f_1]_U), \ldots, \boldsymbol{k}([f_n]_U)]^{\boldsymbol{M}} \end{aligned}$$

où la première équivalence découle du Théorème 2.2.1, la seconde provient de la définition de U, la troisième est évidente, tandis que la dernière est la définition de $\boldsymbol{k}$.

Pour voir que $\boldsymbol{k} \circ \boldsymbol{j}_U = \boldsymbol{j}$, rappelons que pour $x \in V$, $\boldsymbol{j}_U(x) = [c_x]_U$, où $c_x : \kappa \to \{x\}$ est la fonction constante. Par conséquent, pour tout $x \in V$,

$$\boldsymbol{k}(\boldsymbol{j}_U(x)) = \boldsymbol{k}([c_x]_U) = \boldsymbol{j}(c_x)(\kappa) = \boldsymbol{j}(x).$$

Nous résumons cette factorisation par le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd} & \boldsymbol{M} \\ V \arrow[ur, "\boldsymbol{j}"] \arrow[r, "\boldsymbol{j}_U"'] & \mathbf{Ult}(U) \arrow[u, "\boldsymbol{k}"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} &\operatorname{crit}(\boldsymbol{j}) = \kappa \\ &U = \{X \subseteq \kappa \mid \kappa \in \boldsymbol{j}(X)\} \\ &\boldsymbol{k}([f]_U) = \boldsymbol{j}(f)(\kappa). \end{aligned}$$

Notons finalement que nous pouvons généraliser la construction précédente.

Définition 2.2.5. Soient $(\boldsymbol{M}, \in)$ un modèle transitif de ZFC et $S \in \boldsymbol{M}$. Une collection $U \subseteq \mathscr{P}^{\boldsymbol{M}}(S) = \mathscr{P}(S) \cap \boldsymbol{M}$ est un **$\boldsymbol{M}$-ultrafiltre** sur S si :

i) $S \in U$ et $\emptyset \notin U$;
ii) si $X \in U$ et $Y \in U$, alors $X \cap Y \in U$;
iii) si $X \in U$ et $Y \in \mathscr{P}^{\boldsymbol{M}}(S)$ avec $X \subseteq Y$, alors $Y \in U$.
iv) pour tout tout $X \in \mathscr{P}^{\boldsymbol{M}}(S)$, $X \in U$ ou $S - X \in U$;

Si $\boldsymbol{M}$ est un modèle transitif de ZFC et U est un $\boldsymbol{M}$-ultrafiltre sur $S \in \boldsymbol{M}$, alors nous pouvons former l'ultrapuissance $(\mathbf{Ult}(\boldsymbol{M}, U), \boldsymbol{E}_U)$ de façon similaire. En fait, la formule $\mathbf{Ult}(\boldsymbol{M}, U)(x)$ est $\left(\mathbf{Ult}(U)(x)\right)^{\boldsymbol{M}}$ qui est équivalente à

$$\mathbf{Ult}(\boldsymbol{M}, U)(x) : \left(\exists f \in {}^S\boldsymbol{M} \cap \boldsymbol{M}\right) x = [f]_U.$$

Avec une démonstration similaire, l'analogue du Théorème 2.2.1 est

$$\text{ZFC} \vdash \phi\left[[f_1]_U, \ldots, [f_n]_u\right]^{\mathbf{Ult}(\boldsymbol{M}, U), \boldsymbol{E}_U} \longleftrightarrow \{s \in S \mid \phi[f_1(s), \ldots f_n(s)]^{\boldsymbol{M}}\} \in U.$$

et en particulier pour tout énoncé σ,

$$\mathrm{ZFC} \vdash \sigma^{\mathbf{Ult}(\boldsymbol{M},U),\boldsymbol{E}_U} \longleftrightarrow \sigma^{\boldsymbol{M}}.$$

Si U est un $\boldsymbol{M}$-ultrafiltre mais que $U \notin \boldsymbol{M}$, alors l'ultrapuissance de $\boldsymbol{M}$ par U n'est pas nécessairement bien fondée.

Par souci de clarté, nous noterons parfois $\mathbf{Ult}(V,U) = \mathbf{Ult}(U)$ l'ultrapuissance de l'univers V.

2.3 Limites directes d'ultrapuissances

Définition 2.3.1. Un **système inductif d'ultrafiltres** pour un ensemble Z est un système $\mathcal{U} = \langle U_a \mid a \in D\rangle$ vérifiant les conditions suivantes :

0) D est un ensemble **inductif** non vide, i.e. $D \neq \emptyset$ et pour tous $a,b \in D$, il existe $c \in D$ tel que $a \cup b \subseteq c$;
1) Pour tout $a \in D$, U_a est un ultrafiltre $\aleph_1$-complet sur ${}^aZ$, l'ensemble des fonctions de a vers Z.
2) Les ultrafiltres U_a sont **compatibles**, i.e. si $a,b \in D$ avec $a \subseteq b$, alors pour tout $X \subseteq {}^aZ$,

$$X \in U_a \quad \text{si et seulement si} \quad \{f \in {}^bZ \mid f\restriction a \in X\} \in U_b.$$

Nous supposons pour cette section l'existence d'un système inductif d'ultrafiltres $\mathcal{U} = \langle U_a \mid a \in D\rangle$ sur un ensemble Z.

En définissant pour $a,b \in D$ tels que $a \subseteq b$ la fonction $\pi_{b,a} : {}^bZ \to {}^aZ$ par $\pi_{b,a}(f) = f\restriction a$, la condition 2) devient : pour tous $a,b \in D$ tels que $a \subseteq b$ nous avons pour tout $X \subseteq {}^aZ$

$$X \in U_a \quad \text{si et seulement si} \quad \pi_{b,a}^{-1}(X) \in U_b.$$

Pour chaque $a \in D$, nous considérons l'ultrapuissance

$$\boldsymbol{j}_a = \boldsymbol{j}_{U_a} : V \to \mathbf{Ult}(U_a).$$

Nous pouvons considérer une formule $\boldsymbol{j}(x,y,p)$ et une formule $\mathbf{Ult}(p)$ de sorte que pour tout $a \in D$, nous avons $\boldsymbol{j}_a(x,y) = \boldsymbol{j}(x,y,a)$ est une injection élémentaire de V dans $\mathbf{Ult}(U_a) = \mathbf{Ult}(a)$. Pour alléger les notations, nous notons $[f]_a$ pour un élément $[f]_{U_a}$ de $\mathbf{Ult}(U_a)$. Pour tout $a \subseteq b$ dans D, nous définissons l'injection élémentaire $\boldsymbol{j}_{a,b} : \mathbf{Ult}(U_a) \to \mathbf{Ult}(U_b)$ par

$$\boldsymbol{j}_{a,b}([F]_a) = [F \circ \pi_{b,a}]_b$$

Les injections élémentaires $\boldsymbol{j}_{a,b}$ sont données par une formule $\boldsymbol{j}(x,y,p_1,p_2)$ telle que pour tous $a,b \in D$ avec $a \subseteq b$,

$$\boldsymbol{j}_{a,b}([F]_a) = [G]_b \quad \text{si et seulement si} \quad \boldsymbol{j}([F]_a,[G]_b,a,b)$$

Les fonctionnelles $\boldsymbol{j}_{a,b}$ sont bien définies et injectives par la compatibilité de U_a. En effet, pour tous $[F]_a, [G]_a \in \mathbf{Ult}(U_a)$, nous avons par compatibilité que

$$\{f \in {}^aZ \mid F(f) = G(f)\} \in U_a \quad \text{si et seulement si} \quad \{g \in {}^bZ \mid F(g\restriction a) = G(g\restriction a)\} \in U_b.$$

De plus, chaque $\boldsymbol{j}_{a,b}$ est élémentaire car pour tout formule $\phi(v_1, \ldots, v_n)$ du langage de la théorie des ensembles et tous $[F_1]_{U_a}, \ldots, [F_n]_{U_a}$

$$\begin{aligned} \mathrm{ZFC} \vdash \phi\left[[F_1]_a, \ldots, [F_n]_a\right]^{\mathbf{Ult}(U_a)} &\longleftrightarrow \{f \in {}^aZ \mid \phi[F_1(f), \ldots, F_n(f)]\} \in U_a \\ &\longleftrightarrow \{f \in {}^bZ \mid \phi[F_1(f\restriction a), \ldots, F_n(f\restriction a)]\} \in U_b \\ &\longleftrightarrow \phi\left[\boldsymbol{j}_{a,b}([F_1]_a), \ldots, \boldsymbol{j}_{a,b}([F_n]_a)\right]^{\mathbf{Ult}(U_b)} \end{aligned}$$

où la première et la troisième équivalence sont données par le Théorème 2.2.1, tandis que la deuxième découle de la compatibilité des U_a.

Observons que pour tout $a \subseteq b$, nous avons $\boldsymbol{j}_{a,b} \circ \boldsymbol{j}_a = \boldsymbol{j}_b$ car pour tout $x \in V$

$$\boldsymbol{j}_{a,b} \circ \boldsymbol{j}_a(x) = \boldsymbol{j}_{a,b}([c^a_x]_a) = [c^a_x \circ \pi_{b,a}]_b = [c^b_x]_b = \boldsymbol{j}_b(x)$$

où $c^d_x : {}^dZ \to \{x\}$ est la fonction constante. Nous représentons ceci par le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Ult}(U_a) \arrow[rr, "\boldsymbol{j}_{a,b}"] & & \mathbf{Ult}(U_b) \\ & V \arrow[ul, "\boldsymbol{j}_a"] \arrow[ur, "\boldsymbol{j}_b"'] & \end{tikzcd}$$

De plus, pour tous $a, b, c \in D$ tels que $a \subseteq b$ et $b \subseteq c$, nous avons $\boldsymbol{j}_{b,c} \circ \boldsymbol{j}_{a,b} = \boldsymbol{j}_{a,c}$.

Nous allons former la limite directe [1] du système inductif

$$\langle \boldsymbol{j}_{a,b} : \mathbf{Ult}(U_a) \to \mathbf{Ult}(U_b) \mid a, b \in D \wedge a \subseteq b \rangle.$$

À cette fin, nous considérons la classe $\mathscr{F}_{D,Z}$ des fonctions de domaine ${}^aZ$ pour un $a \in D$ et nous définissons sur celle-ci la relationnelle d'équivalence suivante. Pour $F : {}^aZ \to V$ et $G : {}^bZ \to V$,

$$\begin{aligned} F \sim G \quad &\text{si et seulement si} \quad \forall c \in D(a \cup b \subseteq c) \to \{h \in {}^cZ \mid F(h\restriction a) = G(h\restriction b)\} \in U_c \\ &\text{si et seulement si} \quad \forall c \in D(a \cup b \subseteq c) \to [f \circ \pi_{c,a}]_c = [f \circ \pi_{c,b}]_c \\ &\text{si et seulement si} \quad \forall c \in D(a \cup b \subseteq c) \to \boldsymbol{j}_{a,c}([F]_c) = \boldsymbol{j}_{b,c}([G]_b). \end{aligned}$$

Comme pour la construction d'ultrapuissance, nous définissons la classe d'équivalence d'une fonction $F : {}^aZ \to V$ comme l'ensemble de ses éléments de rang minimal

$$[\![F]\!]_{\mathscr{U}} = \{G \in \mathscr{F}_{D,Z} \mid F \sim G \wedge \forall H \in \mathscr{F}_{D,Z}\big(F \sim H \to \mathrm{rang}(G) \leq \mathrm{rang}(H)\big)\}$$

1. la limite directe est, à proprement parler, la colimite du diagramme formé par les $\boldsymbol{j}_{a,b}$ et les $\mathbf{Ult}(U_a)$ au sens de la théorie des catégorie. Cependant, les objets considérés sont des classes propres que nous manipulons en tant que formules. Nous avons adopté le point de vue selon lequel ces considérations sont syntaxiques et nous nous refusons donc un travail sémantique dans une catégorie.

Nous formons alors la classe $\mathbf{Ult}(\mathscr{U})$ des $[\![F]\!]_{\mathscr{U}}$ avec $F : {}^aZ \to V$ et $a \in D$ qui est définie par la formule

$$\mathbf{Ult}(\mathscr{U})(x) : (\exists a \in D)(\exists F : {}^aZ \to V)\big(x = [\![F]\!]_{\mathscr{U}}\big).$$

Nous définissons sur cette classe la relationnelle $\boldsymbol{E}_{\mathscr{U}}$ pour $[\![F]\!]_{\mathscr{U}}, [\![G]\!]_{\mathscr{U}} \in \mathbf{Ult}(\mathscr{U})$ par

$$\begin{aligned}[\![F]\!]_{\mathscr{U}} \boldsymbol{E}_{\mathscr{U}} [\![G]\!]_{\mathscr{U}} \quad &\longleftrightarrow \quad (\forall c \in D)\big((a \cup b \subseteq c) \to \{f \in {}^cZ \mid F(f \restriction a) \in G(f \restriction b)\} \in U_c\big)\\ &\longleftrightarrow \quad (\forall c \in D)\big((a \cup b \subseteq c) \to \boldsymbol{j}_{a,c}([F]_a) \in \boldsymbol{j}_{b,c}([G]_b)\big)\end{aligned}$$

où $F : {}^aZ \to V$ et $G : {}^bZ \to V$.

Nous avons ainsi défini une interprétation relative de la théorie des ensembles $(\mathbf{Ult}(\mathscr{U}), \boldsymbol{E}_{\mathscr{U}})$ que nous appelons l'**ultrapuissance** de V par le système inductif d'ultrafiltres $\mathscr{U}$.

Pour tout $a \in D$, nous avons la fonctionnelle injective $\boldsymbol{e}_a : \mathbf{Ult}(U_a) \to \mathbf{Ult}(\mathscr{U})$ définie par

$$\boldsymbol{e}_a([F]_a) = [\![F]\!]_{\mathscr{U}}.$$

Lemme 2.3.2. *Pour chaque $a \in D$, $\boldsymbol{e}_a : \mathbf{Ult}(U_a) \to \mathbf{Ult}(\mathscr{U})$ est élémentaire.*

Démonstration. Nous montrons le schéma d'élémentarité par induction sur la hauteur des formules simultanément pour tout $a \in D$. Pour la formule atomique $x = y$, nous avons pour tous $[F]_a, [G]_a \in \mathbf{Ult}(U_a)$ que

$$\begin{aligned}\mathrm{ZFC} \vdash [F]_a = [G]_a &\longleftrightarrow \{f \in {}^aZ \mid F(f) = G(f)\} \in U_a\\ &\longleftrightarrow (\forall c \in D)\big(a \subseteq c \to \{f \in {}^cZ \mid F(f \restriction a) = G(f \restriction a)\} \in U_c\big)\\ &\longleftrightarrow [\![F]\!]_{\mathscr{U}} = [\![G]\!]_{\mathscr{U}},\end{aligned}$$

où l'implication dans le sens direct de la deuxième équivalence découle de la compatibilité des U_a. Pour la formule atomique $x \in y$, nous avons de même pour tous $[F]_a, [G]_a \in \mathbf{Ult}(U_a)$ que

$$\begin{aligned}\mathrm{ZFC} \vdash [F]_a \in [G]_a &\longleftrightarrow \{f \in {}^aZ \mid F(f) \in G(f)\} \in U_a\\ &\longleftrightarrow (\forall c \in D)\big(a \subseteq c \to \{f \in {}^cZ \mid F(f \restriction a) \in G(f \restriction a)\} \in U_c\big)\\ &\longleftrightarrow [\![F]\!]_{\mathscr{U}} \boldsymbol{E}_{\mathscr{U}} [\![G]\!]_{\mathscr{U}} \longleftrightarrow \big([\![F]\!]_{\mathscr{U}} \in [\![G]\!]_{\mathscr{U}}\big)^{\mathbf{Ult}(\mathscr{U}), \boldsymbol{E}_{\mathscr{U}}}.\end{aligned}$$

Le cas des connecteurs logiques $\wedge$ et $\neg$ est immédiat à partir de l'hypothèse d'induction et de la définition de la relativisation d'une formule.

Considérons finalement la formule $\exists x \phi(v)$. Supposons pour commencer que $\big(\exists x \phi[[F]_a]\big)^{\mathbf{Ult}(U_a)}$. Il existe alors $[G]_a \in \mathbf{Ult}(U_a)$ tel que $\phi[[G]_a, [F]_a]^{\mathbf{Ult}(U_a)}$ et, par hypothèse d'induction, nous avons $\phi[[\![G]\!]_{\mathscr{U}}, [\![F]\!]_{\mathscr{U}}]^{\mathbf{Ult}(\mathscr{U}), \boldsymbol{E}_{\mathscr{U}}}$. Il s'ensuit que

$$\big(\exists x \phi[[\![F]\!]_{\mathscr{U}}]\big)^{\mathbf{Ult}(\mathscr{U}), \boldsymbol{E}_{\mathscr{U}}}.$$

Réciproquement, supposons que $\big(\exists x \phi[[\![F]\!]_{\mathscr{U}}]\big)^{\mathbf{Ult}(\mathscr{U}), \boldsymbol{E}_{\mathscr{U}}}$. Il existe alors $b \in D$ et $G : {}^bZ \to V$ tel que $\phi\big[[\![G]\!]_{\mathscr{U}}, [\![F]\!]_{\mathscr{U}}\big]^{\mathbf{Ult}(\mathscr{U}), \boldsymbol{E}_{\mathscr{U}}}$. Pour $c \in D$ tel que $a \cup b \subseteq c$, nous avons par hypothèse d'induction que

$$\big(\phi[\boldsymbol{j}_{b,c}(G), \boldsymbol{j}_{a,c}(F)]\big)^{\mathbf{Ult}(U_c)}$$

Par conséquent, $\left(\exists x\, \phi\,[\boldsymbol{j}_{a,c}]\right)^{\mathbf{Ult}(U_c)}$ et par le Théorème 2.2.1 nous avons

$$\{f \in {}^{c}Z \mid \exists x\, \phi\,[F(f \restriction a)]\} \in U_c.$$

Par compatibilité des ultrafiltres U_d $d \in D$, il s'ensuit que

$$\{f \in {}^{a}Z \mid \exists x\, \phi\,[F(f)]\} \in U_a.$$

En utilisant une nouvelle fois le Théorème 2.2.1, nous obtenons $\left(\exists x\, \phi\,[[F]_a]\right)^{\mathbf{Ult}(U_a)}$.

$\square$

Remarquons aussi que pour tout $a, b \in D$ tels que $a \subseteq b$, $\boldsymbol{e}_b \circ \boldsymbol{j}_{a,b} = \boldsymbol{e}_a$. En effet, par définition de l'égalité dans $\mathbf{Ult}(\mathscr{U})$, pour tout $F : {}^{a}Z \to V$,

$$\boldsymbol{e}_b \circ \boldsymbol{j}_{a,b}([F]_a = \boldsymbol{e}_b([F \circ \pi_{b,a}]_b) = [\![F \circ \pi_{b,a}]\!]_{\mathscr{U}} = [\![F]\!]_{\mathscr{U}} = \boldsymbol{e}_a([F]_a)$$

Nous représentons ceci par le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
& (\mathbf{Ult}(\mathscr{U}), \boldsymbol{E}_{\mathscr{U}}) & \\
\mathbf{Ult}(U_a) \arrow[ur, "\boldsymbol{e}_a"] \arrow[rr, "\boldsymbol{j}_{a,b}"'] & & \mathbf{Ult}(U_b) \arrow[ul, "\boldsymbol{e}_b"']
\end{tikzcd}$$

Nous avons une version du théorème de Łoś pour notre interprétation relative $(\mathbf{Ult}(\mathscr{U}), \boldsymbol{E}_{\mathscr{U}})$.

Théorème 2.3.3. *Pour toute formule $\phi(v_1, \dots, v_n)$ du langage de la théorie des ensembles et toutes fonctions $F_i : {}^{a_i}Z \to V$ avec $a_i \in D$, $i = 1, \dots n$,*

$$\begin{aligned}
&\mathrm{ZFC} \vdash \phi\left[[\![F_1]\!]_{\mathscr{U}}, \dots, [\![F_n]\!]_{\mathscr{U}}\right]^{\mathbf{Ult}(\mathscr{U}), \boldsymbol{E}_{\mathscr{U}}} \\
&\qquad \longleftrightarrow (\forall c \in D)\left(\bigcup_{i=1}^{n} a_i \subseteq c \to \{f \in {}^{c}Z \mid \phi\,[F_1(f \restriction a_1), \dots, F_n(f \restriction a_n)]\} \in U_c\right)
\end{aligned}$$

En particulier, pour tout énoncé σ du langage de la théorie des ensembles,

$$\mathrm{ZFC} \vdash \sigma^{\mathbf{Ult}(\mathscr{U}), \boldsymbol{E}_{\mathscr{U}}} \longleftrightarrow \sigma.$$

Démonstration. Pour $c \in D$ tel que $\bigcup_{i=1}^{n} a_i \subseteq c$, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathrm{ZFC} \vdash &\{f \in {}^{c}Z \mid \phi\,[F_1(f \restriction a_1), \dots, F_n(f \restriction a_n)]\} \in U_c \\
&\longleftrightarrow \left(\phi\left[\boldsymbol{j}_{a_1,c}([F_1]_{a_1}), \dots, \boldsymbol{j}_{a_n,c}([F_n]_{a_n})\right]\right)^{\mathbf{Ult}(U_c)} \\
&\longleftrightarrow \left(\phi\left[\boldsymbol{e}_{a_1}([F_1]_{a_1}), \dots, \boldsymbol{e}_{a_n}([F_n]_{a_n})\right]\right)^{\mathbf{Ult}(\mathscr{U}), \boldsymbol{E}_U} \\
&\longleftrightarrow \left(\phi\left[[\![F_1]\!]_{\mathscr{U}}, \dots, [\![F_n]\!]_{\mathscr{U}}\right]\right)^{\mathbf{Ult}(\mathscr{U}), \boldsymbol{E}_U}.
\end{aligned}$$

La première équivalence découle du Théorème 2.2.1. La deuxième est conséquence de l'élémentarité de $\boldsymbol{e}_c$ prouvée dans le Lemme 2.3.2 et de la remarque précédant l'énoncé du théorème selon laquelle pour $a \subseteq b$, $\boldsymbol{e}_b \circ \boldsymbol{j}_{a,b} = \boldsymbol{e}_a$. La troisième équivalence tient simplement par définition des $\boldsymbol{e}_a$. $\square$

Nous définissons l'injection élémentaire $\boldsymbol{j}_{\mathscr{U}} : V \to \mathbf{Ult}(\mathscr{U})$ par $\boldsymbol{j}_{\mathscr{U}}(x) = [\![c_x^a]\!]_{\mathscr{U}}$ pour tout $x \in V$, où $c_x^a : {}^aZ \to \{x\}$ est la fonction constante pour un $a \in D$. Cette définition est justifiée par le fait que pour tout $a, b \in D$, nous avons pour $c \in D$ avec $a \cup b \subseteq c$ que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd}
 & (\mathbf{Ult}(\mathscr{U}), \boldsymbol{E}_{\mathscr{U}}) & \\
\mathbf{Ult}(U_a) \arrow[ur, "\boldsymbol{e}_a"] \arrow[r, "\boldsymbol{j}_{a,c}"'] & \mathbf{Ult}(U_c) \arrow[u, "\boldsymbol{e}_c"] & \mathbf{Ult}(U_b) \arrow[ul, "\boldsymbol{e}_b"'] \arrow[l, "\boldsymbol{j}_{b,c}"] \\
 & V \arrow[ul, "\boldsymbol{j}_a"] \arrow[u, "\boldsymbol{j}_c"] \arrow[ur, "\boldsymbol{j}_b"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{aligned}
\boldsymbol{j}_{\mathscr{U}} &= \boldsymbol{e}_a \circ \boldsymbol{j}_a \\
&= \boldsymbol{e}_b \circ \boldsymbol{j}_b
\end{aligned}$$

Comme pour l'ultrapuissance par un ultrafiltre, le fait que $\boldsymbol{E}_{\mathscr{U}}$ est extensionnelle sur $\mathbf{Ult}(\mathscr{U})$ est vérifié puisque ZFC montre la relativisation à $(\mathbf{Ult}(\mathscr{U}), \boldsymbol{E}_{\mathscr{U}})$ de l'axiome d'extensionnalité par le Théorème 2.3.3.

En outre, $\boldsymbol{E}_{\mathscr{U}}$ est « set like » sur $\mathbf{Ult}(\mathscr{U})$. Pour voir ceci, considérons $[\![G]\!]_{\mathscr{U}}, [\![F]\!]_{\mathscr{U}}$ des membres de $\mathbf{Ult}(\mathscr{U})$ avec $F : {}^aZ \to V$ et $G : {}^bZ \to V$ tels que $[\![G]\!]_{\mathscr{U}} \boldsymbol{E}_{\mathscr{U}} [\![F]\!]_{\mathscr{U}}$. Pour tout $c \in D$ tel que $a \cup b \subseteq c$, nous avons

$$[G \circ \pi_{c,b}]_c \in [F \circ \pi_{c,a}]_c,$$

ainsi par élémentarité de $\boldsymbol{j}_c$, nous avons $\operatorname{rang}(G \circ \pi_{b,c}) < \operatorname{rang}(F \circ \pi_{c,a})$. Or par remplacement, $\sup\{\operatorname{rang}(F \circ \pi_{d,a}) \mid d \in D\} = \alpha$ existe. Comme $\operatorname{rang}(G) \leq \operatorname{rang}(G \circ \pi_{b,c})$ pour tout $c \in D$ avec $b \subseteq c$, il s'ensuit que $[\![G]\!]_{\mathscr{U}} \subseteq V_\alpha$ et donc

$$\left\{[\![G]\!]_{\mathscr{U}} \in \mathbf{Ult} \mid [\![G]\!]_{\mathscr{U}} \boldsymbol{E}_{\mathscr{U}} [\![F]\!]_{\mathscr{U}}\right\} \subseteq V_{\alpha+1}.$$

Quant au fait que $\boldsymbol{E}_{\mathscr{U}}$ est bien fondée sur $\mathbf{Ult}(\mathscr{U})$, nous avons le résultat suivant.

Lemme 2.3.4. *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1) *$(\mathbf{Ult}(\mathscr{U}), \boldsymbol{E}_{\mathscr{U}})$ est mal fondé.*
2) *Il existe un ensemble dénombrable $D' \subseteq D$ et une famille $\{X_a \mid a \in D'\}$ avec $X_a \in U_a$ pour tout $a \in D'$, tels qu'il n'existe pas de fonction $f : \bigcup D' \to Z$ avec $f{\restriction}a \in X_a$ pour tout $a \in D'$.*

De plus, si D est dénombrable, 1) et 2) sont équivalents à

3) *Il existe $\{X_a \mid a \in D\}$ avec $X_a \in U_a$ pour tout $a \in D$ tel qu'il n'existe pas de fonction $f : \bigcup D \to Z$ avec $f{\restriction}a \in X_a$ pour tout $a \in D$.*

Démonstration. 1)⇒2). Soit $\{[\![F_n]\!]_{\mathscr{U}} \mid n \in \omega\}$ une suite infinie descendante pour $\boldsymbol{E}_{\mathscr{U}}$ dans $\mathbf{Ult}(\mathscr{U})$ avec $F_n : {}^{a_n}Z \to V$ pour tout $n \in \omega$. Par définition de $\boldsymbol{E}_{\mathscr{U}}$ et la compatibilité des U_a, nous pouvons supposer que $a_m \subseteq a_n$ pour tous $m, n \in \omega$ avec $m \leq n$. Posons $D' = \{a_n \mid n \in \omega\}$. Définissons par induction sur ω, $X_{a_0} = {}^{a_0}Z$ et pour tout $n \in \omega$,

$$X_{a_{n+1}} = \{f \in {}^{a_{n+1}}Z \mid F_{n+1}(f) \in F_n(f{\restriction}a_n)\} \in U_{a_{n+1}}.$$

Supposons maintenant que pour $f : \bigcup D' \to Z$, $f \restriction a_n \in X_{a_n}$ pour tout $n \in \omega$. Alors la suite infinie $\{F_n(f \restriction a_n) \mid n \in \omega\}$ est descendante pour l'appartenance dans V. Ce qui est une contradiction.

2)⇒1). Supposons que D' et $\{X_a \mid a \in D'\}$ satisfont 2). Fixons une énumération $D' = \{a_n \mid n \in \omega\}$. Comme D est inductif, nous pouvons définir par induction sur ω une suite $B = \{b_n \mid n \in \omega\} \subseteq D$ telle que $b_n \subseteq b_{n+1}$ et $a_n \subseteq b_n$ pour tout $n \in \omega$. Notons que $D' \subseteq B$ et que par compatibilité de $\mathscr{U}$, $Y_{b_n} = \pi^{-1}_{b_n,a_n}(X_{a_n}) \in U_{b_n}$. Maintenant si $f : \bigcup B \to Z$ est telle que $f \restriction b_n \in Y_{b_n}$ pour tout $n \in \omega$, alors pour $f' = f \restriction (\bigcup D')$, nous avons $f' \restriction a_n \in X_{a_n}$ pour tout $n \in \omega$. Par conséquent, nous pouvons supposer sans perte de généralité que les a_n vérifient $a_n \subseteq a_{n+1}$ pour tout $n \in \omega$. Nous pouvons de plus supposer que pour tout $m \leq n$ dans ω, $\pi_{a_n,a_m}(X_{a_n}) \subseteq X_{a_m}$. En effet, définissons par induction sur ω, $Y_{a_0} = X_{a_0}$ et $Y_{a_{n+1}} = X_{a_n} \cap \pi^{-1}_{a_{n+1},a_n}(Y_{a_n})$ pour tout $n \in \omega$. Nous avons alors bien que $\pi_{a_{n+1},a_n}(Y_{a_{n+1}}) \subseteq Y_{a_n}$ et aussi $Y_{a_n} \subseteq X_{a_n}$ pour tout $n \in \omega$. Aussi comme pour tous $m \leq n$, $\pi_{a_n,a_m} = \pi_{a_{m+1},a_m} \circ \cdots \circ \pi_{a_n,a_{n-1}}$, nous avons $\pi_{a_n,a_m}(Y_{a_n}) \subseteq Y_{a_m}$ pour tous $m \leq n$. En outre, il n'existe pas de fonction $f : \bigcup D' \to Z$ telle que $f \restriction a_n \in Y_{a_n}$ car $Y_{a_n} \subseteq X_{a_n}$.

Nous supposons donc qu'il existe $D' = \{a_n \mid n \in \omega\}$ et $\{X_{a_n} \mid n \in \omega\}$ tels que $a_m \subseteq a_n$ et $\pi_{a_n,a_m}(X_{a_n}) \subseteq X_{a_m}$ pour tous $m \leq n$. Nous définissons alors l'arbre suivant

$$T = \left\{(f_i \mid i < n) \middle| n \in \omega \wedge (\exists f \in X_{a_{n-1}})(\forall i < n) f_i = f \restriction a_i \right\},$$

que nous ordonnons partiellement par

$$s_1 \prec s_2 \quad \text{si et seulement si} \quad \operatorname{long}(s_1) < \operatorname{long}(s_2) \wedge s_2 \restriction \operatorname{long}(s_1) = s_1$$

Par l'hypothèse sur D' et $\{X_{a_n} \mid n \in \omega\}$, $(T, \prec)$ est bien fondé car une branche infinie signifie par définition de T une fonction $f : \bigcup D' \to Z$ telle que $f \restriction a_n \in X_{a_n}$ pour tout $n \in \omega$. Nous définissons donc par induction sur T pour la relation bien fondée $\prec$,

$$\operatorname{rang}_T(s) = \sup\{\operatorname{rang}_T(t) + 1 \mid t \in T \wedge t \prec s\}.$$

Finalement pour tout $n \in \omega$, nous définissons $F_n : {}^{a_n}Z \to \omega$ par

$$F_n(f) = \begin{cases} \operatorname{rang}_T(f \restriction a_i \mid i < n+1) & \text{si } f \in X_{a_n} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous avons alors pour tout $n \in \omega$ que $[\![F_{n+1}]\!]_{\mathscr{U}} \boldsymbol{E}_{\mathscr{U}} [\![F_n]\!]_{\mathscr{U}}$ car

$$X_{a_{n+1}} \subseteq \{f \in {}^{a_{n+1}}Z \mid F_{n+1}(f) \in F_n(f \restriction a_n)\} \in U_{a_n},$$

et donc $\{[\![F_n]\!]_{\mathscr{U}} \mid n \in \omega\}$ est une suite infinie descendante pour $\boldsymbol{E}_{\mathscr{U}}$ dans $\mathbf{Ult}(\mathscr{U})$.

2)⇒ 3). Supposons que D est dénombrable et que D' et $\{X_a \mid a \in D'\}$ satisfont 2). En posant $X_a = {}^aZ$ pour tout $a \in D - D'$, $\{X_a \mid a \in D\}$ satisfait 3).

3)⇒ 2). Immédiat. □

Convention. Si $\mathscr{U}$ est système inductif d'ultrafiltres pour Z et que l'ultrapuissance $(\mathbf{Ult}(\mathscr{U}), \boldsymbol{E}_{\mathscr{U}})$ de V par le système inductif $\mathscr{U}$ est bien fondée, nous convenons que $(\mathbf{Ult}(\mathscr{U}), \in)$, ou simplement $\mathbf{Ult}(\mathscr{U})$, dénote le modèle transitif de ZFC fourni par le théorème de collapse de Mostowski. De plus, l'injection élémentaire $\boldsymbol{j}_U : V \to \mathbf{Ult}(\mathscr{U})$ désigne la composition de l'injection élémentaire $\boldsymbol{j}_{\mathscr{U}}$ avec l'isomorphisme donné par le théorème de collapse de Mostowski. Pour $f : {}^aZ \to V$, nous conservons cependant la notation $[\![f]\!]_{\mathscr{U}}$ pour représenter l'élément correspondant dans le collapse de Mostowski.

Notes. Le terme « interprétation relative » et sa définition vient de [Kun80]. Les sections 2.1 et 2.2 sont essentiellement tirées de la section 5 du chapitre 1 de [Kan94]. La source de la section 2.3 est l'article [MS89].

Chapitre 3

Arbres homogènes

Le monde
est devenu
un cerisier en fleur

Ryôkan

En mathématiques, la réponse à une question difficile passe systématiquement par une réduction à une question plus simple.
La question de la détermination d'un jeu compliqué passe par la détermination d'un jeu simple, d'un jeu fermé. Dans un cadre très général, si un ensemble de suites infinies est la projection du corps d'un arbre, alors il existe un jeu auxiliaire fermé. Si l'arbre est homogène, alors les stratégies gagnantes pour ce jeu auxiliaire se transportent au jeu qui nous intéresse.

3.1 Définition

Un **arbre** est un ensemble T muni d'un ordre partiel $\prec$ dont chaque segment initial $\{s \in T \mid s \prec t\}$ est bien ordonné.

Par un **arbre sur** un ensemble X, nous entendons un sous-ensemble T de ${}^{<\omega}X$ clos par préfixe, i.e. tel que pour tout $s \in {}^{<\omega}X$ et tout $t \in T$, $s \subseteq t$ implique $s \in T$. Nous ordonnons partiellement un arbre sur un ensemble X par $s \prec t$ si et seulement si t étend proprement s, i.e. $s \subsetneq t$.

Nous disons qu'un arbre $(T, \prec)$ est **bien fondé** si la relation inverse $s \succ t$ si et seulement si $t \prec s$ est une relation bien fondée sur T.

Dans le cas d'un arbre T sur un ensemble X, le fait que T est bien fondé correspond est équivalent à l'inexistence d'une **branche infinie** dans T, i.e. d'une fonction $f \in {}^{\omega}X$ telle que $f \restriction n \in T$ pour tout $n \in \omega$. Nous appelons le corps de T, noté $[T]$, l'ensemble des branches infinies de T. Ainsi, T est bien fondé si et seulement si $[T] = \emptyset$. Cette affirmation est par ailleurs équivalente à DC, le principe de choix dépendant. Si T est bien fondé, nous définissons par induction pour $t \in T$, le **rang** de t dans T par

$$\mathrm{rang}_T(t) = \sup\{\mathrm{rang}_T(s) + 1 \mid s \in T \wedge t \subsetneq s\}.$$

Le **rang** de T est $\sup\{\mathrm{rang}_T(t) + 1 \mid t \in T\}$.

Si T est un arbre sur un produit cartésien $X \times Y$, nous considérons que T est un ensemble de couples de suites finies, au lieu d'un ensemble de suites finies de couples. Ainsi, un membre de T est un couple (s, t) tel que $s \in {}^{<\omega}X$, $t \in {}^{<\omega}Y$ et $\mathrm{long}(s) = \mathrm{long}(t)$. De façon similaire, un membre de $[T]$ est un couple (f, g) tel que $f \in {}^{\omega}X$ et $g \in {}^{\omega}Y$.

Pour $A \subseteq {}^{\omega}X \times {}^{\omega}Y$, nous notons pA la **projection** de A sur la première composante, i.e.

$$pA = \{f \in {}^{\omega}X \mid (\exists g \in {}^{\omega}Y)(f, g) \in A\}$$

Définition 3.1.1. Soit κ un cardinal. Un ensemble $B \subseteq {}^{\omega}X$ est **κ-Souslin** s'il existe un arbre T sur $X \times \kappa$ tel que $p[T] = B$.

Remarquons que tout ensemble de réels $B \subseteq {}^{\omega}\omega$ est la projection du corps d'un arbre sur $\omega \times {}^{\omega}\omega$. Par l'axiome du choix $2^{\aleph_0}$ est un cardinal et donc tout ensemble de réels est $2^{\aleph_0}$-Souslin. En effet, $B = p[T]$ où T est l'arbre sur $\omega \times {}^{\omega}\omega$ défini par

$$T = \{(x \restriction n, x^n) \mid x \in B\},$$

où x^n est la suite constante $x^n : n \to \{x\}$.

Définition 3.1.2. Soient Y et Z des ensembles. Soit T un arbre sur $Y \times Z$ tel que pour tout $s \in {}^{<\omega}Y$ il existe $t \in {}^{<\omega}Z$ avec $(s, t) \in T$. L'arbre T est dit **homogène** s'il existe un système $\mathcal{U} = \langle U_s \mid s \in {}^{<\omega}Y\rangle$ satisfaisant les propriétés suivantes

i) pour tout $s \in {}^{<\omega}Y$, U_s est un ultrafiltre $\aleph_1$-complet sur l'ensemble

$$T_s = \left\{t \in {}^{\mathrm{long}(s)}Z \;\middle|\; (s, t) \in T\right\};$$

ii) les ultrafiltres U_s sont **compatibles**, i.e. si $s_1, s_2 \in {}^{<\omega}Y$ avec $s_1 \subseteq s_2$, alors pour tout $X \subseteq T_{s_1}$,

$$X \in U_{s_1} \quad \text{si et seulement si} \quad \left\{t \in {}^{\mathrm{long}(s_2)}Z \,\middle|\, t \restriction \mathrm{long}(s_1) \in X\right\} \in U_{s_2};$$

iii) pour tout $x \in p[T]$, l'ultrapuissance $(\mathbf{Ult}(V, \mathcal{U}_x), E_{\mathcal{U}_x})$ de l'univers V par le système inductif d'ultrafiltres

$$\mathcal{U}_x = \langle U_{x \restriction n} \mid n \in \omega\rangle$$

est bien fondée.

Remarquons que le sens de la condition iii) est assuré par les conditions i) et ii). En effet, i) et ii) nous assurent que $\langle U_{x \restriction n} \mid n \in \omega\rangle$ est un système inductif d'ultrafiltres pour Z au sens de la définition 2.3.1, si ce n'est que les ultrafiltres U_s ne sont pas nécessairement des ultrafiltres sur tout ${}^{\mathrm{long}(s)}Z$ mais bien seulement sur T_s. Or cette différence est sans conséquence fondamentale, car pour tous $s_1, s_2 \in {}^{<\omega}Y$ avec $s_1 \subseteq s_2$,

$$\{\pi_{s_2,s_1}(t) \mid t \in T_{s_2}\} = T_{s_1},$$

où $\pi_{s_2,s_1} : {}^{\mathrm{long}(s_2)}Z \to {}^{\mathrm{long}(s_1)}Z$ est la projection, i.e. $\pi_{s_2,s_1}(t) = t{\restriction}\mathrm{long}(s_1)$.

Remarquons de plus que la condition iii) est en fait une équivalence. En effet, si $x \notin p[T]$, alors l'arbre $T(x)$ est bien fondé et nous pouvons définir pour tout $n \in \omega$ une fonction

$$\begin{aligned} G_n : T_{x\restriction n} &\to \boldsymbol{ON} \\ t &\mapsto \mathrm{rang}_{T(x)}(t). \end{aligned}$$

La suite $([\![G_n]\!]_{\mathscr{U}_x})_{n\in\omega}$ est alors descendante dans l'ultrapuissance $(\mathbf{Ult}(V, \mathscr{U}_x), E_{\mathscr{U}_x})$ qui est donc mal fondée.

Lemme 3.1.3. *Un arbre T sur $Y \times Z$ est homogène si et seulement s'il existe un système $\langle U_s \mid s \in {}^{<\omega}Y\rangle$ satisfaisant i), ii) de la Définition 3.1.2 et*

iii)' pour tout $x \in p[T]$ et tout $\{X_n \mid n \in \omega\}$ avec $X_n \in U_{x\restriction n}$ pour tout $n \in \omega$, il existe $f \in {}^{\omega}Z$ tel que $f{\restriction}n \in X_n$ pour tout $n \in \omega$.

Démonstration. Immédiat par le Lemme 2.3.4. □

Définition 3.1.4. Un arbre T sur $Y \times Z$ est **κ-homogène** pour un cardinal κ, s'il existe un système $\mathscr{U} = \langle U_s \mid s \in {}^{<\omega}Y\rangle$ rendant T homogène avec U_s κ-complet pour tout $s \in {}^{<\omega}Y$.

Un ensemble $A \subseteq {}^{<\omega}Y$ est dit **homogènement Souslin** s'il existe un ensemble Z et un arbre homogène T sur $Y \times Z$ tels que $A = p[T]$. A est dit **κ-homogènement Souslin** s'il existe un ensemble Z et un arbre κ-homogène T sur $Y \times Z$ tels que $A = p[T]$.

Nous disons qu'une classe projective $\boldsymbol{\Pi}^n_1$ est homogènement Souslin si tout membre de cette classe est homogènement Souslin.

3.2 Les ensembles co-analytiques

Nous montrons dans cette section qu'en présence d'un cardinal mesurable κ, la classe $\boldsymbol{\Pi}^1_1$ des ensembles co-analytiques est κ-homogènement Souslin.

Théorème 3.2.1. *S'il existe un cardinal mesurable κ, alors tout ensemble $A \subseteq {}^{\omega}\omega$ qui est $\boldsymbol{\Pi}^1_1$ est κ-homogènement Souslin.*

Démonstration. Préambule. Nous allons utiliser l'énumération $\{u_i \mid i \in \omega\}$ de l'ensemble ${}^{<\omega}\omega$ définie dans le Chapitre B. Rappelons que cette énumération vérifie notamment que pour tout $i \in \omega$, $\mathrm{long}(u_i) \leq i$. Nous rappelons que pour $s, t \in {}^{<\omega}\boldsymbol{ON}$, l'ordre total strict de Kleene-Brouwer est défini par

$$s <_{KB} t \quad \text{si et seulement si} \quad \begin{array}{l} s \supsetneq t \text{ ou pour le plus petit } i \\ \text{tel que } s(i) \neq t(i),\, s(i) < t(i). \end{array}$$

Rappelons également qu'un arbre T sur un ordinal est bien fondé si et seulement si T est bien ordonné par $<_{KB}$.

Maintenant, puisque A est $\mathbf{\Pi}^1_1$, il existe un arbre S sur $\omega \times \omega$ tel que ${}^\omega\omega - A = p[S]$. Pour tout $s \in {}^{<\omega}\omega$, nous définissons l'arbre

$$S_{\langle s \rangle} = \{t \in {}^{<n}\omega \mid (\exists n < \mathrm{long}(s))(s{\restriction}n, t) \in S\},$$

et nous définissons un ordre total strict $<_s$ sur $\mathrm{long}(s)$ par

$$i <_s j \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u_i \notin S_{\langle s \rangle} \wedge u_j \notin S_{\langle s \rangle} \wedge i < j, \text{ ou} \\ u_i \notin S_{\langle s \rangle} \wedge u_j \in S_{\langle s \rangle}, \text{ ou} \\ u_i \in S_{\langle s \rangle} \wedge u_j \in S_{\langle s \rangle} \wedge u_i <_{KB} u_j. \end{cases}$$

Remarquons que pour tout $s_1, s_2 \in {}^{<\omega}\omega$ tels que $s_1 \subseteq s_2$, comme nous avons $S_{\langle s_1 \rangle} \subseteq S_{\langle s_2 \rangle}$ et comme notre énumération de ${}^{<\omega}\omega$ vérifie que pour tout $n \in \omega$ $\mathrm{long}(u_n) \leq n$, il s'ensuit que $<_{s_1} \subseteq <_{s_2}$ en tant que relations. Nous définissons alors pour tout $x \in {}^\omega\omega$ l'ordre total strict sur ω obtenu comme $<_x = \bigcup_{n\in\omega} <_{x{\restriction}n}$. Par ailleurs, pour tout $x \in {}^\omega\omega$, en définissant l'arbre

$$S(x) = \{t \in {}^{<\omega}\omega \mid (x{\restriction}\mathrm{long}(t), t) \in S\} = \bigcup_{n\in\omega} S_{\langle x{\restriction}n \rangle}$$

l'ordre total strict $<_x$ sur ω est donné par

$$i <_x j \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u_i \notin S(x) \wedge u_j \notin S(x) \wedge i < j, \text{ ou} \\ u_i \notin S(x) \wedge u_j \in S(x), \text{ ou} \\ u_i \in S(x) \wedge u_j \in S(x) \wedge u_i <_{KB} u_j. \end{cases}$$

Observons maintenant que $<_x$ est un bon ordre si et seulement si $[S(x)] = \emptyset$. En effet, l'existence d'une branche infinie dans $S(x)$ consiste en une suite $\langle u_{i_n} \mid n \in \omega \rangle$ descendante pour $<_{KB}$ qui signifie que la suite $\langle i_n \mid n \in \omega \rangle$ est descendante pour $<_x$. Réciproquement, l'existence d'une suite infinie descendante dans ω pour $<_x$ signifie par la définition de $<_x$ l'existence d'une suite $\langle u_{i_n} \mid n \in \omega \rangle$ descendante dans $S(x)$ pour $<_{KB}$, ce qui assure que $S(x)$ est mal fondé.

Ainsi, nous avons

$$x \in A \quad \text{si et seulement si} \quad <_x \text{ est un bon ordre sur } \omega$$

Définition de l'arbre. Nous sommes maintenant en mesure de définir l'arbre κ-homogène qui assure que A est κ-homogènement Souslin.

Nous allons exploiter le fait que κ est non dénombrable et définir l'arbre sur $\omega \times \kappa$ de sorte que l'existence d'une branche infinie $(x, f) \in {}^\omega\omega \times {}^\omega\kappa$ atteste du fait que l'ordre $<_x$ est un bon ordre.

Nous définissons donc cet arbre sur $\omega \times \kappa$ par

$$T = \Big\{(s,t) \Big| s \in {}^{<\omega}\omega \wedge t \in {}^{<\omega}\kappa \wedge \mathrm{long}(s) = \mathrm{long}(t) \\ \wedge \forall m, n < \mathrm{long}(s)\big(m <_s n \leftrightarrow t(m) < t(n)\big)\Big\}$$

Autrement dit, un couple $(s,t) \in {}^n\omega \times {}^n\kappa$ appartient à T si et seulement si

$$t : (\mathrm{long}(s), <_s) \to (\kappa, \in)$$

préserve l'ordre. Remarquons que pour tout $s \in {}^{<\omega}\omega$, il existe $t \in {}^{<\omega}\kappa$ avec $(s,t) \in T$.

Nous avons bien $A = p[T]$. En effet, pour tout $x \in {}^\omega\omega$, nous avons

$$\begin{aligned} x \in p[T] &\longleftrightarrow \exists f \in {}^\omega\kappa (x,f) \in [T] \\ &\longleftrightarrow (\exists f \in {}^\omega\kappa)(\forall l \in \omega)(\forall m,n < l)\big(m <_{x\restriction l} n \longleftrightarrow f(m) < f(n)\big) \\ &\longleftrightarrow (\exists f \in {}^\omega\kappa)(\forall m,n <\in \omega)\big(m <_x n \longleftrightarrow f(m) < f(n)\big) \\ &\longleftrightarrow (\exists f \in {}^\omega\kappa)\big(f : (\omega, <_x) \to (\kappa, <) \text{ préserve l'ordre}\big) \\ &\longleftrightarrow <_x \text{ est un bon ordre sur } \omega \longleftrightarrow x \in A \end{aligned}$$

Dans l'avant-dernière équivalence, nous utilisons le fait que κ est non dénombrable et donc que l'existence d'une fonction $f : (\omega, <_x) \to (\kappa, <)$ préservant l'ordre est équivalente au fait que $<_x$ est un bon ordre sur ω.

κ-homogénéité. Jusqu'à présent, la seule hypothèse utilisée sur κ est qu'il est non dénombrable. Il nous reste à exploiter le fait qu'il est mesurable pour montrer que T est κ-homogène.

Pour ceci, remarquons tout d'abord qu'un élément de $T_s = \{t \in {}^{\mathrm{long}(s)}\kappa \mid (s,t) \in T\}$ est déterminé par son image. En effet, par définition de T, T_s est l'ensemble des isomorphismes d'ordre $t : (n, <_s) \cong (\mathrm{Im}(t), <)$. Nous pouvons donc identifier canoniquement T_s avec l'ensemble ${}^{\mathrm{long}(s)}[\kappa]$ des sous-ensembles à $\mathrm{long}(s)$ éléments de κ. La bijection étant donnée par $\mathrm{Im} : T_s \to {}^{\mathrm{long}(s)}[\kappa]$, $t \mapsto \mathrm{Im}(t)$.

Rappelons que par le Lemme 1.3.3, il existe un ultrafiltre normal U sur κ. En outre par le Corollaire 1.3.5, U induit des ultrafiltres κ-complets U_n sur ${}^n[\kappa]$ qui sont donnés par

$$U_n = \{X \subseteq {}^n[\kappa] \big| \exists X' \in U({}^n[X'] \subseteq X)\}.$$

Nous utilisons alors l'identification de T_s avec ${}^{\mathrm{long}(s)}[\kappa]$ pour définir pour chaque $s \in {}^{<\omega}\omega$ l'ultrafiltre κ-complet

$$\begin{aligned} U_s &= \left\{X \subseteq T_s \;\middle|\; (\exists X' \in U)\Big(\mathrm{Im}^{-1}\left({}^{\mathrm{long}(s)}[X']\right) \subseteq X\Big)\right\} \\ &= \left\{X \subseteq T_s \;\middle|\; (\exists X' \in U)(\forall t \in T_s)\big(\mathrm{Im}(t) \subseteq X' \to t \in X\big)\right\}. \end{aligned}$$

Ou autrement dit, pour $X \subseteq T_s$,

$$X \in U_s \quad \text{si et seulement si} \quad \exists X' \in U\big(\{t \in T_s \mid \mathrm{Im}(t) \subseteq X'\} \subseteq X\big).$$

Compatibilité. Nous montrons à présent la compatibilité des ultrafiltres. Soient $s_1, s_2 \in {}^{<\omega}\omega$ tels que $s_1 \subseteq s_2$. Nous devons montrer que pour tout $X \subseteq T_{s_1}$

$$X \in U_{s_1} \quad \text{si et seulement si} \quad \{u \in T_{s_2} \mid u\restriction \mathrm{long}(s_1) \in X\} \in U_{s_2}.$$

Posons $n_1 = \mathrm{long}(s_1)$ et $n_2 = \mathrm{long}(s_2)$.

Supposons pour commencer que $X \in U_{s_1}$ et donc qu'il existe $X' \in U$ tel que $\{t \in T_{s_1} \mid \mathrm{Im}(t) \subseteq X'\} \subseteq X$. Ainsi, pour tout $u \in T_{s_2}$ si $\mathrm{Im}(u) \subseteq X'$, alors $\mathrm{Im}(u\restriction n_1) \subseteq \mathrm{Im}(u) \subseteq X'$ et donc $u\restriction n_1 \in X$. Par conséquent,

$$\{u \in T_{s_2} \mid \mathrm{Im}(u) \subseteq X'\} \subseteq \{u \in T_{s_2} \mid u\restriction n_1 \in X\}, \tag{3.1}$$

et donc $\{u \in T_{s_2} \mid u\restriction n_1 \in X\} \in U_{s_2}$.

Réciproquement, supposons qu'il existe $X' \in U$ satisfaisant (3.1). Considérons l'ensemble $Y' = X' - \{\text{les } n_2 - n_1 \text{ plus petits éléments de } X'\}$ qui appartient également à l'ultrafiltre U. Alors,

$$\{t \in T_{s_1} \mid \mathrm{Im}(t) \subseteq Y'\} \subseteq \Big\{t \in T_{s_1} \;\Big|\; (\exists u \in T_{s_2})\big(u\restriction n_1 = t \wedge \mathrm{Im}(u) \subseteq X'\big)\Big\} \subseteq X,$$

et donc $X \in U_{s_1}$.

Bonne fondation des ultrapuissances. Pour vérifier que pour tout $x \in p[T] = A$ l'ultrapuissance $(\mathbf{Ult}(\mathscr{U}_x), \boldsymbol{E}_{\mathscr{U}_x})$ est bien fondée, nous montrons la condition iii)' du Lemme 3.1.3. Soient donc $x \in A$ et une famille $\{X_n \mid n \in \omega\}$ avec $X_n \in U_{x\restriction n}$ pour tout $n \in \omega$. Nous devons montrer qu'il existe une fonction $f \in {}^{\omega}\kappa$ telle que $f\restriction n \in X_n$ pour tout $n \in \omega$. Par définition des ultrafiltres U_s, nous pouvons choisir pour chaque $n \in \omega$ un $X'_n \in U$ tel que $\{t \in T_{x\restriction n} \mid \mathrm{Im}(t) \subseteq X'_n\} \subseteq X_n$. Nous avons par κ-complétude de U que $X' = \bigcap_{n\in\omega} X'_n \in U$ et donc en particulier la cardinalité de X' égale κ qui est non dénombrable. De plus $x \in A$, donc $<_x$ est un bon ordre, et il existe $f : \omega \to X'$ vérifiant $\forall m, n \in \omega\big(m <_x n \leftrightarrow f(m) < f(n)\big)$. Cette fonction vérifie pour tout $n \in \omega$ que d'une part que $f\restriction n \in T_{x\restriction n}$ et d'autre part que $\mathrm{Im}(f\restriction n) \subseteq X' \subseteq X'_n$ et donc $f\restriction n \in X_n$. Ceci termine la démonstration. □

3.3 Arbres homogènes et détermination

Théorème 3.3.1. *Si un ensemble $A \subseteq {}^{\omega}Y$ est κ-homogènement Souslin pour $\kappa > |Y|$, alors A est déterminé.*

Démonstration. Soient Z un ensemble et T un arbre κ-homogène sur $Y \times Z$ tels que $A = p[T]$. Soit G le jeu donné par A. Considérons le jeu auxiliaire G^* représenté par le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
I: & (y_0,z_0) \arrow[dr] & & (y_2,z_1) \arrow[dr] & & \cdots & (y_{2n},z_n) \arrow[dr] & & (y_{2n+2},z_{n+1}) & \cdots \\
II: & & y_1 \arrow[ur] & & y_3 & & & y_{2n+1} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Le joueur I joue des couples $(y,z) \in Y \times Z$ tandis que le joueur II joue des éléments de Y.

Nous formons sur l'ensemble $(Y \times Z) \cup Y$ l'arbre R des suites finies $a \in {}^{<\omega}((Y \times Z) \cup Y)$ telles que $a_I \in {}^{<\omega}(Y \times Z)$ et $a_{II} \in {}^{<\omega}Y$, où $a_I(n) = a(2n)$ et $a_{II}(n) = a(2n+1)$ respectivement pour les n où l'expression fait sens. L'ensemble de gain est alors donné par

> Une partie $x = \big((y_0,z_0), y_1, (y_2,z_1), y_3, \dots\big) \in [R]$ est gagnée par le joueur I si et seulement si $(y,z) \in [T]$ où $y = (y_0, y_1, \dots)$ et $z = (z_0, z_1, \dots)$.

Le jeu G^* est fermé, il est donc déterminé. Nous montrons à présent que la détermination de G^* implique celle de G.

Si le joueur I possède une stratégie gagnante σ^* dans G^*, alors pour toute partie $\big((y_0,z_0), y_1, (y_2,z_1), \dots\big)$ dans laquelle I a suivi σ^* nous avons que $(y,z) \in [T]$ et donc $y = (y_0, y_1, \dots) \in p[T] = A$. Ainsi, la stratégie σ pour I dans le jeu G consistant à jouer les y_{2n} donnés par σ^* est gagnante.

Supposons à présent que τ^* est une stratégie gagnante pour II dans G^*. La question qui se pose est : comment simuler le jeu G^* pour découler de τ^* une stratégie pour II dans G ?

Pour répondre à cette question, nous allons utiliser le fait que T est κ-homogène. Il ne sera pas nécessaire de simuler véritablement le jeu G^*, nous nous contenterons d'un mouvement indiqué par τ^* pour presque toute simulation $(z_0, \dots, z_n)$ des mouvements de I dans G^*. La présence des ultrafiltres permet de donner un sens à l'idée de « presque toute simulation ».

Soit $\mathscr{U} = \langle U_s \mid s \in {}^{<\omega}Y \rangle$ un système d'ultrafiltres κ-complets rendant T homogène. Pour tout $s = (y_0, \dots, y_{2n}) \in {}^{2n+1}Y$ avec $n \in \omega$, nous définissons une fonction

$$\tau^*_s : T_{s\restriction(n+1)} \to Y$$

par

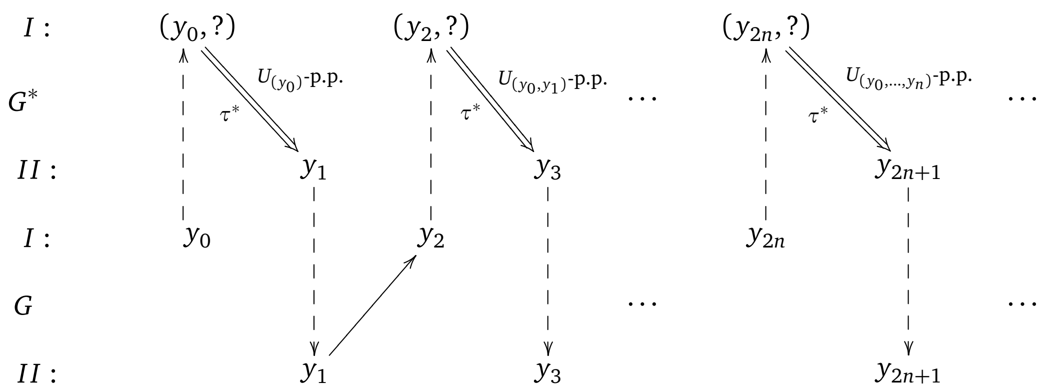
$$\tau^*_s(t) = \tau^*\big((s_0,t_0), s_1, (s_2,t_1), \dots, (s_{2n}, t_n)\big),$$

le mouvement du joueur II indiqué par la stratégie τ^* pour ce début de partie.

Or par hypothèse, $\kappa > |Y|$ et donc les ultrafiltres U_s sont au moins $|Y|^+$-complets. Il découle alors de la caractérisation duale de la complétude des ultrafiltres que pour tout $s = (y_0, \dots, y_{2n}) \in {}^{2n+1}Y$ avec $n \in \omega$ il existe y_s tel que

$$\Big\{t \in T_{s\restriction(n+1)} \;\Big|\; \tau^*_s(t) = y_s\Big\} \in U_{s\restriction(n+1)}, \tag{3.2}$$

car $\bigcup_{y\in Y}\{t \in T_{s\restriction(n+1)} \mid \tau^*_s(t) = y\} = T_{s\restriction(n+1)} \in U_{s\restriction(n+1)}$. Choisissant donc pour tout $s \in \bigcup_{n\in\omega} {}^{2n+1}Y$ un y_s satisfaisant (3.2), nous avons défini une stratégie τ pour II dans le jeu G.



Pour voir que τ est gagnante pour II dans G, prenons une partie $x \in {}^{\omega}\omega$ du jeu G dans laquelle II a suivi τ. Par définition de τ, pour tout $n \in \omega$,

$$X_n = \left\{ t \in T_{x \restriction (n+1)} \;\middle|\; \tau^*_{x \restriction (2n+1)}(t) = x_{2n+1} \right\} \in U_{x \restriction n+1}.$$

Supposons en vue d'une contradiction que $x \in A$. Nous utilisons à présent la propriété iii) d'un arbre homogène, à savoir que l'ultrapuissance $\left(\mathbf{Ult}(\mathscr{U}_x), \boldsymbol{E}_{\mathscr{U}_x}\right)$ est bien fondée pour tout $x \in p[T] = A$. Par le Lemme 3.1.3, cela signifie qu'il existe une fonction $f \in {}^{\omega}Z$ telle que $f \restriction (n+1) \in X_n$ pour tout $n \in \omega$. Dans ce cas, x et f forment la donnée d'une partie de G^* dans laquelle II a suivi τ^* et dans laquelle pourtant I gagne. Ceci contredit le fait que τ^* est une stratégie gagnante pour II dans G^*. $\square$

3.4 Monter dans la hiérarchie projective

Dans le chapitre 7, nous abordons, sous l'hypothèse de l'existence de cardinaux de Woodin, la détermination des ensembles projectifs. La détermination de la classe $\mathbf{\Pi}^1_n$ est obtenue par induction. La base de l'induction est le Théorème 3.2.1 qui assure que les ensembles co-analytiques sont homogènement Souslin en présence d'un cardinal mesurable. Le théorème principal de [MS89], assure alors sous certaines conditions que si la classe $\mathbf{\Pi}^1_n$ est homogènement Souslin, alors il en est de même pour la classe $\mathbf{\Pi}^1_{n+1}$. Le Théorème 3.3.1 implique alors la détermination.

Nous décrivons premièrement que si un ensemble $A \subseteq {}^{<\omega}Y$ est homogènement Souslin, alors son complémentaire ${}^{<\omega}Y - A$ est κ-Souslin pour un certain cardinal κ. De plus, si T atteste que A est homogènement Souslin, alors nous pouvons construire de façon canonique un arbre T^* attestant que A est κ-Souslin pour un certain κ.

Soient T un arbre sur $Y \times Z$ et $\langle U_s \mid s \in {}^{<\omega}Y \rangle$ rendant T homogène. Pour chaque $s \in {}^{<\omega}Y$, U_s est un ultrafiltre $\aleph_1$-complet sur T_s, nous notons l'injection élémentaire associée

$$\boldsymbol{j}_s : V \to \mathbf{Ult}(V, U_s)$$

Rappelons que chaque $\mathbf{Ult}(V, U_s)$ est un modèle intérieur de ZFC. Pour $s_1 \subseteq s_2 \in {}^{<\omega}Y$, nous notons

$$\boldsymbol{j}_{s_1,s_2} : \mathbf{Ult}(V, U_{s_1}) \to \mathbf{Ult}(V, U_{s_2})$$

l'injection élémentaire donnée par

$$\boldsymbol{j}_{s_1,s_2}([F]_{s_1}) = \left[F \circ \pi_{s_2,s_1}\right]_{s_2}$$

où $\pi_{s_2,s_1} : {}^{\mathrm{long}(s_2)}Y \to {}^{\mathrm{long}(s_1)}Y$ est la projection $\pi_{s_2,s_1}(f) = f \restriction \mathrm{long}(s_1)$.

Nous définissons l'arbre T^* sur $Y \times \boldsymbol{ON}$ par

$$\begin{aligned} \langle s, u \rangle \in T^* \quad \longleftrightarrow \quad & \mathrm{long}(s) = \mathrm{long}(u) \wedge \\ & \forall i_1, i_2 < \mathrm{long}(s) \Big(i_1 < i_2 \to u(i_2) < \boldsymbol{j}_{s \restriction i_1, s \restriction i_2}(u(i_1)) \Big). \end{aligned}$$

Observons que nous avons bien que pour tout $s \in {}^{<\omega}Y$ il existe $u \in {}^{<\omega}\boldsymbol{ON}$ avec $\langle s, u \rangle \in T^*$. Il suffit en effet de choisir $u = (\mathrm{long}(s) - 1, \dots, 0)$.

Lemme 3.4.1. *Nous avons*

$$p[T^*] = p[T^*{\restriction}(2^{|Z|})^+] = {}^{\omega}Y - p[T],$$

où $T^*{\restriction}\alpha = \{\langle s,u\rangle \in T^* \mid u \in {}^{<\omega}\alpha\}$.

Démonstration. Supposons pour commencer que $x \in p[T^*]$ et soit $f \in {}^{\omega}\boldsymbol{ON}$ tel que $\langle x, f\rangle \in [T^*]$. Pour tout $i \in \omega$, nous avons l'injection élémentaire

$$\boldsymbol{j}_{x\restriction i,x} : \mathbf{Ult}(V, U_{x\restriction i}) \to \big(\mathbf{Ult}(V, \mathscr{U}_x), \in_x\big),$$

où $\mathscr{U}_x = \langle U_{x\restriction n} \mid n \in \omega\rangle$. Rappelons que $\big(\mathbf{Ult}(V,\mathscr{U}_x), \in_x\big)$ est bien fondée si et seulement si $x \in p[T]$. Pour tout $i_1 < i_2$, nous avons la commutativité du diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
 & \big(\mathbf{Ult}(\mathscr{U}_x), \in_x\big) & \\
\mathbf{Ult}(U_{x\restriction i_1}) \arrow[ur, "j_{x\restriction i_1,x}"] \arrow[rr, "j_{x\restriction i_1, x\restriction i_2}"'] & & \mathbf{Ult}(U_{x\restriction i_2}) \arrow[ul, "j_{x\restriction i_2,x}"'] \\
 & V \arrow[ul, "j_{x\restriction i_1}"] \arrow[ur, "j_{x\restriction i_2}"'] &
\end{tikzcd}$$

Ainsi, nous avons par définition de T^* pour tout $i \in \omega$,

$$\boldsymbol{j}_{x\restriction i+1,x}(f(i+1)) \in_x \boldsymbol{j}_{x\restriction(i+1),x} \circ \boldsymbol{j}_{x\restriction i,x\restriction(i+1)}(f(i)) = \boldsymbol{j}_{x\restriction i,x}(f(i)).$$

Par conséquent, la suite $\big(\boldsymbol{j}_{x\restriction i,x}(f(i))\big)_{i\in<\omega}$ est $\in_x$ descendante dans $\mathbf{Ult}(\mathscr{U}_x)$. Par la définition d'un arbre homogène, nécessairement $x \notin p[T]$.

Supposons maintenant que $x \in {}^{\omega}Y - p[T]$. L'arbre

$$T(x) = \{t \in {}^{<\omega}Z \mid (x{\restriction}\mathrm{long}(t), t) \in T\}$$

est donc bien fondé. Nous pouvons donc définir pour tout $n \in \omega$ la fonction

$$\begin{aligned} G_n : T_{x\restriction n} &\to \boldsymbol{ON} \\ t &\mapsto \mathrm{rang}_{T(x)}(t). \end{aligned}$$

Par le Théorème de Łoś, chaque $[G_n]_{x\restriction n}$ est un ordinal. De plus, par définition des G_n, pour tout $n \in \omega$, nous avons pour tout $t \in T_{x\restriction(n+1)}$ que $G_{n+1}(t) < G_n(t{\restriction}n)$. Nous définissons alors une fonction $f : \omega \to \boldsymbol{ON}$ par $f(n) = [G_n]_{x\restriction n}$. Cette fonction vérifie donc pour tout $n \in \omega$

$$f(n+1) = [G_{n+1}]_{x\restriction(n+1)} < \boldsymbol{j}_{x\restriction n,x\restriction n+1}([G_n]_{x\restriction n}) = \boldsymbol{j}_{x\restriction n,x\restriction n+1}(f(n)).$$

Ainsi par définition de T^*, nous avons $(x,f) \in [T^*]$ et donc $x \in p[T^*]$.

Finalement si Z est infini, observons que pour tout $n \in \omega$, la fonction f définie au paragraphe précédent vérifie

$$\begin{aligned} \big|f(n)\big| = \big|[G_n]_{x\restriction n}\big| &\leq \big|\{F : T_{x\restriction n} \to \mathrm{rang}(T(x))\}\big| \\ &\leq \big|\{F : {}^{n}Z \to \mathrm{rang}(T(x))\}\big| \leq |Z|^{|Z|} = 2^{|Z|}, \end{aligned}$$

car le rang d'un arbre est nécessairement un ordinal dénombrable. Ainsi $f : \omega \to (2^{|Z|})^+$ et nous avons pour conclure

$$x \in p[T^*] \longleftrightarrow x \in {}^{\omega}Y - p[T] \\ \longleftrightarrow \exists f \in {}^{\omega}\big((2^{|Z|})^+\big)(x,f) \in [T^*] \longleftrightarrow x \in p[T^* \restriction (2^{|Z|})^+].$$

□

Le Théorème 7.2.5 que nous prouvons au chapitre 7 assure sous certaines hypothèses que T^* est η-homogène pour un certain η.

Dans [MS89], Martin et Steel montrent qu'en présence d'un cardinal de Woodin δ, si la classe $\mathbf{\Pi}^1_n$ est δ^+-homogènement Souslin alors la classe $\mathbf{\Pi}^1_{n+1}$ est α-homogènement Souslin pour tout $\alpha < \delta$. Cela se fait en montrant, qu'à partir d'un arbre δ^+-homogène T sur $(Y \times \omega) \times Z$ pour $A = p[T] \subseteq {}^{\omega}Y \times {}^{\omega}\omega$ qu'un arbre $\widetilde{T}$ sur $Y \times \boldsymbol{ON}$ avec la propriété que $p[\widetilde{T}] = {}^{\omega}Y - pA$ est homogène.

L'arbre $\widetilde{T}$ est construit à partir de T de façon canonique. Soient T un arbre sur $(Y \times \omega) \times Z$ et $\langle U_{(s,t)} \mid s \in {}^{<\omega}Y \wedge t \in {}^{<\omega}\omega \wedge \mathrm{long}(s) = \mathrm{long}(t) \rangle$ rendant T homogène. Nous notons

$$\boldsymbol{j}_{(s,t)} : V \to \mathbf{Ult}(V, U_{(s,t)})$$

et

$$\boldsymbol{j}_{(s_1,t_1),(s_2,t_2)} : \mathbf{Ult}(V, U_{(s_1,t_1)}) \to \mathbf{Ult}(V, U_{(s_2,t_2)})$$

les injections élémentaires associées à l'arbre homogène T.

Nous utilisons l'énumération $\{u_n \mid n \in \omega\}$ de ${}^{<\omega}\omega$ décrite au Chapitre B. Nous utilisons ici le fait que, dans cette énumération, chaque suite apparaît avant n'importe laquelle de ses extensions propres. Nous définissons l'arbre $\widetilde{T}$ sur $Y \times \boldsymbol{ON}$ par

$$\langle s,r \rangle \in \widetilde{T} \quad \longleftrightarrow \quad \mathrm{long}(s) = \mathrm{long}(r) \wedge \\ \Big(\forall i \forall j \big(i < j < \mathrm{long}(s) \wedge u_i \subsetneq u_j\big) \to r(j) < \boldsymbol{j}_{(s\restriction \mathrm{long}(u_i),u_i),(s\restriction \mathrm{long}(u_j),u_j)}(r(i))\Big).$$

Remarquons que nous avons bien que pour tout $s \in {}^{<\omega}Y$ il existe $r \in {}^{<\omega}\boldsymbol{ON}$ tel que $\langle s,r \rangle \in \widetilde{T}$. Comme pour T^*, la suite $r = (\mathrm{long}(s) - 1, \ldots, 0)$ convient.

Lemme 3.4.2. *Nous avons*

$$p[\widetilde{T}] = p[\widetilde{T} \restriction (2^{|Z|})^+] = \{x \in {}^{\omega}Y \mid \forall y\ (x,y) \notin p[T]\}.$$

Démonstration. Supposons pour commencer que $x \in p[\widetilde{T}]$ et soit $f \in {}^{\omega}\boldsymbol{ON}$ telle que $(x,f) \in [\widetilde{T}]$. Soit $y \in {}^{\omega}\omega$ quelconque. Pour tout $k \in \omega$, appelons i_k le naturel qui est l'indice de $y\restriction k$ dans l'énumération de ${}^{<\omega}\omega$, i.e. $u_{i_k} = y\restriction k$. Nous avons alors par définition de $\widetilde{T}$ que pour tout $k \in \omega$

$$f(i_{k+1}) < \boldsymbol{j}_{(x\restriction k, y\restriction k),(x\restriction k+1, y\restriction k+1)}(f(i_k))$$

car $\mathrm{long}(u_{i_k}) = k$ pour tout $k \in \omega$. Notons alors

$$\boldsymbol{j}_{(x\restriction k, y\restriction k),(x,y)} : \mathbf{Ult}(V, U_{(x\restriction k, y\restriction k)}) \to \mathbf{Ult}(V, \mathscr{U}_{x,y}),$$

où $\mathscr{U}_{(x,y)} = \langle U_{(x\restriction n, y\restriction n)} \mid n \in \omega\rangle$. La suite d'ordinaux $\big(\boldsymbol{j}_{(x\restriction k, y\restriction k),(x,y)}(f(k))\big)_{k\in\omega}$ est donc descendante dans $\mathbf{Ult}(V, \mathscr{U}_{(x,y)})$. Ainsi, nécessairement $(x,y) \notin p[T]$.

Supposons maintenant que pour $x \in {}^{\omega}Y$ nous avons $\forall y (x,y) \notin p[T]$. Cela signifie que $x \notin p[T']$ pour T' l'arbre sur $Y \times (\omega \times Z)$ correspondant à T. L'arbre $S = T'(x) = \{(r,t) \mid \langle x\restriction \mathrm{long}(r), (r,t)\rangle \in T'\}$ est donc bien fondé. Nous définissons alors pour tout $n \in \omega$ la fonction

$$\begin{aligned} G_n : T_{(x\restriction \mathrm{long}(u_n), u_n)} &\to \boldsymbol{ON} \\ t &\mapsto \mathrm{rang}_S(u_n, t). \end{aligned}$$

Nous définissons alors une fonction $g : \omega \to \mathrm{rang}(S)$ par

$$g(n) = [G_n]_{(x\restriction \mathrm{long}(u_n), u_n)}.$$

Pour tout $i < j$ dans ω tels que $u_i \subsetneq u_j$, nous avons dans S que pour tout $t \in T_{(x\restriction \mathrm{long}(u_j), u_j)}$, $(t\restriction \mathrm{long}(u_i), u_i) \subsetneq (t, u_j)$ et donc

$$G_j(t) = \mathrm{rang}_S(t, u_j) < \mathrm{rang}_S(t\restriction \mathrm{long}(u_i), u_i) = G_i\big(t\restriction \mathrm{long}(u_j)\big).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} g(j) = [G_j]_{(x\restriction \mathrm{long}(u_j), u_j)} &< \boldsymbol{j}_{(x\restriction \mathrm{long}(u_i), u_i),(x\restriction \mathrm{long}(u_j), u_j)}([G_i]_{(x\restriction \mathrm{long}(u_i), u_i)}) \\ &= \boldsymbol{j}_{(x\restriction \mathrm{long}(u_i), u_i),(x\restriction \mathrm{long}(u_j), u_j)}(g(i)). \end{aligned}$$

Ainsi, $(x,g) \in [\widetilde{T}]$ et donc $x \in p[\widetilde{T}]$.

Finalement, comme dans la preuve du Lemme 3.4.1, nous avons que la fonction g définie au paragraphe précédent est à image dans $\mathrm{rang}(S)$ qui est toujours borné par $(2^{|Z|})^+$. Ainsi, $x \in p[\widetilde{T}]$ si et seulement s'il existe $g \in {}^{\omega}\big((2^{|Z|})^+\big)$ avec $(x,g) \in [\widetilde{T}]$. □

Nous montrons au chapitre 7 que l'arbre T^* est homogène et donc que le complémentaire de $p[T]$ est homogènement Souslin. Avant cela, nous commençons par montrer, dans le Théorème 7.2.4, que le complémentaire de $p[T]$ possède une propriété plus faible : il possède une représentation arborescente [1].

Définition 3.4.3. Une **représentation arborescente** pour un ensemble $A \subseteq {}^{\omega}Y$ est un système $\langle \boldsymbol{M}_{s_1}, \boldsymbol{j}_{s_1,s_2} \mid s_1, s_2 \in {}^{<\omega}Y \wedge s_1 \subseteq s_2\rangle$ vérifiant les propriétés suivantes

(a) $\boldsymbol{M}_{\emptyset} = V$, et chaque $\boldsymbol{M}_s$ est un modèle intérieur de ZFC ;

(b) chaque $\boldsymbol{j}_{s_1,s_2} : \boldsymbol{M}_{s_1} \to \boldsymbol{M}_{s_2}$ est un injection élémentaire et pour toutes suites finies telles que $s_1 \subseteq s_2 \subseteq s_3$, nous avons $\boldsymbol{j}_{s_2,s_3} \circ \boldsymbol{j}_{s_1,s_2} = \boldsymbol{j}_{s_1,s_3}$;

(c) pour tout $x \in {}^{\omega}Y$, $x \in A$ si et seulement si la limite directe $\boldsymbol{M}_x$ du système inductif $\langle \boldsymbol{M}_{x\restriction n}, \boldsymbol{j}_{x\restriction m, x\restriction n} \mid m \leq n \in \omega\rangle$ est bien fondée.

1. en anglais, « embedding normal form ». Un ensemble qui possède une représentation arborescente ne grimpe pas le long des branches mal fondées ou « cassantes », les branches bien fondées le caractérisent.

Tout ensemble homogènement Souslin A possède une représentation arborescente. En effet, si T est un arbre sur $Y \times Z$ tel que $p[T] = A$ et que $\langle U_s \mid s \in {}^{<\omega}Y \rangle$ rend T homogène, alors le système des modèles intérieurs de ZFC $\boldsymbol{M}_s = \mathbf{Ult}(V, U_s)$ et de leurs injections élémentaires canoniques $\boldsymbol{j}_{s_1,s_2}$ associées constitue une représentation arborescente.

Notes. Le chapitre tout entier est basé sur [MS89]. Cependant, dans la définition 3.1.2, la condition selon laquelle pour tout $s \in {}^{<\omega}Y$ il existe $t \in {}^{<\omega}Z$ avec $(s, t) \in T$ n'est pas présente explicitement dans la définition de Martin et Steel. Il nous a toutefois semblé que cette condition était implicite dans le reste de l'article.

Chapitre 4

Extenseurs

Sans souci
elle contemple la montagne
la grenouille

Kobayashi Issa

Un extenseur est un ensemble, même si son existence ne peut être prouvée dans la théorie axiomatique classique des ensembles. Supposer sa présence dans l'univers des ensembles représente la possibilité qu'une multitude d'objets supplémentaires soient présents en dessous d'un rang particulier. Dans ce sens, un extenseur est potentiellement un allongement, un étirement de l'univers.

4.1 Première définition

Définition 4.1.1. Soient Y un ensemble transitif et κ un cardinal non dénombrable. Un (κ, Y)-**extenseur** est un système $\mathscr{E} = \langle E_a \mid a \in {}^{<\omega}[Y] \rangle$ vérifiant les conditions suivantes :

(e1) chaque E_a est un ultrafiltre κ-complet sur l'ensemble ${}^aV_\kappa$ et au moins un E_a n'est pas κ^+-complet ;

(e2) les E_a sont compatibles, i.e. pour tous $a, b \in {}^{<\omega}[Y]$ avec $a \subseteq b$ et tous $X \subseteq {}^aV_\kappa$,

$$X \in E_a \quad \text{si et seulement si} \quad \{f \in {}^bV_\kappa \mid f \restriction a \in X\} \in E_b;$$

(e3) pour tout $a \in {}^{<\omega}[Y]$,

$$\{f \in {}^aV_\kappa \mid f : (a, \in) \xrightarrow{\cong} (\operatorname{Im} f, \in) \text{ est un } \in\text{-isomorphisme}\} \in E_a;$$

(e4) pour toute fonction $F : {}^aV_\kappa \to V_\kappa$ avec

$$\{f \in {}^aV_\kappa \mid F(f) \in \bigcup \operatorname{Im} f\} \in E_a,$$

il existe $y \in Y$ tel que

$$\{f \in {}^{a\cup\{y\}}V_\kappa \mid F(f\restriction a) = f(y)\} \in E_{a\cup\{y\}};$$

(e5) L'ultrapuissance $\mathbf{Ult}(V, \mathscr{E})$ est bien fondée.

Le cardinal κ est appelé le **point critique** de l'extenseur $\mathscr{E}$, noté $\mathrm{crit}(\mathscr{E})$. L'ensemble transitif Y est appelé le **support** de $\mathscr{E}$, noté $\mathrm{Supp}(\mathscr{E})$.

Un système $\mathscr{E} = \langle E_a \mid a \in {}^{<\omega}[Y]\rangle$ vérifiant les conditions (e1) à (e4) est un système inductif d'ultrafiltres au sens de la Définition 2.3.1 pour $Z = V_\kappa$. Ainsi, la condition (e5) prend sens. En outre, par le Lemme 2.3.4, $\mathscr{E}$ satisfait (e5) si et seulement si pour tout ensemble dénombrable $D \subseteq {}^{<\omega}[Y]$ et toute famille $\{X_a \mid a \in D\}$ avec $X_a \in E_a$ pour tout $a \in D$, il existe une fonction $f : \bigcup D \to V_\kappa$ telle que $f\restriction a \in X_a$ pour tout $a \in D$.

Lemme 4.1.2. *Soient $\mathscr{E} = \langle E_a \mid a \in^{<\omega} [Y]\rangle$ un (κ, Y)-extenseur et $\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}} : V \to \mathbf{Ult}(V, \mathscr{E})$ l'injection élémentaire associée. Le point critique de $\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}$ égale le point critique de $\mathscr{E}$, i.e.* $\mathrm{crit}(\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}) = \mathrm{crit}(\mathscr{E})$.

Démonstration. Notons $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}$. Rappelons que $\mathrm{crit}\, \boldsymbol{j}$ est le plus petit ordinal déplacé par $\boldsymbol{j}$. Montrons tout d'abord que $\boldsymbol{j}(\alpha) = \alpha$ pour tout $\alpha < \kappa$. Pour cela, supposons par contradiction que $\boldsymbol{j}(\alpha) \neq \alpha$ pour $\alpha < \kappa$ et prenons α minimal à posséder cette propriété. Par le Lemme 2.1.4, nous avons que $\alpha \leq \boldsymbol{j}(\alpha)$, par conséquent $\alpha < \boldsymbol{j}(\alpha)$. Choisissons $F : {}^aV_\kappa \to V$ avec $a \in {}^{<\omega}[Y]$ qui représente α dans $\mathbf{Ult}(V, \mathscr{E})$, c'est-à-dire telle que $[\![F]\!]_{\mathscr{E}} = \alpha$. Par le théorème de Łoś pour $\mathbf{Ult}(V, \mathscr{E})$ (Théorème 2.3.3), nous avons que

$$\{f \in {}^aV_\kappa \mid F(f) \in \alpha\} \in E_a.$$

La κ-complétude de E_a et le fait que $\alpha < \kappa$, implique alors par le Lemme 1.2.4 qu'il existe $\beta < \alpha$ tel que

$$\{f \in {}^aV_\kappa \mid F(f) = \beta\} \in E_a.$$

Comme la minimalité de α assure que $\boldsymbol{j}(\beta) = \beta$, nous avons la contradiction $\alpha = [\![F]\!]_{\mathscr{E}} = \boldsymbol{j}(\beta) = \beta < \alpha$.

Montrons à présent que $\boldsymbol{j}(\kappa) > \kappa$. Prenons $a \in {}^{<\omega}[Y]$ tel que E_a n'est pas κ^+-complet. Il existe alors une famille $\langle X_\alpha \mid \alpha < \kappa\rangle$ avec $X_\alpha \in E_a$ pour tout $\alpha < \kappa$ mais pour laquelle $X = \bigcap_{\alpha<\kappa} X_\alpha \notin E_a$. Nous définissons alors une fonction $F : {}^aV_\kappa \to \kappa$ par

$$F(f) = \begin{cases} \min\{\alpha < \kappa \mid f \notin X_\alpha\} & \text{si } f \notin X; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette fonction F vérifie pour tout $\alpha < \kappa$

$$\{f \in {}^aV_\kappa \mid \alpha \in F(f)\} \supseteq \Big(\bigcap_{\beta\leq\alpha} X_\beta\Big) \cap \big({}^aV_\kappa - X\big) \in E_a,$$

car par κ-complétude de E_a, $\bigcap_{\alpha\leq\beta} X_\alpha \in E_a$ pour tout $\beta < \kappa$. Il s'ensuit que pour tout $\alpha < \kappa$, $\alpha = \boldsymbol{j}(\alpha) \in [\![F]\!]_{\mathscr{E}}$. Or $\{f \in {}^aV_\kappa \mid F(f) \in \kappa\} = {}^aV_\kappa$ et donc $[\![F]\!]_{\mathscr{E}} \in \boldsymbol{j}(\kappa)$. Par conséquent, $\kappa \leq [\![F]\!]_{\mathscr{E}} < \boldsymbol{j}(\kappa)$ et $\kappa = \mathrm{crit}(\boldsymbol{j})$. □

Lemme 4.1.3. *Soit $\mathscr{E} = \langle E_a \mid a \in {}^{<\omega}[Y] \rangle$ un (κ, Y)-extenseur. Pour tout $y \in Y$ et tout $a \in {}^{<\omega}[Y]$ avec $y \in a$, la fonction $H^a_y : {}^aV_\kappa \to V_\kappa$ définie par*

$$H^a_y(f) = f(y)$$

représente y dans $\mathbf{Ult}(V, \mathscr{E})$, i.e. $y = [\![H^a_y]\!]_{\mathscr{E}}$. Par conséquent,

$$\mathrm{Supp}(\mathscr{E}) = Y \subseteq V_{j_{\mathscr{E}}(\kappa)} \cap \mathbf{Ult}(V, \mathscr{E}).$$

Démonstration. Nous démontrons le lemme pour tout $y \in Y$ et tout $a \in {}^{<\omega}[Y]$ avec $y \in a$, par induction sur le rang de y. Remarquons tout d'abord que par la compatibilité des E_a, propriété (e2), pour tout $y \in Y$ et tous $a, b \in {}^{<\omega}[Y]$ tels que $y \in a \cap b$, $[\![H^a_y]\!]_{\mathscr{E}} = [\![H^b_y]\!]_{\mathscr{E}}$.

Supposons donc que le lemme vaut pour tout $z \in Y$ tel que $\mathrm{rang}(z) < \mathrm{rang}(y)$. Soient $z \in y$ et $a \in {}^{<\omega}[Y]$ avec $\{y, z\} \subseteq a$. Par la clause (e3) de la définition d'extenseur,

$$\{f \in {}^aV_\kappa \mid H^a_z(f) \in H^a_y(f)\} \supseteq \{f \in {}^aV_\kappa \mid f : (a, \in) \xrightarrow{\cong} (\mathrm{Im}\, f, \in)\} \in E_a.$$

Par conséquent, $[\![H^a_z]\!]_{\mathscr{E}} \in [\![H^a_y]\!]_{\mathscr{E}}$. Par hypothèse d'induction, $z = [\![H^a_z]\!]_{\mathscr{E}} \in [\![H^a_y]\!]_{\mathscr{E}}$.

Supposons maintenant que pour $a \in {}^{<\omega}[Y]$ avec $y \in a$, nous avons $[\![F]\!]_{\mathscr{E}} \in [\![H^a_y]\!]_{\mathscr{E}}$. Par compatibilité, nous pouvons supposer sans perte de généralité que $F : {}^aV_\kappa \to V$. Nous avons alors,

$$\{f \in {}^aV_\kappa \mid F(f) \in H^a_y(f) = f(y)\} \in E_a \tag{4.1}$$

et donc F satisfait l'hypothèse de la condition (e4) d'extenseur, à savoir

$$\{f \in {}^aV_\kappa \mid F(f) \in \bigcup \mathrm{Im}\, f\} \in E_a.$$

Il s'ensuit qu'il existe $z \in Y$ tel que,

$$\left\{f \in {}^{a\cup\{z\}}V_\kappa \;\middle|\; F(f \restriction a) = f(z) = H^{a\cup\{z\}}_z(f)\right\} \in E_{a\cup\{z\}}. \tag{4.2}$$

Par conséquent, $[\![F]\!]_{\mathscr{E}} = [\![H^{a\cup\{z\}}_z]\!]_{\mathscr{E}}$. Or de plus, il découle de (4.1) et de (4.2) que

$$\begin{aligned}&\{f \in {}^{a\cup\{z\}}V_\kappa \mid f(z) \in f(y)\} \supseteq \\ &\qquad \{f \in {}^{a\cup\{z\}}V_\kappa \mid F(f \restriction a) \in f(y)\} \cap \{f \in {}^{a\cup\{z\}}V_\kappa \mid F(f \restriction a) = f(z)\} \in E_{a\cup\{z\}}.\end{aligned}$$

Cela implique que $z \in y$ car la clause (e3) d'extenseur assure que

$$\{f \in {}^{a\cup\{z\}}V_\kappa \mid f : (a \cup \{z\}, \in) \xrightarrow{\cong} (\mathrm{Im}\, f, \in)\} \in E_{a\cup\{z\}}.$$

Ainsi par hypothèse d'induction, $[\![F]\!]_{\mathscr{E}} = [\![H^{a\cup\{z\}}_z]\!]_{\mathscr{E}} = z \in y$. □

4.2 Extenseur dérivé d'une injection élémentaire

Nous montrons à présent que l'existence d'une injection élémentaire non triviale $\boldsymbol{j} : V \to M$, où M est une classe transitive, permet de définir un extenseur. De plus, il est possible d'approximer « arbitrairement près » une telle injection élémentaire par une injection élémentaire associée à un extenseur dérivé de $\boldsymbol{j}$.

Supposons donc que nous sommes dans le cadre d'une théorie étendant ZFC pour laquelle une certaine formule décrit une injection élémentaire $\boldsymbol{j} : V \to \boldsymbol{M}$ de point critique κ avec $\boldsymbol{M}$ une classe transitive. Nous définissons un extenseur à partir de $\boldsymbol{j}$. Nous prenons pour support de notre extenseur un ensemble Y transitif vérifiant ces deux propriétés

$$Y \not\subseteq V_\kappa \quad \text{et} \quad Y \subseteq V_{\boldsymbol{j}(\kappa)} \cap \boldsymbol{M}.$$

Nous nous arrêtons dans notre explication le temps d'une remarque générale dont nous allons faire un usage intensif.

Remarque 4.2.1. Remarquons en toute généralité les deux points suivants. Premièrement, pour une formule $\phi(x, p)$ où x est une variable libre et p un paramètre, l'image par une injection élémentaire $\boldsymbol{j} : V \to \boldsymbol{M}$ d'un ensemble défini par le schéma de compréhension est donnée par

$$\boldsymbol{j}\left(\{x \in A \mid \phi(x,p)\}\right) = \{x \in \boldsymbol{j}(A) \mid \phi(x, \boldsymbol{j}(p))^{\boldsymbol{M}}\}.$$

Deuxièmement, si X est un ensemble de cardinalité strictement inférieure à $\operatorname{crit} \boldsymbol{j}$, alors

$$\boldsymbol{j}(X) = \{\boldsymbol{j}(x) \mid x \in X\}.$$

En effet, il existe une bijection $f : \lambda \to X$ avec $\lambda < \operatorname{crit}(\boldsymbol{j})$ et donc $X = \{f(\alpha) \mid \alpha < \lambda\}$. Ainsi par la première remarque,

$$\boldsymbol{j}(X) = \{(\boldsymbol{j}f)(\alpha) \mid \alpha < \lambda\} = \{\boldsymbol{j}(f(\alpha)) \mid \alpha < \lambda\}.$$

Nous reprenons notre exposition. Pour tout $a \in {}^{<\omega}Y$, nous avons par la remarque précédente que $\boldsymbol{j}(a) = \{\boldsymbol{j}(y) \mid y \in a\}$. Ainsi, la fonction $\boldsymbol{j}^{-1}{\restriction}\boldsymbol{j}(a) : \boldsymbol{j}(a) \to a$ associe à chaque $\boldsymbol{j}(y) \in \boldsymbol{j}(a)$ l'ensemble $y \in a$. Par ailleurs, observons que pour $a \in {}^{<\omega}[Y]$, l'image par $\boldsymbol{j}$ de l'ensemble ${}^{a}V_\kappa$ est l'ensemble ${}^{j(a)}V_{j(\kappa)} \cap M$. Nous définissons alors pour tout $a \in {}^{<\omega}[Y]$,

$$E_a = \{X \in \mathscr{P}({}^{a}V_\kappa) \mid \boldsymbol{j}^{-1}{\restriction}\boldsymbol{j}(a) \in \boldsymbol{j}(X)\}$$

Nous montrons que le système $\mathscr{E}_j = \langle E_a \mid a \in {}^{<\omega}[Y]\rangle$ ainsi défini est un (κ, Y)-extenseur. Nous appelons $\mathscr{E}_j$ le l'**extenseur dérivé** de $\boldsymbol{j}$ avec support Y.

$\mathscr{E}_j$ vérifie (e1) : La vérification du fait que chaque E_a est un ultrafiltre est directe. Cependant, il apparaît que chaque E_a avec $a \subseteq V_\kappa$ est principal. La κ-complétude découle de l'élémentarité de $\boldsymbol{j}$ et du fait que $\operatorname{crit} \boldsymbol{j} = \kappa$. En effet, soit $\langle X_\alpha \mid \alpha < \gamma\rangle$ pour $\gamma < \kappa$ avec $X_\alpha \in E_a$, i.e. $\boldsymbol{j}^{-1}{\restriction}\boldsymbol{j}(a) \in j(X_\alpha)$, pour tout $\alpha < \gamma$. Comme $\boldsymbol{j}(\beta) = \beta$

pour tout $\beta < \kappa$, l'image par $\boldsymbol{j}$ de la famille $\langle X_\alpha \mid \alpha < \gamma \rangle$ n'est autre que la famille $\langle \boldsymbol{j}(X_\alpha) \mid \alpha < \gamma \rangle$. Par conséquent,

$$\boldsymbol{j}^{-1} \restriction \boldsymbol{j}(a) \in \bigcap_{\alpha<\gamma} \boldsymbol{j}(X_\alpha) = \boldsymbol{j}\Big(\bigcap_{\alpha<\gamma} X_\alpha \Big),$$

et donc $\bigcap_{\alpha<\gamma} X_\alpha \in E_a$. Pour montrer qu'il existe un ultrafiltre E_a qui n'est pas κ^+-complet, nous utilisons le fait que $\mathrm{Supp}(\mathscr{E}_j) \nsubseteq V_\kappa$. Prenons $y \in Y - V_\kappa$, nous avons $\mathrm{rang}(y) \geq \kappa$. Nous définissons pour tout $\alpha < \kappa$

$$X_\alpha = \{ f \in {}^{\{y\}}V_\kappa \mid \mathrm{rang}(f(y)) > \alpha \}.$$

Comme $\boldsymbol{j}^{-1} \restriction \boldsymbol{j}(\{y\}) = (\boldsymbol{j}(y), y)$ et que pour tout $\alpha < \kappa$

$$\boldsymbol{j}(X_\alpha) = \Big\{ f \in {}^{\{\boldsymbol{j}(y)\}}V_{\boldsymbol{j}(\kappa)} \cap \boldsymbol{M} \ \Big|\ \mathrm{rang}(f(\boldsymbol{j}(y))) > \alpha \Big\},$$

nous avons donc $X_\alpha \in E_{\{y\}}$ pour tout $\alpha < \kappa$. Or $\bigcap_{\alpha<\kappa} X_\alpha = \emptyset \notin E_{\{y\}}$. Ainsi, E_y n'est pas κ^+-complet. □

$\mathscr{E}_j$ vérifie (e2) : Soient $a \subseteq b \in {}^{<\omega}[Y]$. Comme $\boldsymbol{j}(a) \subseteq \boldsymbol{j}(b)$, nous avons

$$\big(\boldsymbol{j}^{-1} \restriction \boldsymbol{j}(b)\big) \restriction \boldsymbol{j}(a) = \boldsymbol{j}^{-1} \restriction \boldsymbol{j}(a).$$

De plus, pour tout $X \subseteq {}^a V_\kappa$,

$$\boldsymbol{j}(\{ f \in {}^b V_\kappa \mid f \restriction a \in X \}) = \{ f \in {}^{\boldsymbol{j}(b)} V_{\boldsymbol{j}(\kappa)} \cap \boldsymbol{M} \mid f \restriction \boldsymbol{j}(a) \in \boldsymbol{j}(X) \}.$$

Il s'ensuit que

$$\{ f \in {}^b V_\kappa \mid f \restriction a \in X \} \in E_b \leftrightarrow (\boldsymbol{j}^{-1} \restriction \boldsymbol{j}(b)) \restriction \boldsymbol{j}(a) \in \boldsymbol{j}(X) \leftrightarrow \boldsymbol{j}^{-1} \restriction \boldsymbol{j}(a) \in \boldsymbol{j}(X) \leftrightarrow X \in E_a.$$

$\mathscr{E}_j$ vérifie (e3). Pour tout $a \in {}^{<\omega}[Y]$, $\boldsymbol{j}^{-1} \restriction \boldsymbol{j}(a) : (\boldsymbol{j}(a), \in) \xrightarrow{\cong} (a, \in)$ est un $\in$-isomorphisme. De plus, la formule « f est un $\in$-isomorphisme » est absolue pour $\boldsymbol{M}$ transitif et donc

$$\boldsymbol{j}(\{ f \in {}^a V_\kappa \mid f : (a, \in) \xrightarrow{\cong} (\mathrm{Im} f, \in) \}) = \{ f \in {}^{\boldsymbol{j}(a)} V_{\boldsymbol{j}(\kappa)} \cap \boldsymbol{M} \mid f : (\boldsymbol{j}(a), \in) \xrightarrow{\cong} (\mathrm{Im} f, \in) \}.$$

Ainsi, $\{ f \in {}^a V_\kappa \mid f : (a, \in) \xrightarrow{\cong} (\mathrm{Im} f, \in) \} \in E_a$. □

$\mathscr{E}_j$ vérifie (e4) : Soit $F : {}^a V_\kappa \to V_\kappa$ vérifiant $\{ f \in {}^a V_\kappa \mid F(f) \in \bigcup \mathrm{Im} f \} \in E_a$. Nous avons donc par définition de E_a

$$\boldsymbol{j}^{-1} \restriction \boldsymbol{j}(a) \in \Big\{ f \in {}^{\boldsymbol{j}(a)} V_{\boldsymbol{j}(\kappa)} \cap M \ \Big|\ (\boldsymbol{j}F)(f) \in \bigcup \mathrm{Im} f \Big\},$$

où $\boldsymbol{j}F : {}^{\boldsymbol{j}(a)} V_{\boldsymbol{j}(\kappa)} \cap M \to V_{\boldsymbol{j}(\kappa)}$ est l'image par $\boldsymbol{j}$ de F. Ainsi,

$$(\boldsymbol{j}F)\big(\boldsymbol{j}^{-1} \restriction \boldsymbol{j}(a)\big) \in \bigcup \big(\mathrm{Im}\, \boldsymbol{j}^{-1} \restriction \boldsymbol{j}(a)\big) = \bigcup a.$$

Il existe donc $x \in a$ tel que $(\boldsymbol{j}F)\big(\boldsymbol{j}^{-1} \upharpoonright \boldsymbol{j}(a)\big) \in x$. Notons $y = (\boldsymbol{j}F)\big(\boldsymbol{j}^{-1} \upharpoonright \boldsymbol{j}(a)\big)$, par transitivité de Y, nous avons $y \in Y$. Observons alors que d'une part

$$(\boldsymbol{j}F)\Big(\big(\boldsymbol{j}^{-1} \upharpoonright \boldsymbol{j}(a \cup \{y\})\big) \upharpoonright \boldsymbol{j}(a)\Big) = (\boldsymbol{j}F)\big(\boldsymbol{j}^{-1} \upharpoonright \boldsymbol{j}(a)\big) = y,$$

et que d'autre part,

$$\boldsymbol{j}^{-1} \upharpoonright \boldsymbol{j}(a \cup \{y\})(\boldsymbol{j}(y)) = y.$$

Il s'ensuit que

$$\boldsymbol{j}^{-1} \upharpoonright \boldsymbol{j}(a \cup \{y\}) \in \Big\{ f \in {}^{j(a) \cup \{j(y)\}} V_{j(\kappa)} \cap M \,\Big|\, (\boldsymbol{j}F)(f \upharpoonright \boldsymbol{j}(a)) = f(\boldsymbol{j}(y)) \Big\},$$

et par définition de $E_{a \cup \{y\}}$, nous avons

$$\{f \in {}^{a \cup \{y\}} V_\kappa \mid F(f \upharpoonright a) = f(y)\} \in E_{a \cup \{y\}}.$$

Ainsi $\mathscr{E}_j$ vérifie (e4). □

$\mathscr{E}_j$ vérifie (e5) : Notons $\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}_j} : V \to \big(\mathbf{Ult}(V, \mathscr{E}_j), \boldsymbol{E}_{\mathscr{E}_j}\big)$ l'injection élémentaire associée à $\mathscr{E}_j$. Nous devons montrer que l'ultrapuissance associée à notre famille $\mathscr{E}_j$ est bien fondée. Nous montrons pour cela qu'elle s'injecte élémentairement dans $\boldsymbol{M}$. Ceci implique la bonne fondation de $(\mathbf{Ult}(V, \mathscr{E}_j), \boldsymbol{E}_{\mathscr{E}_j})$, car l'existence d'une suite $\boldsymbol{E}_{\mathscr{E}_j}$-descendante infinie implique l'existence d'une suite $\in$-descendante descendante dans $\boldsymbol{M}$. Nous définissons $\boldsymbol{k} : \mathbf{Ult}(V, \mathscr{E}_j) \to \boldsymbol{M}$ de sorte que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd} & \boldsymbol{M} \\ V \arrow[ur, "\boldsymbol{j}"] \arrow[r, "j_{\mathscr{E}_j}"'] & \mathbf{Ult}(V, \mathscr{E}_j) \arrow[u, "\boldsymbol{k}"'] \end{tikzcd} \tag{4.3}$$

Nous définissons pour tout $[\![a, F]\!]_{\mathscr{E}_j} \in \mathbf{Ult}(V, \mathscr{E}_j)$ où a indique que le domaine de F est ${}^a V_\kappa$,

$$\boldsymbol{k}([\![a, F]\!]_{\mathscr{E}_j}) = (\boldsymbol{j}F)(\boldsymbol{j}^{-1} \upharpoonright \boldsymbol{j}(a)).$$

La fonctionnelle $\boldsymbol{k}$ est bien définie et injective car pour tous $F : {}^a V_\kappa \to V$ et $G : {}^b V_\kappa \to V$, nous avons

$$\begin{aligned} [\![a, F]\!]_{\mathscr{E}_j} = [\![b, G]\!]_{\mathscr{E}_j} &\longleftrightarrow \{f \in {}^{a \cup b} V_\kappa \mid F(f \upharpoonright a) = G(f \upharpoonright b)\} \in E_{a \cup b} \\ &\longleftrightarrow (\boldsymbol{j}F)(\boldsymbol{j}^{-1} \upharpoonright \boldsymbol{j}(a)) = (\boldsymbol{j}G)(\boldsymbol{j}^{-1} \upharpoonright \boldsymbol{j}(b)) \\ &\longleftrightarrow \boldsymbol{k}([\![a, F]\!]_{\mathscr{E}_j}) = \boldsymbol{k}([\![b, G]\!]_{\mathscr{E}_j}). \end{aligned}$$

De plus $\boldsymbol{k}$ est élémentaire. En effet, si $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ est une formule du langage de la théorie des ensembles et $[\![a_1, F_1]\!]_{\mathscr{E}_j}, \ldots, [\![a_n, F_n]\!]_{\mathscr{E}_j} \in \mathbf{Ult}(V, \mathscr{E}_j)$, alors par le Théorème de Łoś (Théorème 2.3.3)

$$\begin{aligned}
&\varphi\left[[\![a_1, F_1]\!]_{\mathscr{E}_j}, \ldots, [\![a_n, F_n]\!]_{\mathscr{E}_j}\right]^{\mathbf{Ult}(V,\mathscr{E}_j),E_{\mathscr{E}_j}} \\
&\qquad\longleftrightarrow \{f \in {}^aV_\kappa \mid \varphi[F_1(f\restriction a_1), \ldots, F_n(f\restriction a_n)]\} \in E_a \\
&\qquad\longleftrightarrow \varphi\left[(\boldsymbol{j}F_1)(\boldsymbol{j}^{-1}\restriction\boldsymbol{j}(a_1)), \ldots, (\boldsymbol{j}F_n)(\boldsymbol{j}^{-1}\restriction\boldsymbol{j}(a_n))\right]^{\boldsymbol{M}} \\
&\qquad\longleftrightarrow \varphi\left[\boldsymbol{k}([\![a_1, F_1]\!]_{\mathscr{E}_j}), \ldots, \boldsymbol{k}([\![a_n, F_n]\!]_{\mathscr{E}_j})\right]^{\boldsymbol{M}}.
\end{aligned}$$

Finalement, la commutativité du diagramme (4.3) découle du fait que pour tout $x \in V$, nous avons pour la fonction constante $c^a_x : {}^aV_\kappa \to \{x\}$

$$\boldsymbol{k} \circ \boldsymbol{j}_{\mathscr{E}_j}(x) = \boldsymbol{k}([\![a, c^a_x]\!]_{\mathscr{E}_j}) = (\boldsymbol{j}c^a_x)(\boldsymbol{j}^{-1}\restriction\boldsymbol{j}(a)) = \boldsymbol{j}(x).$$

Ainsi, nous avons bien que l'ultrapuissance associée à un extenseur dérivé d'une injection élémentaire est bien fondée, comme annoncé. □

Rappelons que nous avons adopter la convention d'identifier une ultrapuissance bien fondée avec la classe transitive donnée par le Théorème de collapse de Mostowski. Ainsi, par le Lemme 4.1.3, $Y = \mathrm{Supp}(\mathscr{E}_j) \subseteq \mathbf{Ult}(V, \mathscr{E}_j)$. Montrons que $\boldsymbol{k}\restriction Y$ est l'identité. Par le Lemme 4.1.3, pour tout $y \in Y$ et tout $a \in {}^{<\omega}[Y]$ avec $y \in a$, la fonction $H^a_y : {}^aV_\kappa \to V_\kappa$ définie par $H^a_y(f) = f(y)$ représente y dans $\mathbf{Ult}(V, \mathscr{E}_j)$. Par conséquent,

$$\boldsymbol{k}(y) = \boldsymbol{k}\left([\![H^a_y]\!]_{\mathscr{E}_j}\right) = (\boldsymbol{j}H^a_y)(\boldsymbol{j}^{-1}\restriction\boldsymbol{j}(a)) = (\boldsymbol{j}^{-1}\restriction\boldsymbol{j}(a))\big(\boldsymbol{j}(y)\big) = y.$$

Dans ce sens, un extenseur permet d'approximer « arbitrairement près » une injection élémentaire.

Exemple 4.2.2. Nous montrons maintenant que si $\mathscr{E}$ est un (κ, Y)-extenseur et $\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}} : V \to \mathbf{Ult}(V, \mathscr{E})$ est l'injection élémentaire associée, alors l'extenseur dérivé de $\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}$ avec support Y n'est autre que $\mathscr{E}$ lui-même. Par le Lemme 4.1.3, nous avons bien que $Y \subseteq V_{\boldsymbol{j}(\kappa)} \cap \mathbf{Ult}(V, \mathscr{E}_j)$ car chaque $y \in Y$ est représenté par $H^a_y : {}^aV_\kappa \to V_\kappa$ pour $a \in {}^{<\omega}[Y]$ avec $y \in a$ et par le théorème de Łoś, le fait que $\mathrm{rang}(H^a_y(f)) = \mathrm{rang}(f(y)) < \kappa$ pour tout $f \in {}^aV_\kappa$ signifie que $\mathrm{rang}([\![H^a_y]\!]_{\mathscr{E}_j}) < \boldsymbol{j}(\kappa)$. Le fait que Y n'est pas inclus dans V_κ, comme nous l'avons exigé pour la définition d'un extenseur dérivé, apparaîtra par la suite. Observons que pour tout $a \in {}^{<\omega}[Y]$, nous avons par le Lemme 4.1.3 et le Théorème de Łoś que

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}^{-1}\restriction\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}(a) = \{(\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}(y), y) \mid y \in a\} &= \{\left([\![c^a_y]\!]_{\mathscr{E}}, [\![H^a_y]\!]_{\mathscr{E}}\right) \mid y \in a\} \\
&= [\![f \mapsto \{(y, f(y)) \mid y \in a\}]\!]_{\mathscr{E}} = [\![\mathrm{id}_{({}^aV_\kappa)}]\!]_{\mathscr{E}}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $X \subseteq {}^aV_\kappa$, nous avons

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}^{-1}\restriction\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}(a) \in \boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}(X) &\longleftrightarrow [\![\mathrm{id}_{({}^aV_\kappa)}]\!]_{\mathscr{E}} \in \boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}(X) \\
&\longleftrightarrow \{f \in {}^aV_\kappa \mid \mathrm{id}_{({}^aV_\kappa)}(f) \in X\} \in E_a \\
&\longleftrightarrow X \in E_a.
\end{aligned}$$

Cela signifie que l'extenseur dérivé de $\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}$ avec support Y est exactement $\mathscr{E}$.

Observons maintenant que si $a \in {}^{<\omega}[Y]$ et que $a \subseteq V_\kappa$, nous avons $\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}(a) = a$ et aussi $\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}^{-1} \restriction \boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}(a) = \mathrm{id}_a$. Par conséquent, le singleton $\{\mathrm{id}_a\}$ est dans l'ultrafiltre E_a, car

$$\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}^{-1} \restriction \boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}(a) = \mathrm{id}_a \in \{\mathrm{id}_a\} = \{\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}(\mathrm{id}_a)\} = \boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}(\{\mathrm{id}_a\}).$$

Il s'ensuit que $E_a = \{X \subseteq {}^aV_\kappa \mid \mathrm{id}_a \in X\}$ est principal et donc κ^+-complet. Or pour que $\mathrm{crit}(\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}) = \kappa$, la condition (e1) assure qu'il existe E_a qui n'est pas κ^+-complet. Ainsi, nécessairement pour ce a, $a \not\subseteq V_\kappa$. Par conséquent, comme annoncé, nous avons bien $Y \not\subseteq V_\kappa$.

De plus, ces considérations nous amène à une nouvelle représentation des éléments de l'ultrapuissance $\mathbf{Ult}(V, \mathscr{E})$. Pour tout $a \in {}^{<\omega}[Y]$ et toute fonction $F : {}^aV_\kappa \to V$, nous avons que

$$(\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}F)\big(\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}^{-1} \restriction \boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}(a)\big) = (\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}F)\big([\![\mathrm{id}_{({}^aV_\kappa)}]\!]_{\mathscr{E}}\big) = [\![a, F]\!]_{\mathscr{E}},$$

la dernière égalité découlant du fait que pour tout $f \in {}^aV_\kappa$,

$$\big(c_F^a(f)\big)\big(\mathrm{id}_{({}^aV_\kappa)}(f)\big) = F(f).$$

4.3 Deuxième définition

Suivant [MS89], nous avons donné la définition 4.1.1 d'extenseur car elle s'intégrait directement dans le cadre des systèmes inductifs d'ultrafiltres exposé dans la section 2.3. Toutefois, en adoptant cette définition, nous allons au devant d'une multitude de petits problèmes de notation. C'est pourquoi nous allons représenter un extenseur sous une forme légèrement différente.

Soit $\mathscr{E} = \langle E_a \mid a \in {}^{<\omega}[Y]\rangle$ un (κ, Y)-extenseur au sens de la définition 4.1.1. Nous souhaitons voir chaque E_a comme un ultrafiltre sur ${}^{|a|}V_\kappa$ plutôt que sur ${}^aV_\kappa$. Nous définissons donc pour chaque suite finie $q \in {}^\omega Y$ l'ensemble

$$E(q) = \left\{X \subseteq {}^{\mathrm{long}(q)}V_\kappa \;\middle|\; \{f \in {}^{\mathrm{Im}\,q}V_\kappa \mid f \circ q \in X\} \in E_{(\mathrm{Im}\,q)}\right\}$$

et nous formons le système $\mathscr{E}' = \langle E(q) \mid q \in {}^{<\omega}Y\rangle$. Ce système n'est pas à proprement parler un système inductif d'ultrafiltres, cependant nous pouvons faire la construction suivante. Si $q, r \in {}^{<\omega}Y$ et si $F : {}^{\mathrm{long}\,q}V_\kappa \to V$ et $G : {}^{\mathrm{long}(r)}V_\kappa \to V$, nous définissons la relation d'équivalence suivante

$$(q, F) \sim_{\mathscr{E}'} (r, G) \longleftrightarrow \{f \in {}^{\mathrm{long}(q^\frown r)}V_\kappa \mid F(f \restriction \mathrm{long}(q)) = G\big((f \circ \sigma_{rq}) \restriction \mathrm{long}(r)\big)\} \in E(q^\frown r),$$

où σ_{rq} est la permutation de $\mathrm{long}(q^\frown r)$ telle que $(q^\frown r) \circ \sigma_{rq} = r^\frown q$. Remarquons que par définition de $E(q^\frown r)$, nous avons

$$\begin{aligned}
&(q, F) \sim_{\mathscr{E}'} (r, G) \\
&\longleftrightarrow \left\{f \in {}^{\mathrm{Im}(q^\frown r)}V_\kappa \;\middle|\; F\left(\left(f \circ (q^\frown r)\right) \restriction \mathrm{long}(q)\right) = G\left(\left(f \circ (q^\frown r) \circ \sigma_{rq}\right) \restriction \mathrm{long}(r)\right)\right\} \in E_{\mathrm{Im}(q^\frown r)} \\
&\longleftrightarrow \left\{f \in {}^{\mathrm{Im}(q^\frown r)}V_\kappa \middle| F\left((f \restriction (\mathrm{Im}\,q)) \circ q\right) = G\Big(\big(f \restriction (\mathrm{Im}\,r)\big) \circ r\Big)\right\} \in E_{\mathrm{Im}(q^\frown r)}. \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

Nous formons alors la classe $\boldsymbol{M}_{\mathscr{E}'}$ contenant pour chaque $q \in {}^{<\omega}Y$ et toute fonction $F : {}^{\mathrm{long}(q)}V_\kappa \to V$ l'ensemble $[\![q,F]\!]_{\mathscr{E}'}$ des éléments de rang minimaux de la classe d'équivalence de (q,F) pour $\sim_{\mathscr{E}'}$. Nous définissons sur $\boldsymbol{M}_{\mathscr{E}'}$ la relationnelle suivante. Pour $[\![q,F]\!]_{\mathscr{E}'}, [\![r,G]\!]_{\mathscr{E}'} \in \boldsymbol{M}_{\mathscr{E}'}$,

$$\begin{aligned}&[\![q,F]\!]_{\mathscr{E}'} \boldsymbol{E}_{\mathscr{E}'} [\![r,G]\!]_{\mathscr{E}'}\\ &\qquad \longleftrightarrow \left\{ f \in {}^{\mathrm{long}(q^\frown r)}V_\kappa \;\middle|\; F(f\restriction \mathrm{long}(q)) \in G\big((f \circ \sigma_{rq})\restriction \mathrm{long}(r)\big)\right\} \in E(q^\frown r).\end{aligned}$$

Nous montrons que $\big(\mathbf{Ult}(V,\mathscr{E}), \in\big)$ est isomorphe à $(M_{\mathscr{E}'}, \boldsymbol{E}_{\mathscr{E}'})$. Notre iosorphisme est la fonctionnelle $\psi : (\boldsymbol{M}_{\mathscr{E}'}, \boldsymbol{E}_{\mathscr{E}'}) \to (\mathbf{Ult}(V,\mathscr{E}), \in)$ définie pour tout $q \in {}^{<\omega}Y$ et toute fonction $F : {}^{\mathrm{long}(q)}V_\kappa \to V$ par

$$\psi\big([\![q,F]\!]_{\mathscr{E}'}\big) = [\![\mathrm{Im}\, q, F_q]\!]_{\mathscr{E}},$$

où $F_q : {}^{\mathrm{Im}\, q}V_\kappa \to V$ est donnée par $F_q(f) = F(f \circ q)$.

ψ est une fonctionnelle injective : Pour $q, r \in {}^{<\omega}Y$ et des fonctions $F : {}^{\mathrm{long}(q)}V_\kappa \to V$ et $G : {}^{\mathrm{long}(r)}V_\kappa \to V$, nous avons par (4.4)

$$\begin{aligned}&[\![q,F]\!]_{\mathscr{E}'} = [\![r,G]\!]_{\mathscr{E}'}\\ &\longleftrightarrow \left\{ f \in {}^{\mathrm{Im}(q^\frown r)}V_\kappa \middle| F\big((f\restriction(\mathrm{Im}\, q)) \circ q\big) = G\Big(\big((f\restriction(\mathrm{Im}\, r)\big) \circ r\Big)\right\} \in E_{\mathrm{Im}(q^\frown r)}\\ &\longleftrightarrow \left\{ f \in {}^{\mathrm{Im}(q^\frown r)}V_\kappa \middle| F_q(f\restriction \mathrm{Im}\, q) = G_r\big(f\restriction(\mathrm{Im}\, r)\big)\right\} \in E_{\mathrm{Im}(q^\frown r)}\\ &\longleftrightarrow [\![\mathrm{Im}\, q, F_q]\!]_{\mathscr{E}} = [\![\mathrm{Im}\, r, G_r]\!]_{\mathscr{E}}\\ &\longleftrightarrow \psi\big([\![q,F]\!]_{\mathscr{E}'}\big) = \psi\big([\![r,G]\!]_{\mathscr{E}'}\big). \qquad \square\end{aligned}$$

ψ est surjective : Soient $a \in {}^{<\omega}[Y]$ et $F : {}^{a}V_\kappa \to V$. Pour toute bijection $\tau : |a| \to a$, la fonction $F_\tau : {}^{|a|}V_\kappa \to V$ définie pour tout $f \in {}^{|a|}V_\kappa$ par

$$F_\tau(f) = F(f \circ \tau^{-1}).$$

vérifie par définition de ψ que $\psi\big([\![\tau, F_\tau]\!]_{\mathscr{E}'}\big) = [\![a,F]\!]_{\mathscr{E}}$. Il s'ensuit la surjectivité de ψ. Remarquons que par l'injectivité de ψ, pour toutes bijections $\tau_1, \tau_2 : |a| \to a$, nous avons $[\![\tau_1, F_{\tau_1}]\!]_{\mathscr{E}'} = [\![\tau_2, F_{\tau_2}]\!]_{\mathscr{E}'}$. $\square$

ψ est un isomorphisme pour l'appartenance : Soient $[\![q,F]\!]_{\mathscr{E}'}, [\![r,G]\!]_{\mathscr{E}'} \in \boldsymbol{M}_{\mathscr{E}'}$. Nous avons par (4.4)

$$\begin{aligned}[\![q,F]\!]_{\mathscr{E}'} \boldsymbol{E}_{\mathscr{E}'} [\![r,G]\!]_{\mathscr{E}'} &\longleftrightarrow \{f \in {}^{\mathrm{long}(q^\frown r)}V_\kappa \mid F\big(f\restriction \mathrm{long}(q)\big) \in G\big((f \circ \sigma_{rq})\restriction \mathrm{long}(r)\big)\} \in E(q^\frown r)\\ &\longleftrightarrow \{f \in {}^{\mathrm{Im}(q^\frown r)}V_\kappa \mid F\big((f\restriction \mathrm{Im}\, q) \circ q\big) \in G\big((f\restriction \mathrm{Im}\, r) \circ r\big)\} \in E_{\mathrm{Im}(q^\frown r)}\\ &\longleftrightarrow \{f \in {}^{\mathrm{Im}(q^\frown r)}V_\kappa \mid F_q(f\restriction \mathrm{Im}\, q) \in G_r(f\restriction \mathrm{Im}\, r)\} \in E_{(\mathrm{Im}\, q)\cup(\mathrm{Im}\, r)}\\ &\longleftrightarrow [\![\mathrm{Im}\, q, F_q]\!]_{\mathscr{E}} \in [\![\mathrm{Im}\, r, G_r]\!]_{\mathscr{E}}\\ &\longleftrightarrow \psi\big([\![q,F]\!]_{\mathscr{E}'}\big) \in \psi\big([\![r,G]\!]_{\mathscr{E}'}\big) \qquad \square\end{aligned}$$

Nous énonçons à présent sous la forme d'une nouvelle définition, les propriétés que satisfait un système $\langle E(q) \mid q \in {}^{<\omega}Y\rangle$ pour qu'il corresponde à un extenseur au sens de la définition 4.1.1.

Définition 4.3.1. Soient κ un cardinal non dénombrable et Y un ensemble transitif. Un (κ, Y)-extenseur est un système $\mathscr{E} = \langle E(q) \mid q \in {}^{<\omega}Y\rangle$ vérifiant les propriétés suivantes

(e1*) chaque $E(q)$ est un ultrafiltre κ-complet sur ${}^{\operatorname{long}(q)}V_\kappa$ et il existe $q \in {}^{<\omega}Y$ tel que $E(q)$ n'est pas κ^+-complet ;

(e2*) les $E(q)$ sont compatibles, i.e. pour tous $q, r \in {}^{<\omega}Y$ et tout $X \subseteq {}^{\operatorname{long}(q)}V_\kappa$,

$$X \in E(q) \quad \text{si et seulement si} \quad \{f \in {}^{\operatorname{long}(q^\frown r)}V_\kappa \mid f \restriction \operatorname{long}(q) \in X\} \in E(q^\frown r);$$

(e3*) pour toute suite finie $q \in {}^{<\omega}Y$, nous avons

(a)

$$\left\{f \in {}^{\operatorname{long}(q)}V_\kappa \;\middle|\; \forall m, n \in \operatorname{long}(q)\big(q(m) \in q(n) \longleftrightarrow f(m) \in f(n)\big)\right\} \in E(q \circ \sigma);$$

(b) pour toute permutation σ de $\operatorname{long}(q)$, et tout $X \subseteq {}^{\operatorname{long}(q)}V_\kappa$

$$X \in E(q) \quad \text{si et seulement si} \quad \left\{f \in {}^{\operatorname{long}(q\circ\sigma)}V_\kappa \;\middle|\; f \circ \sigma^{-1} \in X\right\} \in E(q);$$

(c) [1]

$$\left\{f \in {}^{\operatorname{long}(q)}V_\kappa \;\middle|\; \forall m, n \in \operatorname{long}(q)\big(q(m) = q(n) \longleftrightarrow f(m) = f(n)\big)\right\} \in E(q);$$

(e4*) pour tout $q \in {}^{<\omega}Y$ et toute fonction $F : {}^{\operatorname{long}(q)}V_\kappa \to V_\kappa$ telle que

$$\left\{f \in {}^{\operatorname{long}(q)}V_\kappa \;\middle|\; F(f) \in \bigcup \operatorname{Im} f\right\} \in E(q),$$

il existe $y \in Y$ tel que

$$\{f \in {}^{\operatorname{long}\left(q^\frown(y)\right)}V_\kappa \mid F(f \restriction \operatorname{long}(q)) = f(\operatorname{long}(q))\} \in E(q^\frown(y));$$

(e5*) l'ultrapuissance $\mathbf{Ult}(V, \mathscr{E})$ est bien fondée.

Remarque 4.3.2. a) Si $\mathscr{E}$ est un extenseur au sens de la première définition, le système $\mathscr{E}'$ défini avant cette définition satisfait (e1*) à (e5*).

b) Réciproquement, si un système $\mathscr{E}' = \langle E(q) \mid q \in {}^{<\omega}Y\rangle$ satisfait (e1*) à (e4*), nous pouvons définir un système $\mathscr{E} = \langle E_a \mid a \in {}^{<\omega}[Y]\rangle$ en posant pour tout $a \in {}^{<\omega}[Y]$

$$E_a = \left\{X \subseteq {}^aV_\kappa \;\middle|\; \{f \in {}^{|a|}V_\kappa \mid f \circ \tau^{-1} \in X\} \in E(\tau)\right\},$$

où $\tau : |a| \to a$ est une bijection. Par la clause (e3*)(b), la définition de E_a ne dépend pas du choix de τ. Le système $\mathscr{E}$ vérifie alors (e1) à (e4) de la définition 4.1.1. Ainsi, comme dans la discussion précédant la définition, il est possible de définir l'interprétation relative $(\boldsymbol{M}_{\mathscr{E}'}, \boldsymbol{E}_{\mathscr{E}'})$ et celle-ci est isomorphe à $\mathbf{Ult}(V, \mathscr{E})$. La clause

1. Cette condition n'est pas explicitement présente dans [MS89]. Toutefois, il nous a semblé qu'elle était nécessaire pour établir l'équivalence entre les deux définitions d'extenseurs. Elle ne joue pas d'autre rôle et elle est vérifiée par un extenseur dérivé d'une injection élémentaire.

(e5*) prend donc son sens et nous dénotons également $\mathbf{Ult}(V,\mathscr{E})$ le modèle intérieur associé à un extenseur pour cette nouvelle définition.

c) Pour une fonction $F : {}^{n}V_\kappa \to V$ et une suite $q \in {}^{<\omega}Y$ de longueur n, nous notons $[\![q,F]\!]_\mathscr{E}$ l'élément de $\mathbf{Ult}(V,\mathscr{E})$ représenté par F relativement à q. Cette complication de la notation est nécessaire car F ne détermine pas sa classe comme dans la première définition. En général, pour deux suites distinctes $q,r \in {}^{<\omega}Y$ de longueur n, $[\![q,F]\!]_\mathscr{E} \neq [\![r,F]\!]_\mathscr{E}$.

Les deux définitions d'extenseur, à savoir les définitions 4.1.1 et 4.3.1, sont équivalentes dans le sens où, comme nous l'avons décrit, il existe une correspondance bijective naturelle entre les extenseurs de chaque type.

Pour notre nouvelle définition d'extenseur, le Théorème de Łoś (Théorème 2.3.3) s'énonce comme suit. Pour toute formule $\phi(v_1,\ldots,v_n)$ du langage de la théorie des ensembles et tous $[\![q_1,F_1]\!]_\mathscr{E},\ldots,[\![q_n,F_n]\!]_\mathscr{E} \in \mathbf{Ult}(V,\mathscr{E})$, nous avons

$$\phi\left[[\![q_1,F_1]\!]_\mathscr{E},\ldots,[\![q_n,F_n]\!]_\mathscr{E}\right]^{\mathbf{Ult}(V,\mathscr{E})}$$
$$\longleftrightarrow \left\{f_1{}^\frown\cdots{}^\frown f_n \in {}^{\mathrm{long}(q)}V_\kappa \;\middle|\; \phi[F_1(f_1),\ldots,F_n(f_n)]\right\} \in E(q),$$

où $q = q_1{}^\frown\cdots{}^\frown q_n$ et le domaine de chaque f_k est $\mathrm{long}(q_k)$.

La transcription du Lemme 4.1.3 pour notre nouvelle définition d'extenseur est la suivante.

Lemme 4.3.3. *Soit $\mathscr{E} = \langle E(q) \mid q \in {}^{<\omega}Y\rangle$ un (κ,Y)-extenseur. Pour tout $y \in Y$ et tout $q \in {}^{<\omega}Y$ tel que $q(n) = y$ pour un certain $n \in \mathrm{long}(q)$, la fonction $H^n_y : {}^{\mathrm{long}(q)}V_\kappa \to V_\kappa$ définie par*

$$H^n_y(f) = f(n)$$

représente y dans $\mathbf{Ult}(V,\mathscr{E})$, i.e. $y = [\![q,H^n_y]\!]_\mathscr{E}$. Par conséquent,

$$\mathrm{Supp}(\mathscr{E}) = Y \subseteq V_{\boldsymbol{j}_\mathscr{E}(\kappa)} \cap \mathbf{Ult}(V,\mathscr{E}).$$

Nous décrivons maintenant quelle est la traduction pour notre nouvelle définition d'extenseur de la notion d'extenseur dérivé d'une injection élémentaire. Supposons que $\boldsymbol{j} : V \to \boldsymbol{M}$ est une injection élémentaire de point critique κ dans une classe $\boldsymbol{M}$ transitive. Selon la définition de la section 4.2 et la correspondance entre extenseur de chaque type, l'extenseur $\mathscr{E} = \langle E(q) \mid q \in {}^{<\omega}Y\rangle$ est donné par

$$\begin{aligned}
X \in E(q) &\longleftrightarrow \{f \in {}^{\mathrm{Im}\,q}V_\kappa \mid f \circ q \in X\} \in E_{\mathrm{Im}\,q}\\
&\longleftrightarrow \boldsymbol{j}^{-1}\restriction \boldsymbol{j}(\mathrm{Im}\,q) \in \boldsymbol{j}\left(\{f \in {}^{\mathrm{Im}\,q}V_\kappa \mid f \circ q \in X\}\right)\\
&\longleftrightarrow \boldsymbol{j}^{-1}\restriction \boldsymbol{j}(\mathrm{Im}\,q) \in \{f \in {}^{\boldsymbol{j}(\mathrm{Im}\,q)}V_{\boldsymbol{j}(\kappa)} \cap \boldsymbol{M} \mid f \circ \boldsymbol{j}(q) \in \boldsymbol{j}(X)\}\\
&\longleftrightarrow \left(\boldsymbol{j}^{-1}\restriction \boldsymbol{j}(\mathrm{Im}\,q)\right) \circ \boldsymbol{j}(q) \in \boldsymbol{j}(X)\\
&\longleftrightarrow q \in \boldsymbol{j}(X).
\end{aligned}$$

Où $\mathscr{E}' = \langle E_a \mid a \in {}^{<\omega}[Y]\rangle$ représente l'extenseur dérivé au sens de la première définition d'extenseur.

Comme précédemment, nous avons que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} & \boldsymbol{M} \\ V \arrow[ur, "\boldsymbol{j}"] \arrow[r, "j_{\mathscr{E}}"'] & \mathbf{Ult}(V,\mathscr{E}) \arrow[u, "\boldsymbol{k}"'] \end{tikzcd} \tag{4.5}$$

où cette fois l'injection élémentaire $\boldsymbol{k} : \mathbf{Ult}(V,\mathscr{E}) \to \boldsymbol{M}$ est donnée pour tout $q \in {}^{<\omega}Y$ et toute fonction $F : {}^{\mathrm{long}(q)}V_\kappa \to V$ par

$$\begin{aligned}\boldsymbol{k}\left(\llbracket q,F\rrbracket_{\mathscr{E}}\right) =&\boldsymbol{k}\left(\llbracket \mathrm{Im}\,q,F_q\rrbracket_{\mathscr{E}'}\right)\\ =&(\boldsymbol{j}F_q)\left(\boldsymbol{j}^{-1}\restriction\boldsymbol{j}(\mathrm{Im}\,q)\right)\\ =&(\boldsymbol{j}F)\Big(\left(\boldsymbol{j}^{-1}\restriction\boldsymbol{j}(\mathrm{Im}\,q)\right)\circ\boldsymbol{j}(q)\Big)\\ =&(\boldsymbol{j}F)(q).\end{aligned}$$

où $F_q : {}^{\mathrm{Im}\,q}V_\kappa \to V$ est défini par $F_q(f) = F(f\circ q)$.

Nous montrons maintenant la version du Lemme 2.3.4 sur la bonne fondation de l'ultrapuissance correspondant à notre nouvelle définition d'extenseur.

Lemme 4.3.4. *Soit $\mathscr{E} = \langle E(q) \mid q \in {}^{<\omega}Y\rangle$ un système satisfaisant les conditions (e1*) à (e4*). L'ultrapuissance $\mathbf{Ult}(V,\mathscr{E})$ est bien fondée si et seulement si pour toute suite $(q_n)_{n\in\omega} \subseteq {}^{<\omega}Y$ avec $\forall n\in\omega(q_n\subseteq q_{n+1})$ et toute suite $(X_n)_{n\in\omega}$ avec $X_n\in E(q_n)$ pour tout $n\in\omega$, il existe une fonction $f:\omega\to V_k$ telle que $f\restriction\mathrm{long}(q_n)\in X_n$ pour tout $n\in\omega$.*

Démonstration. Soit $\langle E_a \mid a\in{}^{<\omega}[Y]\rangle$ l'extenseur au sens de la première définition, associé à $\mathscr{E}$.

($\Rightarrow$). Supposons que $\mathbf{Ult}(V,\mathscr{E})$ est bien fondée. Soient $(q_n)_{n\in\omega}\subseteq{}^{<\omega}Y$ une suite croissante pour $\subseteq$ et $(X_n)_{n\in\omega}$ une suite avec $X_n\in E(q_n)$ pour tout $n\in\omega$. Posons $D'=\{\mathrm{Im}\,q_n\mid n\in\omega\}$ et pour tout $n\in\omega$ définissons

$$X'_n=\{f\in{}^{\mathrm{Im}\,q_n}V_\kappa\mid f\circ q_n\in X_n\}\in E_{\mathrm{Im}\,q_n}.$$

Par le Lemme 2.3.4, il existe $g:\bigcup D'\to V_\kappa$ avec $g\restriction\mathrm{Im}\,q_n\in X'_n$ pour tout $n\in\omega$. Ainsi, la fonction $f=g\circ q$ avec $q=\bigcup_{n\in\omega}q_n$ vérifie $f\restriction\mathrm{long}(q_n)=g\circ q_n\in X_n$ pour tout $n\in\omega$.

($\Leftarrow$). Par contraposition, supposons que $\mathbf{Ult}(V,\mathscr{E})$ est mal fondée. Il existe donc dans $\mathbf{Ult}(V,\mathscr{E})$ une suite $\left(\llbracket q_n,F_n\rrbracket_{\mathscr{E}}\right)_{n\in\omega}$ descendante pour $\boldsymbol{E}_{\mathscr{E}}$. Par compatibilité des $E(q)$, nous pouvons supposer sans perte de généralité que $q_n\subseteq q_{n+1}$ pour tout $n\in\omega$. Nous définissons $X_0={}^{\mathrm{long}(q_0)}V_\kappa$ et pour tout $n\in\omega$ par récurrence

$$X_{n+1}=\left\{f\in{}^{\mathrm{long}(q_{n+1})}V_\kappa\;\middle|\;F_{n+1}(f)\in F_n(f\restriction\mathrm{long}(q_n))\right\}\in E(q_{n+1}).$$

Pour cette suite $(q_n)_{n\in\omega}$ et cette suite $(X_n)_{n\in\omega}$, il ne peut pas exister $f:\omega\to V_\kappa$ telle que $f\restriction\mathrm{long}(q_n)\in X_n$ pour tout $n\in\omega$. En effet, sinon la suite $\left(F_n(f\restriction\mathrm{long}(q_n))\right)_{n\in\omega}$ est descendante pour l'appartenance. □

4.4 Ultrapuissances internes et externes

Soit $\boldsymbol{M}$ un modèle intérieur de ZFC. Si $\mathscr{E} \in \boldsymbol{M}$ est un (κ, Y)-extenseur dans $\boldsymbol{M}$, alors $\left(\mathbf{Ult}(\boldsymbol{M}, \mathscr{E}), \boldsymbol{E}^{\boldsymbol{M}}_{\mathscr{E}}\right)$ est une interprétation relative définissable de $\boldsymbol{M}$. De plus, comme $\mathscr{E}$ est un extenseur de $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{M}}_{\mathscr{E}}$ est une relationnelle set-like, extensionnelle et bien fondée sur $\mathbf{Ult}(\boldsymbol{M}, \mathscr{E})$ dans $\boldsymbol{M}$. Par le collapse de Mostowski, nous identifions donc cette interprétation relative avec l'unique classe transitive de $\boldsymbol{M}$ qui lui est isomorphe. Par conséquent, $\mathbf{Ult}(\boldsymbol{M}, \mathscr{E}) \subseteq \boldsymbol{M}$ est un modèle intérieur de ZFC dont les éléments sont représentés par des fonctions $F : {}^{\operatorname{long}(q)}V_\kappa \cap \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}$ pour $q \in {}^{<\omega}Y$. Ils sont notés $[\![q, F]\!]^{\boldsymbol{M}}_{\mathscr{E}}$. Nous notons $\boldsymbol{j}^{\boldsymbol{M}}_{\mathscr{E}} : \boldsymbol{M} \to \mathbf{Ult}(\boldsymbol{M}, \mathscr{E})$ l'injection élémentaire associant à chaque $x \in \boldsymbol{M}$ la classe d'une fonction constante égale à x.

De plus, nous avons besoin de pouvoir construire l'ultrapuissance d'un modèle par un extenseur appartenant à un autre modèle. Soient $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ deux modèles intérieurs de ZFC. Supposons que $\mathscr{E} \in \boldsymbol{M}$ est un (κ, Y)-extenseur dans $\boldsymbol{M}$ et que $V_{\kappa+1} \cap \boldsymbol{M} = V_{\kappa+1} \cap \boldsymbol{N}$. Cette dernière condition nous assure que pour tout $n \in \omega$,

$$\mathscr{P}^{\boldsymbol{M}}\left({}^{n}V_\kappa \cap \boldsymbol{M}\right) = \mathscr{P}^{\boldsymbol{N}}\left({}^{n}V_\kappa \cap \boldsymbol{N}\right)$$

Ceci nous permet précisément de construire dans V l'ultrapuissance externe $\mathbf{Ult}^{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{N}, \mathscr{E})$ de $\boldsymbol{N}$ par $\mathscr{E}$ comme suit. Si $q, r \in {}^{<\omega}Y$ et si $F : {}^{\operatorname{long}(q)}V_\kappa \cap \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ et $G : {}^{\operatorname{long}(r)}V_\kappa \cap \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ sont des fonctions appartenant à $\boldsymbol{N}$, alors nous définissons la relationelle suivante

$$\begin{aligned}&(q, F) \sim_{\mathscr{E}} (r, G)\\ &\quad\longleftrightarrow \left\{ f \in {}^{\operatorname{long}(q^\frown r)}V_\kappa \cap \boldsymbol{N} \;\middle|\; F(f \restriction \operatorname{long}(q)) = G\big((f \circ \sigma_{rq}) \restriction \operatorname{long}(r)\big) \right\} \in E(q^\frown r).\end{aligned}$$

Ainsi définie, $\sim_{\mathscr{E}}$ est une relationelle d'équivalence sur la classe de V des couples (q, F) avec $q \in {}^{<\omega}Y$ et $F \in {}^{({}^{\operatorname{long}(q)}V_\kappa \cap \boldsymbol{N})}\boldsymbol{N} \cap \boldsymbol{N}$. Nous notons $[\![q, F]\!]^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}}$ l'ensemble des éléments de rang minimaux de la classe d'équivalence de (q, F) pour $\sim_{\mathscr{E}}$. Nous formons $\mathbf{Ult}^{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{N}, \mathscr{E})$ la classe des $[\![q, F]\!]^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}}$ et nous définissons sur celle-ci la relationelle

$$\begin{aligned}&[\![q, F]\!]^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}} \boldsymbol{E}^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}} [\![r, G]\!]^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}}\\ &\quad\longleftrightarrow \left\{ f \in {}^{\operatorname{long}(q^\frown r)}V_\kappa \cap \boldsymbol{N} \;\middle|\; F(f \restriction \operatorname{long}(q)) \in G\big((f \circ \sigma_{rq}) \restriction \operatorname{long}(r)\big) \right\} \in E(q^\frown r).\end{aligned}$$

Cette construction n'a lieu ni dans $\boldsymbol{M}$ ni dans $\boldsymbol{N}$, mais dans V. L'ultrapuisssance externe ainsi définie n'est pas forcément bien fondée. Toutefois, c'est le cas si $\boldsymbol{M}$ est dénombrablement clos comme le montre le lemme suivant. Nous disons qu'un ensemble ou une classe M est **dénombrablement clos** si tout sous-ensemble dénombrable de M appartient à M. En particulier, toute fonction $f : \omega \to M$ appartient à M, si M est dénombrablement clos et que $\omega \in M$.

Lemme 4.4.1. *Soient $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ deux modèles intérieurs de* ZFC. *Si $\mathscr{E} \in \boldsymbol{M}$ est un (κ, Y)-extenseur de $\boldsymbol{M}$, si $V_{\kappa+1} \cap \boldsymbol{M} = V_{\kappa+1} \cap \boldsymbol{N}$, et si $\boldsymbol{M}$ est dénombrablement clos, alors $\mathbf{Ult}^{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{N}, \mathscr{E})$ est bien fondée.*

Démonstration. Par contradiction, supposons que il existe une suite $\big([\![q_n, F_n]\!]^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}}\big)_{n\in\omega}$ descendante pour $\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}}$ dans $\mathbf{Ult}^{\text{ext}}(\boldsymbol{N}, \mathscr{E})$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $q_n \subseteq q_{n+1}$ pour tout $n \in \omega$. Définissons par récurrence $X_0 = {}^{\text{long}(q_0)}V_\kappa \cap \boldsymbol{N} = {}^{\text{long}(q_0)}V_\kappa \cap \boldsymbol{M}$ et pour tout $n \in \omega$,

$$X_{n+1} = \left\{ f \in {}^{\text{long}(q_{n+1})}V_\kappa \cap \boldsymbol{N} \;\middle|\; F_{n+1}(f) \in F_n(f \restriction \text{long}(q_n)) \right\}.$$

Pour tout $n \in \omega$, $X_n \in E(q_n)$ et comme $V_{\kappa+1} \cap \boldsymbol{M} = V_{\kappa+1} \cap \boldsymbol{N}$ nous avons aussi $X_n \in \boldsymbol{M} \cap \boldsymbol{N}$. En outre, il n'existe pas de fonction $f : \omega \to V_\kappa \cap \boldsymbol{M}$ telle que $f \restriction \text{long}(q_n) \in X_n$ pour tout $n \in \omega$, car sinon $\big(F_n(f \restriction \text{long}(q_n))\big)_{n\in\omega}$ serait descendante pour l'appartenance dans $\boldsymbol{N}$. Par ailleurs, comme $\boldsymbol{M}$ est dénombrablement clos, les deux suites $(q_n)_{n\in\omega}$ et $(X_n)_{n\in\omega}$ appartiennent à $\boldsymbol{M}$. Par la relativisation du Lemme 4.3.4 à $\boldsymbol{M}$, ceci implique alors que $\mathscr{E}$ ne vérifie pas la condition (e5*) de bonne fondation dans $\boldsymbol{M}$. Cela contredit notre hypothèse selon laquelle $\mathscr{E} \in \boldsymbol{M}$ est un extenseur dans $\boldsymbol{M}$. □

Que l'interprétation relative $\big(\mathbf{Ult}^{\text{ext}}(\boldsymbol{N}, \mathscr{E}), \boldsymbol{E}^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}}\big)$ soit ou ou non bien fondée, elle vérifie sa version du Théorème de Łoś. À savoir, pour toute formule $\phi(v_1, \ldots, v_n)$ du langage de la théorie des ensembles et tous $[\![q_1, F_1]\!]^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}}, \ldots, [\![q_n, F_n]\!]^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}} \in \mathbf{Ult}^{\text{ext}}(\boldsymbol{N}, \mathscr{E})$, nous avons

$$\begin{aligned}\phi\left[[\![q_1, F_1]\!]^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}}, \ldots, [\![q_n, F_n]\!]^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}}\right]^{\mathbf{Ult}^{\text{ext}}(\boldsymbol{N}, \mathscr{E}), \boldsymbol{E}^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}}} \\ \longleftrightarrow \left\{ f_1{}^\frown \cdots {}^\frown f_n \in {}^{\text{long}(q)}V_\kappa \cap \boldsymbol{N} \;\middle|\; \phi\left[F_1(f_1), \ldots, F_n(f_n)\right]^{\boldsymbol{N}} \right\} \in E(q),\end{aligned}$$

où $q = q_1{}^\frown \cdots {}^\frown q_n$ et le domaine de chaque f_k est $\text{long}(q_k)$.

Nous définissons également l'injection élémentaire $\boldsymbol{j}^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}} : \boldsymbol{N} \to (\mathbf{Ult}^{\text{ext}}(\boldsymbol{N}, \mathscr{E}), \boldsymbol{E}^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}})$, qui associe à chaque $x \in \boldsymbol{N}$ l'élément de $\mathbf{Ult}^{\text{ext}}(\boldsymbol{N}, \mathscr{E})$ représenté par une fonction constante égale à x.

Au chapitre 5, nous voulons pouvoir construire des ultrapuissances externes de façon répétée. Partant de $\boldsymbol{M}_0 = V$ et d'un extenseur $\mathscr{E}_0$ dans V, nous formons $\boldsymbol{M}_1 = \mathbf{Ult}(V, \mathscr{E}_0)$. Ensuite pour $\mathscr{E}_1 \in \boldsymbol{M}_1$, un extenseur dans $\boldsymbol{M}_1$, nous voulons pouvoir former $\boldsymbol{M}_2 = \mathbf{Ult}^{\text{ext}}(V, \mathscr{E}_1)$. Nous voulons pouvoir continuer ainsi.

$$\begin{tikzcd}
 & \boldsymbol{M}_1 = \mathbf{Ult}(V, \mathscr{E}_0) \arrow[r, "\boldsymbol{j}^{\boldsymbol{M}_1}_{\mathscr{E}_2}"] & \boldsymbol{M}_3 = \mathbf{Ult}^{\text{ext}}(\boldsymbol{M}_1, \mathscr{E}_2) & \\
\boldsymbol{M}_0 = V \arrow[ur, bend left, "\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}_0}"] \arrow[dr, bend right, "\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}_1}"'] & & & \cdots \\
 & \boldsymbol{M}_2 = \mathbf{Ult}^{\text{ext}}(V, \mathscr{E}_1) \arrow[r, "\boldsymbol{j}^{\boldsymbol{M}_2}_{\mathscr{E}_3}"'] & \boldsymbol{M}_4 = \mathbf{Ult}^{\text{ext}}(\boldsymbol{M}_2, \mathscr{E}_3) &
\end{tikzcd}$$

Afin de pouvoir effectuer cette construction, il nous faut d'abord contrôler les segments initiaux des ultrapuissances externes construites. En effet, pour continuer les constructions, il nous faut que les derniers modèles obtenus s'accordent jusqu'au rang $\text{crit}(\mathscr{E}) + 1$ pour l'extenseur $\mathscr{E}$ que nous considérons. D'autre part, par le Lemme 4.4.1, il suffit que les ultrapuissances que nous construites soient dénombrablement closes pour garantir la bonne fondation des interprétations relatives suivantes. Les deux lemmes suivant règlent ces questions.

Lemme 4.4.2. *Soient $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ deux modèles intérieurs de* ZFC. *Si $\mathscr{E} \in \boldsymbol{M}$ est un (κ, Y)-extenseur dans $\boldsymbol{M}$, si $V_{\kappa+1} \cap \boldsymbol{M} = V_{\kappa+1} \cap \boldsymbol{N}$, si pour un ordinal $\rho \geq \kappa$ nous avons $V_\rho \cap \boldsymbol{M} \subseteq \mathrm{Supp}(\mathscr{E}) = Y$, et si l'ultrapuissance $\mathbf{Ult}^{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{N}, \mathscr{E})$ est bien fondée, alors*

(1) $V_{\boldsymbol{j}^{\boldsymbol{M}}_{\mathscr{E}}(\kappa)} \cap \mathbf{Ult}(\boldsymbol{M}, \mathscr{E}) = V_{\boldsymbol{j}^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}}(\kappa)} \cap \mathbf{Ult}^{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{N}, \mathscr{E})$ *;*

(2) $\boldsymbol{j}^{\boldsymbol{M}}_{\mathscr{E}} \restriction (V_{\kappa+1} \cap \boldsymbol{M}) = \boldsymbol{j}^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}} \restriction (V_{\kappa+1} \cap \boldsymbol{N})$*, en particulier* $\boldsymbol{j}^{\boldsymbol{M}}_{\mathscr{E}}(\kappa) = \boldsymbol{j}^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}}(\kappa)$ *;*

(3) $\mathrm{Supp}(\mathscr{E}) \subseteq V_{\boldsymbol{j}^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}}(\kappa)} \cap \mathbf{Ult}^{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{N}, \mathscr{E})$ *;*

(4) $V_\rho \cap \boldsymbol{M} = V_\rho \cap \mathbf{Ult}(\boldsymbol{M}, \mathscr{E}) = V_\rho \cap \mathbf{Ult}^{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{N}, \mathscr{E})$.

$$\mathscr{E} \in \boldsymbol{M} \xrightarrow{\boldsymbol{j}^{\boldsymbol{M}}_{\mathscr{E}}} \mathbf{Ult}(\boldsymbol{M}, \mathscr{E})$$

$$\boldsymbol{N} \xrightarrow[\boldsymbol{j}^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}}]{} \mathbf{Ult}^{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{N}, \mathscr{E})$$

Démonstration. L'ultrapuissance $\mathbf{Ult}^{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{N}, \mathscr{E})$ étant bien fondée, elle est comme toujours identifiée avec la classe transitive qui lui est isomorphe.

(1). Nous montrons que les segments initiaux des ultrapuissances $V_{\boldsymbol{j}^{\boldsymbol{M}}_{\mathscr{E}}(\kappa)} \cap \mathbf{Ult}(\boldsymbol{M}, \mathscr{E})$ et $V_{\boldsymbol{j}^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}}(\kappa)} \cap \mathbf{Ult}^{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{N}, \mathscr{E})$ sont isomorphes. Leur collapse de Mostowski sont donc égaux, et dans ce collapse, nous avons pour tout $q \in {}^{<\omega}Y$ et toute fonction $F : {}^{\mathrm{long}(q)}V_\kappa \cap \boldsymbol{M} \to V_\kappa \cap \boldsymbol{M}$ dans $\boldsymbol{M}$,

$$[\![q, F]\!]^{\boldsymbol{M}}_{\mathscr{E}} = [\![q, F]\!]^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}}.$$

Soit $x \in V_{\boldsymbol{j}^{\boldsymbol{M}}_{\mathscr{E}}(\kappa)} \cap \mathbf{Ult}(\boldsymbol{M}, \mathscr{E})$. L'ensemble x est représenté dans $\mathbf{Ult}(\boldsymbol{M}, \mathscr{E})$ par une fonction $F : {}^{\mathrm{long}(q)}V_\kappa \cap \boldsymbol{M} \to V_\kappa \cap \boldsymbol{M}$ de $\boldsymbol{M}$, car par le Théorème de Łoś,

$$\mathrm{rang}\left([\![q, F]\!]^{\boldsymbol{M}}_{\mathscr{E}}\right) < \boldsymbol{j}^{\boldsymbol{M}}_{\mathscr{E}}(\kappa) \longleftrightarrow \{f \in {}^{\mathrm{long}(q)}V_\kappa \cap \boldsymbol{M} \mid \mathrm{rang}(F(f)) < \kappa\} \in E(q).$$

Comme κ est fortement inaccessible, le rang d'une telle fonction F est κ. Il s'ensuit que $F \in V_{\kappa+1} \cap \boldsymbol{M} = V_{\kappa+1} \cap \boldsymbol{N}$. Réciproquement, tout membre de $\mathbf{Ult}(\boldsymbol{M}, \mathscr{E})$ représenté par une fonction $F : {}^{\mathrm{long}(q)}V_\kappa \cap \boldsymbol{M} \to V_\kappa \cap \boldsymbol{M}$ relativement à une suite $q \in {}^{<\omega}Y$ de longueur n possède dans $\mathbf{Ult}(\boldsymbol{M}, \mathscr{E})$ un rang strictement inférieur à $\boldsymbol{j}^{\boldsymbol{M}}_{\mathscr{E}}(\kappa)$. De même, $x \in V_{\boldsymbol{j}^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}}(\kappa)} \cap \mathbf{Ult}^{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{N}, \mathscr{E})$ si seulement et seulement s'il existe $q \in {}^{<\omega}Y$ et $F : {}^{\mathrm{long}(q)}V_\kappa \cap \boldsymbol{N} \to V_\kappa \cap \boldsymbol{N}$ une fonction appartenant à $\boldsymbol{N}$ telles que $x = [\![q, F]\!]^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}}$.

De plus, pour toutes fonctions $F : {}^{\mathrm{long}(q)}V_\kappa \cap \boldsymbol{M} \to V_\kappa \cap \boldsymbol{M}$ et $G : {}^{\mathrm{long}(r)}V_\kappa \cap \boldsymbol{M} \to V_\kappa \cap \boldsymbol{M}$, qui sont dans $\boldsymbol{M}$ si et seulement si elles sont dans $\boldsymbol{N}$, nous avons

$$[\![q, F]\!]^{\boldsymbol{M}}_{\mathscr{E}} = [\![r, G]\!]^{\boldsymbol{M}}_{\mathscr{E}} \Longleftrightarrow [\![q, F]\!]^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}} = [\![r, G]\!]^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}}$$

et

$$[\![q, F]\!]^{\boldsymbol{M}}_{\mathscr{E}} \boldsymbol{E}^{\boldsymbol{M}}_{\mathscr{E}} [\![r, G]\!]^{\boldsymbol{M}}_{\mathscr{E}} \Longleftrightarrow [\![q, F]\!]^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}} \boldsymbol{E}^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}} [\![r, G]\!]^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}}.$$

(2). Soit $x \in V_{\kappa+1} \cap \boldsymbol{M} = V_{\kappa+1} \cap \boldsymbol{N}$. Si $y \in \boldsymbol{j}^{\boldsymbol{M}}_{\mathscr{E}}(x)$, alors

$$\mathrm{rang}(y) < \mathrm{rang}(\boldsymbol{j}^{\boldsymbol{M}}_{\mathscr{E}}(x)) \leq \boldsymbol{j}^{\boldsymbol{M}}_{\mathscr{E}}(\kappa).$$

Ainsi, y est représenté par une fonction $F : {}^{\mathrm{long}(q)}V_\kappa \cap \boldsymbol{M} \to V_\kappa \cap \boldsymbol{M}$ autant dans $\mathbf{Ult}(\boldsymbol{M}, \mathscr{E})$ que dans $\mathbf{Ult}^{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{N}, \mathscr{E})$ par *(1)*. De plus, le fait que

$$\left\{f \in {}^{\mathrm{long}(q)}V_\kappa \cap \boldsymbol{M} \;\middle|\; F(f) \in x\right\} \in E(q),$$

signifie également que $y = [\![q, F]\!]^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}} \in \boldsymbol{j}^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}}(x)$. Par conséquent $\boldsymbol{j}^{\boldsymbol{M}}_{\mathscr{E}}(x) \subseteq \boldsymbol{j}^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}}(x)$. L'autre inclusion est symétrique, donc finalement $\boldsymbol{j}^{\boldsymbol{M}}_{\mathscr{E}}(x) = \boldsymbol{j}^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}}(x)$.

(3). Soit $y \in \mathrm{Supp}(\mathscr{E})$. Par le Lemme 4.3.3, y est représenté dans $\mathbf{Ult}(\boldsymbol{M}, \mathscr{E})$ par une fonction $H^n_y : {}^{\mathrm{long}(q)}V_\kappa \cap \boldsymbol{M} \to V_\kappa \cap \boldsymbol{M}$, $f \mapsto f(n)$ pour une suite $q \in {}^{<\omega}Y$ telle que $q(n) = y$ pour $n \in \mathrm{long}(q)$. Nous avons donc par le Théorème de Łoś que $\mathrm{rang}(y) < \boldsymbol{j}^{\boldsymbol{M}}_{\mathscr{E}}(\kappa)$. Par *(1)*, $[\![q, H^n_y]\!]^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}} = [\![q, H^n_y]\!]^{\boldsymbol{M}}_{\mathscr{E}} = y$. Par conséquent $y \in \mathbf{Ult}^{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{N}, \mathscr{E})$. Ainsi $\mathrm{Supp}(\mathscr{E}) \subseteq V_{\boldsymbol{j}^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}}(\kappa)} \cap \mathbf{Ult}^{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{N}, \mathscr{E})$.

(4). Par le Lemme 4.3.3, nous avons $\rho \leq \boldsymbol{j}^{\boldsymbol{M}}_{\mathscr{E}}(\kappa)$. Il découle alors de *(1)* que $V_\rho \cap \mathbf{Ult}(\boldsymbol{M}, \mathscr{E}) = V_\rho \cap \mathbf{Ult}^{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{N}, \mathscr{E})$. □

Lemme 4.4.3. *Soient $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ deux modèles intérieurs de* ZFC *qui sont dénombrablement clos. Si $\mathscr{E} \in \boldsymbol{M}$ est un (κ, Y)-extenseur dans $\boldsymbol{M}$, si $V_{\kappa+1} \cap \boldsymbol{M} = V_{\kappa+1} \cap \boldsymbol{N}$, et si* $\mathrm{Supp}(\mathscr{E}) = Y$ *est dénombrablement clos, alors l'ultrapuissance bien fondée* $\mathbf{Ult}^{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{N}, \mathscr{E})$ *est dénombrablement close.*

Démonstration. Soit $\left([\![q_n, F_n]\!]^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}}\right)_{n\in\omega}$ une suite d'éléments de $\mathbf{Ult}^{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{N}, \mathscr{E})$. Nous montrons qu'elle appartient à $\mathbf{Ult}^{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{N}, \mathscr{E})$. Comme Y est dénombrablement clos, chaque $q_n \in Y$ et donc la suite $b = (q_n)_{n\in\omega} \in Y$. Nous définissons une fonction $F : {}^1V_\kappa \cap \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ telle que $[\![(b), F]\!]^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}}$ soit notre suite $\left([\![q_n, F_n]\!]^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}}\right)_{n\in\omega}$. Posons

$$F\big((y)\big) = \begin{cases} \langle F_n\big(y(n)\big) \mid n \in \omega\rangle & \text{si } y : \omega \to N \text{ et } (\forall n \in \omega) y(n) \in {}^{\mathrm{long}(q_n)}V_\kappa \cap \boldsymbol{N}; \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme chaque $F_n \in \boldsymbol{N}$, la suite $(F_n)_{n\in\omega}$ appartient à $\boldsymbol{N}$ car $\boldsymbol{N}$ est dénombrablement clos. De plus, pour tout $n \in \omega$, ${}^{\mathrm{long}(q_n)}V_\kappa \cap \boldsymbol{N}$ est le domaine de F_n. Il s'ensuit que F est définissable dans $\boldsymbol{N}$ à partir de $(F_n)_{n\in\omega} \in \boldsymbol{N}$, et donc $F \in \boldsymbol{N}$. Ainsi, $[\![(b), F]\!]^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}} \in \mathbf{Ult}^{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{N}, \mathscr{E})$. Il nous faut voir que le domaine sur lequel F n'est pas égale à $\emptyset$ appartient $E\big((b)\big)$ afin que les propriétés de $F\big((y)\big)$ quand $y : \omega \to \boldsymbol{N}$ et $(\forall n \in \omega) y(n) \in {}^{\mathrm{long}(q_n)}V_\kappa \cap \boldsymbol{N}$ s'appliquent à $[\![(b), F]\!]^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}}$ par le Théorème de Łoś. Pour voir ceci, rappelons que par le Lemme 4.3.3 et le Lemme 4.4.2, la fonction $H^1_b : {}^1V_\kappa \cap \boldsymbol{N} \to V_\kappa \cap \boldsymbol{N}$, $(y) \mapsto y$ représente $b \in Y$, i.e. $[\![(b), H^1_b]\!]^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}} = b$. Or b est une fonction de domaine ω et pour tout $n \in \omega$,

$$b(n) = q_n = \langle (k, q_k) \mid k \in \mathrm{long}(q_n)\rangle.$$

Ainsi pour tout $n \in \omega$, $b(n)$ est une fonction de domaine $\mathrm{long}(q_n)$, et par le point *(3)* du Lemme 4.4.2, son codomaine est inclus dans $V_{\boldsymbol{j}^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}}(\kappa)} \cap \boldsymbol{N}$. Il s'ensuit par le Théorème de Łoś, que $H^1_b\big((y)\big) = y$ est une fonction de domaine ω et $y(n) \in {}^{\mathrm{long}(q_n)}V_\kappa \cap \boldsymbol{N}$ pour $E\big((b)\big)$-presque tout $(y) \in {}^1V_\kappa \cap \boldsymbol{N}$. Par conséquent, comme désiré

$$X = \left\{(y) \in {}^1V_\kappa \cap \boldsymbol{N} \mid y : \omega \to N \text{ et } (\forall n \in \omega) y(n) \in {}^{\mathrm{long}(q_n)}V_\kappa \cap \boldsymbol{N}\right\} \in E\big((b)\big). \tag{4.6}$$

Ceci nous assure que notre définition de F fait sens et que par le théorème de Łoś sa classe $[\![(b),F]\!]^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}}$ est une fonction de domaine ω et de codomaine inclus dans $V_{\boldsymbol{j}^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}}(\kappa)} \cap \boldsymbol{N}$. En outre, nous avons bien $[\![(b),F]\!]^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}} = \big([\![q_n,F_n]\!]^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}}\big)_{n\in\omega}$. Pour voir ceci, nous devons montrer que pour tout $n \in \omega$, $[\![(b),F]\!]^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}}(n) = [\![q_n,F_n]\!]^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}}$, ce qui est équivalent à

$$\Big\{(y)^\frown f \in {}^{1+\operatorname{long}(q_n)}V_\kappa \cap \boldsymbol{M} \;\Big|\; (y)\in X \text{ et } F\big((y)\big)(n) = F_n(f)\Big\} \in E\big((b)^\frown q_n\big),$$

où X est défini par (4.6). Rappelons que pour $(y) \in X$, par définition de F, nous avons $F\big((y)\big)(n) = F_n\big(y(n)\big)$. Il nous suffit donc de voir que

$$\Big\{(y)^\frown f \in {}^{1+\operatorname{long}(q_n)}V_\kappa \cap \boldsymbol{M} \;\Big|\; (y)\in X \text{ et } y(n) = f\Big\} \in E\big((b)^\frown q_n\big).$$

Or ceci découle du fait que $[\![(b),H^1_b]\!]^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}}(n) = b(n) = q_n$ et que comme déjà vu

$$\begin{aligned} q_n &= \{(i,q_n(i)) \mid i \in \operatorname{long}(q_n)\} \\ &= \Big\{\big(\boldsymbol{j}^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}}(i), [\![q_n, H^i_{q_n(i)}]\!]^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}}\big) \;\Big|\; i \in \operatorname{long}(q_n)\Big\} \\ &= [\![q_n, \mathrm{id}_{({}^{\operatorname{long}(q_n)}V_\kappa \cap \boldsymbol{N})}]\!]^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}} \end{aligned}$$

Relativement à la suite (b), la fonction F représente donc la suite $\big([\![q_n,F_n]\!]^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}}\big)_{n\in\omega}$. □

Notes. Ce chapitre est basé sur [MS89]. Nombre de développements exposés ici sont cependant des détails absents de [MS89] que l'auteur de ce travail a essayé d'exposer le plus conformément à l'article en question. Notamment, ni la forme ni la démonstration du Lemme 4.4.2 ne sont présentes dans [MS89].

Chapitre 5

Arbres d'itérations

Couvert de papillons
l'arbre mort
est en fleur

Kobayashi Issa

Un arbre d'itération porte potentiellement un univers à chacun de ses nœuds. Les univers se composent le long d'une branche pour former un univers au bout de cette branche.

5.1 Définition

Nous formalisons le type de construction évoqué au chapitre précédent comme motivation pour les lemmes 4.4.2 et 4.4.3. Nous définissons la notion d'arbre d'itération de façon récursive.

Définition 5.1.1. Soit $n \in \omega$. Un couple $\mathscr{A} = \big(\prec, \langle(\mathscr{E}_k, \rho_k) \mid k < n\rangle\big)$ est un **préarbre d'itération** si

(i) $(n+1, \prec)$ est un arbre dont 0 est la racine et tel que $\prec$ respecte l'ordre naturel de $n+1$, i.e. $\prec \subseteq (< \restriction (n+1))$;

(ii) $\langle \rho_k \mid k < n\rangle$ est une suite croissante d'ordinaux, i.e. si $n > 0$, $\rho_k \leq \rho_{k+1}$ pour tout $k < n-1$

Un préarbre d'itération $\mathscr{A} = \big(\prec, (\mathscr{E}_0, \rho_0)\big)$ est un **arbre d'itération** (dénombrablement clos) de longueur 2 si

(a_0) $\mathscr{E}_0$ est un extenseur de V ;

(b_0) $\mathrm{Supp}(\mathscr{E}_0)$ est dénombrablement clos ;

(c_0) $V_{\rho_0+1} \subseteq \mathrm{Supp}(\mathscr{E}_0)$;

Nous associons à un arbre d'itération $\mathscr{A}$ de longueur 2 le **système canonique** $\langle \boldsymbol{M}_k, \boldsymbol{j}_{k,l} \mid k \preceq l \in 2\rangle$ comme suit. Nous posons $\boldsymbol{M}_0 = V$ et formons $\boldsymbol{M}_1 = \mathbf{Ult}(V, \mathscr{E}_0)$

qui est dénombrablement clos par 4.4.3 et vérifie $V_{\rho_0+1} \subseteq \boldsymbol{M}_1$. Nous posons $j_{k,k} = \mathrm{id}_{\boldsymbol{M}_k}$ et $\boldsymbol{j}_{0,1} = \boldsymbol{j}_{\mathscr{E}_0}$.

$$V = \boldsymbol{M}_0 \xrightarrow{j_{\mathscr{E}}^{\boldsymbol{M}_0}} \boldsymbol{M}_1$$

Récursivement pour $n > 0$, un préarbre d'itération

$$\mathscr{A} = \big(\prec, \langle (\mathscr{E}_k, \rho_k) \mid k < n+1 \rangle \big)$$

est un **arbre d'itération** (dénombrablement clos) de longueur $n+2$ si

$$\mathscr{A} \restriction n = \big(\prec \restriction (n+1), \langle (\mathscr{E}_k, \rho_k) \mid k < n \rangle \big)$$

est un arbre d'itération de longueur n et si pour le système $\langle \boldsymbol{M}_k, \boldsymbol{j}_{k,l} \mid k \preceq l \in n+1 \rangle$ associé à $\mathscr{A} \restriction n$ nous avons

(a_n) $\mathscr{E}_n \in \boldsymbol{M}_n$ est un extenseur de $\boldsymbol{M}_n$;
(b_n) $\mathrm{Supp}(\mathscr{E}_n)$ est dénombrablement clos ;
(c_n) $V_{\rho_n+1} \cap \boldsymbol{M}_n \subseteq \mathrm{Supp}(\mathscr{E}_n)$;
(d_n) pour n^* le prédécesseur immédiat de $n+1$ pour $\prec$,

$$V_{\rho_{n^*}+1} \cap \boldsymbol{M}_n = V_{\rho_{n^*}+1} \cap \boldsymbol{M}_{n^*};$$

(e_n) $\rho_{n^*} \geq \mathrm{crit}(\mathscr{E}_n)$.

Le **système canonique** $\langle \boldsymbol{M}_k, \boldsymbol{j}_{k,l} \mid k \preceq l < n+2 \rangle$ associé à $\mathscr{A}$ étend celui de $\mathscr{A} \restriction n$ comme suit. Les conditions (d_n) et (e_n), nous assure que nous pouvons former $\boldsymbol{M}_{n+1} = \mathbf{Ult}^{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{M}_{n^*}, \mathscr{E}_n)$. Par (b_n) et le fait que $\boldsymbol{M}_{n^*}$ et $\boldsymbol{M}_n$ sont dénombrablement clos, $\boldsymbol{M}_{n+1}$ est dénombrablement clos par le Lemme 4.4.3. Par (c_n) et le Lemme 4.4.2, nous avons $V_{\rho_n+1} \cap \boldsymbol{M}_n = V_{\rho_n+1} \cap \boldsymbol{M}_{n+1}$. De plus, pour tout $k < n$ avec $k \prec n+1$, nous posons

$$\boldsymbol{j}_{k,n+1} = \boldsymbol{j}_{\mathscr{E}_n}^{\boldsymbol{M}_{n^*}} \circ \boldsymbol{j}_{k,n^*}.$$

Le schéma suivant représente la façon dont nous définissons le système canonique de $\mathscr{A}$ à partir de celui de $\mathscr{A} \restriction n$.

$$\begin{tikzcd}
 & \boldsymbol{M}_n \ni \mathscr{E}_n & \\
\boldsymbol{M}_k \arrow[r, "\boldsymbol{j}_{k,n*}"] \arrow[rr, bend right, "\boldsymbol{j}_{k,n+1}"'] & \boldsymbol{M}_{n^*} \arrow[r, "\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}_n}^{\boldsymbol{M}_{n^*}}"] & \boldsymbol{M}_{n+1} = \mathbf{Ult}^{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{M}_{n^*}, \mathscr{E}_n)
\end{tikzcd}$$

Soient $\mathscr{A} = \big(\prec, \langle (\mathscr{E}_k, \rho_k) \mid k < n \rangle \big)$ un arbre d'itération de longueur $n+1$ et $\langle \boldsymbol{M}_k, \boldsymbol{j}_{k,l} \mid k \preceq< n+1 \rangle$ son système canonique associé. Par induction, chaque $\boldsymbol{M}_k$ est un modèle intérieur dénombrablement clos. De plus, il découle par induction également, que pour tout $k_1 \leq k_2 \leq n$,

$$V_{\rho_{k_1}+1} \cap \boldsymbol{M}_{k_1} = V_{\rho_{k_1}+1} \cap \boldsymbol{M}_{k_2}.$$

Définition 5.1.2. Un couple $\mathscr{A} = \big(\prec, \langle(\mathscr{E}_k, \rho_k) \mid k < \omega\rangle\big)$ est un **arbre d'itération** de longueur ω, si pour tout $n \in \omega$,

$$\mathscr{A}\restriction n = \big(\prec\restriction(n+1), \langle(\mathscr{E}_k, \rho_k) \mid k < n\rangle\big)$$

est un arbre d'itération de longueur $n+1$.

Nous n'allons utiliser qu'un type particulier d'arbre d'itération. Nous considérons sur ω l'ordre partiel est donné par

$$m \prec_{\mathrm{alt}} n \quad \text{si et seulement si} \quad m < n \wedge (m = 0 \vee n - m \text{ est pair}).$$

Une **chaîne alternée** (dénombrablement close) de longueur $\alpha \leq \omega$ est un arbre d'itération $\mathscr{A} = \big(\prec, \langle(\mathscr{E}_k, \rho_k) \mid k+1 < \alpha\rangle\big)$ de longueur α tel que $\prec\restriction\alpha = \prec_{\mathrm{alt}}\restriction\alpha$. Nous dénotons simplement par $\langle(\mathscr{E}_k, \rho_k) \mid k+1 < \alpha\rangle$ une chaîne alternée de longueur α, en omettant $\prec_{\mathrm{alt}}\restriction\alpha$. Nous notons $\langle \boldsymbol{M}_k, \boldsymbol{j}_{k,l} \mid k \preceq_{\mathrm{alt}} l < \alpha\rangle$ son système canonique associé que nous représentons par le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
 & \boldsymbol{M}_1 = \mathbf{Ult}(V, \mathscr{E}_0) \arrow[r, "\boldsymbol{j}^{\boldsymbol{M}_1}_{\mathscr{E}_2}"] & \boldsymbol{M}_3 = \mathbf{Ult}^{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{M}_1, \mathscr{E}_2) \arrow[r, "\boldsymbol{j}^{\boldsymbol{M}_3}_{\mathscr{E}_4}"] & \boldsymbol{M}_5 & \\
\boldsymbol{M}_0 = V \arrow[ur, "\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}_0}"] \arrow[dr, "\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}_1}"'] & & & & \cdots \\
 & \boldsymbol{M}_2 = \mathbf{Ult}^{\mathrm{ext}}(V, \mathscr{E}_1) \arrow[r, "\boldsymbol{j}^{\boldsymbol{M}_2}_{\mathscr{E}_3}"'] & \boldsymbol{M}_4 = \mathbf{Ult}^{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{M}_2, \mathscr{E}_3) \arrow[r, "\boldsymbol{j}^{\boldsymbol{M}_4}_{\mathscr{E}_5}"'] & \boldsymbol{M}_6 &
\end{tikzcd}$$

5.2 Au bout d'une branche

Une **branche** d'un arbre d'itération $\mathscr{A}$ de longueur $\alpha \leq \omega$ est un ensemble totalement ordonné par $\prec$ et maximal pour l'inclusion. Une **branche infinie** d'un arbre d'itération de longueur ω est donc un ensemble infini, totalement ordonné par $\prec$, et maximal pour l'inclusion. Si $\langle \boldsymbol{M}_k, \boldsymbol{j}_{k,l} \mid k \preceq \alpha\rangle$ est le système canonique associé à un arbre d'itération $\mathscr{A}$ et b est une branche de $\mathscr{A}$, alors nous pouvons former la limite directe du système associé à la branche :

$$\langle \boldsymbol{M}_k, \boldsymbol{j}_{k,l} \mid k \preceq l \in b\rangle \tag{5.1}$$

Pour ceci, nous considérons la classe des couples (k, x) tels que $k \in b$ et $x \in \boldsymbol{M}_k$ sur laquelle nous définissons la relationnelle d'équivalence

$$(k, x) \sim (l, y) \quad \text{si et seulement si} \quad \boldsymbol{j}_{k,m}(x) = \boldsymbol{j}_{l,m}(y), \ \text{pour } m = \max\{k, l\}.$$

Nous dénotons alors par $[k, x]_b$ l'ensemble des éléments de rang minimal appartenant à la classe d'équivalence de (k, x) pour $\sim$. Nous formons alors la classe $\boldsymbol{M}_\infty$ constitué des ensembles $[k, x]_b$ avec $k \in b$ et $x \in \boldsymbol{M}_k$. Nous définissons sur cette classe la relationnelle

$$[k, x]_b \boldsymbol{E}_b [l, y]_b \quad \text{si et seulement si} \quad \boldsymbol{j}_{k,m}(x) \in \boldsymbol{j}_{l,m}(y), \ \text{pour } m = \max\{k, l\}.$$

La limite directe du système (5.1) est alors donnée par le couple

$$\big((\boldsymbol{M}_b, \boldsymbol{E}_b), \langle \boldsymbol{j}_{k,b} \mid k \in b\rangle\big)$$

formé de l'interprétation relative $(\boldsymbol{M}_b, \boldsymbol{E}_b)$ et des injections élémentaires $\boldsymbol{j}_{k,b} : \boldsymbol{M}_k \to \boldsymbol{M}_b$ définies pour tout $k \in b$ par

$$\boldsymbol{j}_{k,b}(x) = [k, x]_b.$$

Nous avons pour tous $k \preceq l \in b$ que $\boldsymbol{j}_{l,b} \circ \boldsymbol{j}_{k,l} = \boldsymbol{j}_{k,b}$.

$$\begin{tikzcd}
 & & & & (\boldsymbol{M}_b, \boldsymbol{E}_b) \\
V = \boldsymbol{M}_0 \arrow[r, "\boldsymbol{j}_{0,k}"'] \arrow[urrrr, bend left, "\boldsymbol{j}_{0,b}"] & \boldsymbol{M}_k \arrow[r, "\boldsymbol{j}_{k,l}"'] \arrow[urrr, "\boldsymbol{j}_{k,b}"] & \boldsymbol{M}_l \arrow[r] \arrow[urr, "\boldsymbol{j}_{l,b}"] & \cdots &
\end{tikzcd}$$

Le lemme suivant nous donne un critère pour la bonne fondation d'une limite directe le long d'une branche. Il montre également que nous pouvons associer à une branche de modèles une branche formée d'ultrapuissances de V par des ultrafiltres. La bonne fondation de la limite directe de la branche ainsi formée est assurée par la bonne fondation de la limite directe le long de la branche de départ.

Lemme 5.2.1. *Soit $\langle \boldsymbol{M}_m, \boldsymbol{j}_{m,n} \mid m \leq n \in \omega\rangle$ un système inductif de modèles intérieurs de* ZFC*. Notons $(\boldsymbol{M}_\infty, \langle \boldsymbol{j}_{n,\infty} \mid n \in \omega\rangle)$ sa limite directe.*

(1) $\boldsymbol{M}_\infty$ est mal fondée si et seulement s'il existe une suite d'ordinaux $(\beta_n)_{n\in\omega}$ avec $\beta_n < \boldsymbol{j}_{m,n}(\beta_m)$ pour tous $m < n \in \omega$.

(2) Supposons que $\boldsymbol{M}_0 = V$. Soit une suite $(e_n)_{n\in\omega}$ avec $e_n \in \boldsymbol{M}_n$ pour tout $n \in \omega$. Pour $Z = V_\alpha$ avec $\alpha = \sup\{\mathrm{rang}(e_n) + 1 \mid n \in \omega\}$, nous définissons pour chaque $n \in \omega$ un ultrafiltre U_n sur ${}^nZ$

$$X \in U_n \quad \longleftrightarrow \quad \langle \boldsymbol{j}_{m,n}(e_m) \mid m < n\rangle \in \boldsymbol{j}_{0,n}(X).$$

Le système $\mathscr{U} = \{U_k \mid k \in \omega\}$ est un système inductif d'ultrafiltres κ-complet pour κ le plus petit point critique des $\boldsymbol{j}_{m,n}$. De plus, si $\boldsymbol{M}_\infty$ est bien fondée, alors $\mathbf{Ult}(V, \mathscr{U})$ est bien fondée.

Démonstration. (1). S'il existe une suite d'ordinaux $(\beta_n)_{n\in\omega}$ avec $\beta_n < \boldsymbol{j}_{m,n}(\beta_m)$ pour tous $m < n \in \omega$, alors la suite $(\boldsymbol{j}_{n,\infty}(\beta_n))_{n\in\omega}$ est descendante dans $\boldsymbol{M}_\infty$. Il s'ensuit que $\boldsymbol{M}_\infty$ est mal fondée.

Réciproquement, si $\boldsymbol{M}_\infty$ est mal fondée, alors il existe une suite descendante d'ordinaux $(b_n)_{n\in\omega}$ dans $\boldsymbol{M}_\infty$. Soient $m_n \in \omega$ et $\gamma_n \in \boldsymbol{M}_{m_n}$ tels que $\boldsymbol{j}_{m_n,\infty}(\gamma_n) = b_n$. Nous pouvons supposer sans perte de généralité que $m_0 = 0$ et que pour tous $n_1 < n_2$, $m_{n_1} < m_{n_2}$. Nous définissons alors la suite $(\beta_n)_{n\in\omega}$ suivante. Pour tout $n \in \omega$ et tout $0 \leq k < m_{n+1} - m_n$ nous posons

$$\begin{aligned}\beta_{m_n+k} =& \boldsymbol{j}_{m_n,m_n+k}(\omega \cdot \gamma_n + m_{n+1} - m_n + k)\\ =& \omega \cdot \boldsymbol{j}_{m_n,m_n+k}(\gamma_n) + m_{n+1} - m_n + k\end{aligned}$$

La suite ainsi définie vérifie bien $\beta_n < \boldsymbol{j}_{m,n}(\beta_m)$ pour tous $m < n \in \omega$.

(2). La démonstration du fait que chaque U_k est un ultrafiltre κ-complet est similaire aux arguments de la démonstration du Théorème 2.2.4. La compatibilité découle du fait que pour tout $m < n \in \omega$, nous avons

$$\begin{aligned}
\{f \in {}^nZ \mid f \restriction m \in X\} \in U_n &\longleftrightarrow \langle \boldsymbol{j}_{k,n}(e_k) \mid k < m\rangle \in \boldsymbol{j}_{0,n}(X) \\
&\longleftrightarrow \boldsymbol{j}_{m,n}\big(\langle \boldsymbol{j}_{k,m}(e_k) \mid k < m\rangle\big) \in \boldsymbol{j}_{m,n} \circ \boldsymbol{j}_{0,m}(X) \\
&\longleftrightarrow \langle \boldsymbol{j}_{k,m}(e_k) \mid k < m\rangle \in \boldsymbol{j}_{0,m}(X) \\
&\longleftrightarrow X \in U_m.
\end{aligned}$$

Notons $\boldsymbol{i}_{m,n} : \mathbf{Ult}(V, U_m) \to \mathbf{Ult}(V, U_n)$ et $\boldsymbol{i}_{m,\infty} : \mathbf{Ult}(V, U_m) \to \mathbf{Ult}(V, \mathscr{U})$ les injections élémentaires associées au système inductif d'ultrafiltres $\mathscr{U} = \langle U_m \mid m \in \omega\rangle$. Pour tout $n \in \omega$, nous définissons la fonctionnelle $\boldsymbol{k}_n : \mathbf{Ult}(V, U_n) \to \boldsymbol{M}_n$ par

$$\boldsymbol{k}_n([F]_{U_n}) = (\boldsymbol{j}_{0,n}F)\big(\langle \boldsymbol{j}_{m,n}(e_m) \mid m < n\rangle\big).$$

Cette fonctionnelle est bien définie, c'est une injection élémentaire. De plus, pour tous $m < n \in \omega$ nous avons le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{M}_m \arrow[r, "\boldsymbol{j}_{m,n}"] & \boldsymbol{M}_n \\
\mathbf{Ult}(V, U_m) \arrow[u, "\boldsymbol{k}_m"] \arrow[r, "\boldsymbol{i}_{m,n}"'] & \mathbf{Ult}(V, U_n) \arrow[u, "\boldsymbol{k}_n"']
\end{tikzcd}$$

En effet, pour tous $m < n \in \omega$,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{k}_n\Big(\boldsymbol{i}_{m,n}\big([F]_{U_m}\big)\Big) &= \boldsymbol{k}_n\big([F \circ \pi_{n,m}]_{U_n}\big) \\
&= \big(\boldsymbol{j}_{0,n}(F \circ \pi_{n,m})\big)\big(\langle \boldsymbol{j}_{k,n}(e_k) \mid k < n\rangle\big) \\
&= (\boldsymbol{j}_{0,n}F) \circ (\boldsymbol{j}_{0,n}\pi_{n,m})\big(\langle \boldsymbol{j}_{k,n}(e_k) \mid k < n\rangle\big) \\
&= (\boldsymbol{j}_{0,n}F)\big(\langle \boldsymbol{j}_{k,n}(e_k) \mid k < m\rangle\big) \\
&= (\boldsymbol{j}_{m,n} \circ \boldsymbol{j}_{0,m}F)\big(\boldsymbol{j}_{m,n}\langle \boldsymbol{j}_{k,m}(e_k) \mid k < m\rangle\big) \\
&= \boldsymbol{j}_{m,n}\Big(\boldsymbol{k}_m\big([F]_{U_m}\big)\Big),
\end{aligned}$$

où $\pi_{n,m} : {}^nZ \to {}^mZ,\ f \mapsto f \restriction m$. Nous avons donc une unique injection élémentaire $\boldsymbol{k}_\infty : \mathbf{Ult}(V, \mathscr{U}) \to \boldsymbol{M}_\infty$ vérifiant pour tout $n \in \omega$

$$\boldsymbol{k}_\infty \circ \boldsymbol{i}_{n,\infty} = \boldsymbol{j}_{n,\infty} \circ \boldsymbol{k}_n.$$

Finalement, si $\boldsymbol{M}_\infty$ est bien fondée, alors $\mathbf{Ult}(V, \mathscr{U})$ qui s'injecte élémentairement dans $\boldsymbol{M}_\infty$ est également bien fondée. □

Nous montrons maintenant pourquoi il est nécessaire de considérer des ultrapuissances externes et des arbres d'itération pour obtenir des limites directes mal fondées. En effet, une **itération interne**, i.e. un arbre d'itération de longueur ω dont l'ordre est l'ordre naturel sur ω possède nécessairement une limite directe bien fondée.

Lemme 5.2.2. *Soit $\mathscr{I} = \big(<, \langle (E_n, \rho_n) \mid n < \omega \rangle \big)$ un arbre d'itération dont l'ordre est l'ordre strict naturel sur ω. La limite directe $\boldsymbol{M}_\omega$ le long de l'unique branche est bien fondée.*

Démonstration. Par contradiction, supposons qu'il existe une itération interne dont la limite directe est mal fondée. Considérons une telle itération interne $\mathscr{I} = \big(< , \langle (E_n, \rho_n) \mid n < \omega \rangle \big)$ dont la limite directe est mal fondée et notons $\langle \boldsymbol{M}_n, \boldsymbol{j}_{m,n} \mid m \leq n \in \omega \rangle$ son système canonique associé. Par le Lemme 5.2.1, il existe un ordinal α de sorte qu'il existe une suite d'ordinaux $(\beta_n)_{n \in \omega}$ avec $\beta_0 = \alpha$ et $\beta_n < \boldsymbol{j}_{m,n}(\beta_m)$.

Notons α l'ordinal minimal à satisfaire la propriété : il existe une itération interne dont la mal fondation est attestée par une suite commençant par α. Pour ce α, considérons le système canonique $\langle \boldsymbol{M}_m, \boldsymbol{j}_{m,n} \mid m \leq n < \omega \rangle$ associé à une itération interne $\mathscr{I} = (<, \langle (\mathscr{E}_n, \rho_n) \mid n < \omega \rangle)$ et une suite d'ordinaux $(\beta_n)_{n \in \omega}$ attestant de la minimalité de α. Notons γ un ordinal tel que $(\beta_n)_{n \in \omega}$ et $\mathscr{I}$ appartiennent à V_γ

Nous considérons la formule $\phi(v_1, v_2)$ à deux variables libres suivante

> $\phi(v_1, v_2)$: v_1 et v_2 sont des ordinaux et il existe dans V_{v_2} une itération interne $\widehat{\mathscr{I}}$ et une suite d'ordinaux $(\widehat{\beta}_n)_{n \in \omega}$ de sorte que $\widehat{\beta}_0 = v_1$ et pour le système canonique $\langle \widehat{\boldsymbol{M}}_n, \widehat{\boldsymbol{j}}_{m,n} \mid m \leq n < \omega \rangle$ associé à $\widehat{\mathscr{I}}$ nous avons $m < n \in \omega \rightarrow \widehat{\beta}_n < \widehat{\boldsymbol{j}}_{m,n}(\widehat{\beta}_m)$.

La formule $\phi[\alpha, \gamma]$ est satisfaite dans V. De plus, la formule « α est le plus petit ordinal ξ tel que $\phi[\xi, \gamma]$ » est satisfaite dans V. Par élémentarité de $\boldsymbol{j}_{0,1}$, nous avons que $\boldsymbol{M}_1$ satisfait la formule « $\boldsymbol{j}_{0,1}(\alpha)$ est le plus petit ordinal ξ tel que $\phi[\xi, \boldsymbol{j}_{0,1}(\gamma)]$ ». Or $(<, \langle (\mathscr{E}_{n+1}, \rho_{n+1}) \mid n \in \omega \rangle)$ est une itération interne dans $\boldsymbol{M}_1$. Il s'ensuit que $\boldsymbol{M}_1$ satisfait la formule $\phi[\beta_1, \gamma]$. Or $\gamma \leq \boldsymbol{j}_{0,1}(\gamma)$ et $\beta_1 < \boldsymbol{j}_{0,1}(\alpha)$, nous avons donc une contradiction. □

La démonstration du résultat suivant se trouve dans [MS89].

Lemme 5.2.3. *Soient $\mathscr{A} = \big(\prec, \langle (\mathscr{E}_n, \rho_n) \mid n < \omega \rangle \big)$ un arbre d'itération de longueur ω et b une branche infinie de $\mathscr{A}$. S'il existe des ordinaux $\langle \xi_n \mid n \in \omega - b \rangle$ tels que pour tout $n \in \omega$ avec $n^* \notin b$, $\xi_{n+1} < \boldsymbol{j}_{\mathscr{E}_n}^{\boldsymbol{M}_{n^*}}(\xi_n)$, alors $(\boldsymbol{M}_b, \boldsymbol{E}_b)$ est bien fondée.*

5.3 Arbre d'itérations et ultrafiltres

Nous montrons maintenant que pour un cardinal δ fortement limite, l'injection élémentaire associée à un ultrafiltre δ-complet agit trivialement sur le système canonique associé à un arbre d'itération appartenant à V_δ et réciproquement.

Lemme 5.3.1. *Soit δ un cardinal fortement limite. Soient U et U' des ultrafiltres δ-complets sur X et X' respectivement. Soit $p : X \to X'$ une fonction telle que $A \in U'$ si et seulement si $\{x \mid p(x) \in A\} \in U$. Soit $\mathscr{T} = \big(\prec, \langle (E_n, \rho_n) \mid n+1 \leq \alpha \rangle \big)$ un arbre d'itération de longueur α avec $\mathscr{T} \restriction n \in V_\delta$ pour tout $n+1 \leq \alpha$. Notons $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}_U : V \to$ $\mathbf{Ult}(V, U)$, $\boldsymbol{j}' = \boldsymbol{j}_{U'} : V \to \mathbf{Ult}(V, U')$, $\boldsymbol{k} : \mathbf{Ult}(V, U') \to \mathbf{Ult}(V, U)$ l'injection élémentaire définie par $\boldsymbol{k}([F]_{U'}) = [F \circ p]_U$. Notons $\langle \boldsymbol{M}_m, \boldsymbol{j}_{m,n} \mid m \preceq n \leq \alpha \rangle$ le système canonique associé à $\mathscr{T}$. Alors pour tous $m < n \in \omega$,* *(1)* $\boldsymbol{j}_{0,n}(\boldsymbol{j}) = \boldsymbol{j}\restriction \boldsymbol{M}_n$, $\boldsymbol{j}_{0,n}(\boldsymbol{j}') = \boldsymbol{j}'\restriction \boldsymbol{M}_n$, *et* $\boldsymbol{j}_{0,n}(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{k}\restriction \boldsymbol{j}'(\boldsymbol{M}_n)$*;*

(2) $\big(\boldsymbol{j}(\boldsymbol{j}_{m,n})\big)\restriction \boldsymbol{ON} = \big(\boldsymbol{j}'(\boldsymbol{j}_{m,n})\big)\restriction \boldsymbol{ON} = \boldsymbol{j}_{m,n}\restriction \boldsymbol{ON}$*,*

où par exemple $\boldsymbol{j}_{0,n}(\boldsymbol{j}) = \bigcup_\alpha \boldsymbol{j}_{0,n}(\boldsymbol{j}\restriction V_\alpha)$*.*

Démonstration. (1). Nous commençons par montrer l'assertion suivante.

> (a). Pour tous $n \in \omega$, si $Y \subseteq \boldsymbol{j}_{0,n}(X)$ et $Y \in \boldsymbol{M}_n$, alors $Y \in \boldsymbol{j}_{0,n}(U) \quad \leftrightarrow \quad \{x \in X \mid \boldsymbol{j}_{0,n}(x) \in Y\} \in U$.

Preuve de (a). Nous faisons la preuve par induction sur $n \in \omega$. Supposons donc que (a) est vérifiée pour tout $m \leq n$ et soit $Y \subseteq \boldsymbol{j}_{0,n+1}(X)$, $Y \in \boldsymbol{M}_{n+1}$. Supposons en premier lieu que $Y \in \boldsymbol{j}_{0,n+1}(U)$. Nous avons $Y = [\![q,F]\!]^{\boldsymbol{M}_{n^*}}_{\mathscr{E}_n}$ pour une suite $q \in {}^{<\omega}\operatorname{Supp}(\mathscr{E}_n)$ et une fonction $F : {}^{\operatorname{long}(q)}V_{\operatorname{crit}\mathscr{E}_n} \cap \boldsymbol{M}_{n^*} \to \boldsymbol{M}_{n^*}$. Par le théorème de Łoś, comme $\boldsymbol{j}_{0,n+1} = \boldsymbol{j}_{n^*,n+1} \circ \boldsymbol{j}_{0,n^*} = \boldsymbol{j}^{\boldsymbol{M}_{n^*}}_{\mathscr{E}_n} \circ \boldsymbol{j}_{0,n^*}$, nous avons

$$K = \Big\{ f \in {}^{\operatorname{long}(q)}V_{\operatorname{crit}(\mathscr{E}_n)} \cap \boldsymbol{M}_{n^*} \;\Big|\; F(f) \in \boldsymbol{j}_{0,n^*}(U) \Big\} \in E_n(q).$$

Pour toute $f \in K$, notre hypothèse d'induction nous assure que

$$Z_f = \{x \in X \mid \boldsymbol{j}_{0,n^*}(x) \in F(f)\} \in U.$$

Comme $\mathscr{T}\restriction n{+}1 \in V_\delta$, nous avons en particulier que $\operatorname{crit}(\mathscr{E}_n) < \delta$ et donc que $|K| < \delta$. Ainsi comme U est δ-complet, nous avons que $Z = \bigcap_{f \in K} Z_f \in U$. Nous avons alors les implications suivantes

$$\begin{aligned} z \in Z \quad &\to \quad (\forall f \in K)(z \in Z_f) \\ &\to \quad (\forall f \in K)\big(\boldsymbol{j}_{0,n^*}(z) \in F(f)\big) \\ &\to \quad \{f \in K \mid \boldsymbol{j}_{0,n^*}(z) \in F(f)\} = K \in E_n(q) \\ &\to \quad \boldsymbol{j}_{n^*,n+1}(\boldsymbol{j}_{0,n^*}(z)) \in [\![q,F]\!]^{\boldsymbol{M}_{n^*}}_{\mathscr{E}_n} \\ &\to \quad \boldsymbol{j}_{0,n+1}(z) \in Y. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\{x \in X \mid \boldsymbol{j}_{0,n+1}(x) \in Y\} \supseteq Z \in U$.

Réciproquement, supposons par contraposition que $Y \notin \boldsymbol{j}_{0,n+1}(U)$. Comme par élémentarité de $\boldsymbol{j}_{0,n+1}$, $\boldsymbol{j}_{0,n+1}(U)$ est un ultrafiltre sur $\boldsymbol{j}_{0,n+1}(X)$ dans $\boldsymbol{M}_{n+1}$, il s'ensuit que $\boldsymbol{j}_{0,n+1}(X) - Y \in \boldsymbol{j}_{0,n+1}(U)$. Par ce qui précède, nous avons $\{x \in X \mid \boldsymbol{j}_{0,n+1}(x) \in \boldsymbol{j}_{0,n+1}(X) - Y\} \in U$ et donc $\{x \in X \mid \boldsymbol{j}_{0,n+1}(x) \in Y\} \notin U$. Ceci termine la preuve de (a).

Pour tout $n \in \omega$ nous définissons une fonctionnelle

$$\begin{aligned} \Phi_n : \boldsymbol{M}_n \cap {}^{\boldsymbol{j}_{0,n}(X)}\boldsymbol{M}_n \quad &\to \quad {}^X\boldsymbol{M}_n \\ G \quad &\mapsto \quad \Phi_n(G) \end{aligned}$$

où $\Phi_n(G)$ est définie pour tout $x \in X$ par

$$\Phi_n(G)(x) = G(\boldsymbol{j}_{0,n}(x)).$$

Nous montrons l'assertion suivante au sujet des fonctionnelles Φ_n.

(b). Pour tous $n \in \omega$, pour toute $H \in {}^{X}\boldsymbol{M}_n$, il existe une fonction $G \in \boldsymbol{M}_n \cap {}^{j_{0,n}(X)}\boldsymbol{M}_n$ telle que

$$\left[\Phi_n(G)\right]_U = [H]_U .$$

Preuve de (b). Par induction, supposons que (b) est vérifiée pour tout $m \leq n$ et soit $H : X \to \boldsymbol{M}_{n+1}$. Pour tout $x \in X$, nous avons $H(x) = [\![q_x, F_x]\!]_{\mathscr{E}_n}^{\boldsymbol{M}_{n^*}}$ pour une suite $q_x \in {}^{<\omega}\operatorname{Supp}(\mathscr{E}_n)$ et une fonction $F_x : {}^{\operatorname{long}(q_x)}V_{\operatorname{crit}\mathscr{E}_n} \cap \boldsymbol{M}_{n^*} \to \boldsymbol{M}_{n^*}$. Puisque U est δ complet et $\left|\operatorname{Supp}(\mathscr{E}_n)\right| < \delta$ il existe $q \in {}^{<\omega}\operatorname{Supp}(\mathscr{E}_n)$ avec

$$\{x \in X \mid q_x = q\} \in U.$$

Pour cette suite finie q, nous avons donc

$$Z = \left\{x \in X \;\middle|\; q_x = q \wedge H(x) = [\![q, F_x]\!]_{\mathscr{E}_n}^{\boldsymbol{M}_{n^*}}\right\} \in U.$$

Définissons alors U-presque partout une fonction $H^* : X \to \boldsymbol{M}_{n*}$ en posant pour tout $z \in Z$

$$H^*(z) = F_z.$$

Par notre hypothèse d'induction, (b) est vérifiée pour $m = n^*$. Il existe donc une fonction $G^* \in \boldsymbol{M}_{n^*}$, $G^* : \boldsymbol{j}_{0,n^*}(X) \to \boldsymbol{M}_{n^*}$ telle que

$$\left[\Phi_{n^*}(G^*)\right]_U = [H^*]_U.$$

Remarquons que comme $H^*(z) = F_z$ pour tout $z \in Z$, le fait que $[H^*]_U = \left[\Phi_{n^*}(G^*)\right]_U$ implique que $\Phi_{n^*}(G^*)(x) = G^*(\boldsymbol{j}_{0,n^*}(x)) = F_x$ pour U-presque tout $x \in X$. En particulier, $G^*(\boldsymbol{j}_{0,n^*}(x))$ est une fonction de domaine ${}^{\operatorname{long}(q)}V_{\operatorname{crit}(\mathscr{E}_n)} \cap \boldsymbol{M}_{n^*}$ pour U-presque tout $x \in X$.

Nous définissons alors dans $\boldsymbol{M}_{n^*}$ une fonction

$$F : {}^{\operatorname{long}(q)}V_{\operatorname{crit}(\mathscr{E}_n)} \cap \boldsymbol{M}_{n*} \to \boldsymbol{M}_{n^*} \cap {}^{j_{0,n^*}(X)}\boldsymbol{M}_{n^*},$$

en posant pour toute $f \in {}^{\operatorname{long}(q)}V_{\operatorname{crit}(\mathscr{E}_n)} \cap \boldsymbol{M}_{n*}$ et U-presque pour tout $x \in X$

$$\big(F(f)\big)(\boldsymbol{j}_{0,n^*}(x)) = \big(G^*(\boldsymbol{j}_{0,n^*}(x))\big)(f).$$

Par (a), $F(f) : \boldsymbol{j}_{0,n^*}(X) \to \boldsymbol{M}_{n^*}$ est $\boldsymbol{j}_{0,n^*}(U)$-presque partout définie. Nous posons $G = [\![q, F]\!]_{\mathscr{E}_{n^*}}^{\boldsymbol{M}_{n^*}}$, par le théorème de Łoś, c'est une fonction de $\boldsymbol{M}_{n+1}$ avec $G : \boldsymbol{j}_{0,n+1}(X) \to \boldsymbol{M}_{n+1}$. Nous devons montrer que $[\Phi_{n+1}(G)]_U = [F]_U$, i.e. que

$$\left\{x \in X \mid G(\boldsymbol{j}_{0,n+1}(x)) = F(x)\right\} \in U.$$

Or nous savons que

$$\left\{x \in Z \;\middle|\; H(x) = [\![q, F_x]\!]_{\mathscr{E}_n}^{\boldsymbol{M}_{n^*}} \wedge G^*(\boldsymbol{j}_{0,n^*}(x)) = H^*(x)\right\} \in U$$

Pour un x dans ce dernier ensemble, nous avons pour toute $f \in {}^{\operatorname{long}(q)}V_{\operatorname{crit}(\mathscr{E}_n)} \cap \boldsymbol{M}_{n^*}$ que

$$F(f)(\boldsymbol{j}_{0,n^*}(x)) = \big(G^*(\boldsymbol{j}_{0,n^*}(x))\big)(f) = \big(H^*(x)\big)(f) = F_x(f).$$

Par conséquent, $G(\boldsymbol{j}_{0,n+1}(x)) = [\![q, F_x]\!]_{\mathscr{E}_n}^{\boldsymbol{M}_{n^*}} = H(x)$ pour U-presque tout $x \in X$, i.e. $\left[\Phi_{n+1}(G)\right]_U = [H]_U$. Ceci termine la preuve de (b).

Conclusion de (1). Observons maintenant que par (a), les fonctionnelles Φ_n induisent des injections élémentaires :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_n : \mathbf{Ult}(\boldsymbol{M}_n, \boldsymbol{j}_{0,n}(U)) &\rightarrow \{[F]_U \mid F \in {}^X\boldsymbol{M}_n\} \\ [G]^{\boldsymbol{M}_n}_{\boldsymbol{j}_{0,n}(U)} &\mapsto \left[\Phi_n(G)\right]_U \end{aligned}$$

En effet, pour toute formule de la théorie des ensembles $\varphi(v_1, \dots, v_k)$, et pour toutes fonctions $G_1, \dots, G_k$ appartenant à $\boldsymbol{M}_n \cap {}^{\boldsymbol{j}_{0,n}(X)}\boldsymbol{M}_n$ nous avons

$$\begin{aligned} &\varphi\left[[G_1]^{\boldsymbol{M}_n}_{\boldsymbol{j}_{0,n}(U)}, \dots, [G_k]^{\boldsymbol{M}_n}_{\boldsymbol{j}_{0,n}(U)}\right]^{\mathbf{Ult}(\boldsymbol{M}_n, \boldsymbol{j}_{0,n}(U))} \\ &\qquad\longleftrightarrow \left\{y \in \boldsymbol{j}_{0,n}(X) \;\middle|\; \varphi[G_1(y), \dots, G_k(y)]^{\boldsymbol{M}_n}\right\} \in \boldsymbol{j}_{0,n}(U) \\ &\qquad\overset{\text{(a)}}{\longleftrightarrow} \left\{x \in X \;\middle|\; \varphi\left[G_1(\boldsymbol{j}_{0,n}(x)), \dots, G_k(\boldsymbol{j}_{0,n}(x))\right]^{\boldsymbol{M}_n}\right\} \in U \\ &\qquad\longleftrightarrow \left\{x \in X \;\middle|\; \varphi\left[(\Phi_n(G_1))(x), \dots, (\Phi_n(G_k))(x)\right]^{\boldsymbol{M}_n}\right\} \in U \\ &\qquad\longleftrightarrow \varphi\left[[\Phi_n(G_1)]_U, \dots, [\Phi_n(G_k)]_U\right]^{\{[F]_U \mid F \in {}^X\boldsymbol{M}_n\}}. \end{aligned}$$

Observons aussi que $\boldsymbol{j}_{0,n}(\mathbf{Ult}(V, U)) = \mathbf{Ult}(\boldsymbol{M}_n, \boldsymbol{j}_{0,n}(U))$. En effet,

$$\boldsymbol{j}_{0,n}(\mathbf{Ult}(V, U)) = \boldsymbol{j}_{0,n}(\{[F]_U \mid F : X \to V\}) = \{[F]^{\boldsymbol{M}_n}_{\boldsymbol{j}_{0,n}(U)} \in \boldsymbol{M}_n \mid F \in \boldsymbol{M}_n \cap {}^{\boldsymbol{j}_{0,n}(X)}\boldsymbol{M}_n\}.$$

En outre, par (b), les injection élémentaires $\boldsymbol{f}_n$ sont surjectives et sont donc des isomorphismes. Comme ce sont des isomorphismes entre classes transitives, ce sont des fonctionnelles identité et pour tout $n \in \omega$,

$$\boldsymbol{j}_{0,n}(\mathbf{Ult}(V, U)) = \mathbf{Ult}(\boldsymbol{M}_n, \boldsymbol{j}_{0,n}(U)) = \{[F]_U \mid F \in {}^X\boldsymbol{M}_n\} = \boldsymbol{j}(\boldsymbol{M}_n),$$

où la dernière égalité découle du fait que si $\phi(x, p)$ est la formule que $\boldsymbol{M}_n$ représente où p est un paramètre, alors

$$\begin{aligned} \boldsymbol{j}(\boldsymbol{M}_n) =&\boldsymbol{j}(\{x \mid \phi[x, p]\}) \\ =&\{x \in \mathbf{Ult}(V, U) \mid \phi[x, \boldsymbol{j}(p)]^{\mathbf{Ult}(V,U)}\} \\ =&\left\{[F]_U \;\middle|\; F \in {}^X V \wedge \{x \in X \mid \phi[F(x), p]\} \in U\right\} \\ =&\{[F]_U \mid F \in {}^X\boldsymbol{M}_n\}. \end{aligned}$$

Remarquons aussi que l'inverse de $\boldsymbol{f}_n$ associe à chaque $[F]_U$ pour $F \in {}^X\boldsymbol{M}_n$ la classe $[\widetilde{F}]^{\boldsymbol{M}_n}_{\boldsymbol{j}_{0,n}(U)}$ où $\widetilde{F} : \boldsymbol{j}_{0,n}(X) \to \boldsymbol{M}_n$ est définie $\boldsymbol{j}_{0,n}(U)$-presque partout par $\widetilde{F}(\boldsymbol{j}_{0,n}(x)) = F(x)$.

Nous avons la situation suivante.

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{M}_n \arrow[r, "\boldsymbol{j}_{0,n}(\boldsymbol{j})"] & \mathbf{Ult}(\boldsymbol{M}_n, \boldsymbol{j}_{0,n}(U)) \arrow[d, "\boldsymbol{f}_n", "\cong"'] \\ \boldsymbol{M}_n \arrow[r, "\boldsymbol{j} \restriction \boldsymbol{M}_n"'] & \{[F]_U \mid F \in {}^X\boldsymbol{M}_n\} \end{tikzcd}$$

Remarquons que Φ_n associe à chaque fonction constante $\tilde{c}_y \in \boldsymbol{M}_n \cap {}^{j_{0,n}(X)}\boldsymbol{M}_n$ la fonction constante $c_y = \Phi_n(\tilde{c}_y) \in {}^X\boldsymbol{M}_n$ avec même valeur $y \in \boldsymbol{M}_n$. Il s'ensuit que pour tout $y \in \boldsymbol{M}_n$,

$$(\boldsymbol{j}_{0,n}(\boldsymbol{j}))(y) = [\tilde{c}_y]^{\boldsymbol{M}_n}_{\boldsymbol{j}_{0,n}(U)} = \boldsymbol{f}_n\big([\tilde{c}_y]^{\boldsymbol{M}_n}_{\boldsymbol{j}_{0,n}(U)}\big) = [\Phi_n(\tilde{c}_y)]_U = [c_y]_U = \boldsymbol{j}\restriction\boldsymbol{M}_n(y),$$

et donc $\boldsymbol{j}_{0,n}(\boldsymbol{j}) = \boldsymbol{j}\restriction\boldsymbol{M}_n$. En considérant les fonctionnelles Φ'_n et les injection élémentaires $\boldsymbol{f}'_n$, les analogues des Φ_n et des $\boldsymbol{f}_n$ pour U', nous avons de la même façon que $\boldsymbol{j}_{0,n}(\boldsymbol{j}') = \boldsymbol{j}'\restriction\boldsymbol{M}_n$. Finalement pour voir que $\boldsymbol{j}_{0,n}(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{k}\restriction\boldsymbol{j}'(\boldsymbol{M}_n)$, observons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Ult}(\boldsymbol{M}_n, \boldsymbol{j}_{0,n}(U')) \arrow[r, "\boldsymbol{f}'_n", "\cong"'] \arrow[d, "\boldsymbol{j}_{0,n}(\boldsymbol{k})"'] & \{[F]_{U'} \mid F \in {}^X\boldsymbol{M}_n\} \arrow[d, "\boldsymbol{k}\restriction\{[F]_{U'} \mid F \in {}^X\boldsymbol{M}_n\}"] \\
\mathbf{Ult}(\boldsymbol{M}_n, \boldsymbol{j}_{0,n}(U)) \arrow[r, "\boldsymbol{f}_n", "\cong"'] & \{[F]_U \mid F \in {}^X\boldsymbol{M}_n\}
\end{tikzcd}$$

Ce diagramme commute, car pour toute fonction $G \in \boldsymbol{M}_n \cap {}^{j_{0,n}(X)}\boldsymbol{M}_n$, nous avons d'une part

$$\big(\boldsymbol{j}_{0,n}(\boldsymbol{k})\big)\big([G]^{\boldsymbol{M}_n}_{\boldsymbol{j}_{0,n}(U')}\big) = \big[G\circ\boldsymbol{j}_{0,n}(p)\big]^{\boldsymbol{M}_n}_{\boldsymbol{j}_{0,n}(U)} = \big[\Phi_n(G\circ\boldsymbol{j}_{0,n}(p))\big]_U = \big[G\circ\boldsymbol{j}_{0,n}(p)\circ\boldsymbol{j}_{0,n}\big]_U$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{k}\circ\boldsymbol{f}'_n\big([G]^{\boldsymbol{M}_n}_{\boldsymbol{j}_{0,n}(U')}\big) = \boldsymbol{k}\Big(\big[\Phi'_n(G)\big]_{U'}\Big) &= \big[\Phi'_n(G)\circ p\big]_U \\ &= \big[G\circ\boldsymbol{j}_{0,n}\circ p\big]_U \overset{(a)}{=} \big[G\circ\boldsymbol{j}_{0,n}(p)\circ\boldsymbol{j}_{0,n}\big]_U.\end{aligned}$$

Ainsi en particulier, $\boldsymbol{j}_{0,n}(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{k}\restriction\boldsymbol{j}'(\boldsymbol{M}_n)$, car $\boldsymbol{j}'(\boldsymbol{M}_n) = \{[F]_{U'} \mid F \in {}^X\boldsymbol{M}_n\}$. Ceci achève la preuve de (1).

(2). Soit $n \in \omega$. Comme U est δ-complet, toute fonction $F \in {}^\gamma\mathbf{Ult}(V,U)$ pour $\gamma < \delta$ appartient à $\mathbf{Ult}(V,U)$. En effet, si $F(\alpha) = [F_\alpha]_U$ pour tout $\alpha < \gamma$, alors $F = \big[x \mapsto \{(\alpha, F_\alpha(x)) \mid \alpha < \gamma\}\big]_U$. En particulier, nous avons que

$$\forall\gamma < \delta \quad {}^\gamma\boldsymbol{ON} = ({}^\gamma\boldsymbol{ON})^{\mathbf{Ult}(V,U)}$$

Ainsi par élémentarité de $\boldsymbol{j}_{0,n^*}$, nous obtenons que

$$\forall\gamma < \boldsymbol{j}_{0,n^*}(\delta) \quad ({}^\gamma\boldsymbol{ON})^{\boldsymbol{M}_{n^*}} = ({}^\gamma\boldsymbol{ON})^{\boldsymbol{j}_{0,n^*}(\mathbf{Ult}(V,U))}.$$

Or dans la preuve de (1), nous avons montré que $\boldsymbol{j}_{0,n^*}(\mathbf{Ult}(U,V)) = \boldsymbol{j}(\boldsymbol{M}_{n^*})$. Ainsi,

$$\forall\gamma < \boldsymbol{j}_{0,n^*}(\delta) \quad ({}^\gamma\boldsymbol{ON})^{\boldsymbol{M}_{n^*}} = ({}^\gamma\boldsymbol{ON})^{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{M}_{n^*})}.$$

Par conséquent, $\boldsymbol{M}_{n^*}$ et $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{M}_{n^*})$ possèdent les mêmes fonctions $F : {}^{<\omega}V_{\mathrm{crit}(\mathscr{E}_n)} \to \boldsymbol{ON}$. De plus, comme $\boldsymbol{j}(\mathscr{E}_n) = \mathscr{E}_n$, la fonctionnelle associant à la classe $[\![q,F]\!]^{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{M}_{n^*})}_{\boldsymbol{j}(\mathscr{E}_n)}$ de chaque fonction $F : {}^{\mathrm{long}(q)}\operatorname{Supp}(\mathscr{E}_n) \to \boldsymbol{ON}$ qui est dans $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{M}_{n^*})$ la classe $[\![q, F]\!]_{\mathscr{E}_n}^{\boldsymbol{M}_{n^*}}$ est un isomorphisme des ordinaux de $\boldsymbol{M}_{n+1}$ avec ceux de $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{M}_{n+1})$.

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{j}(\boldsymbol{M}_n) \cap \boldsymbol{ON} \arrow[rr, "\boldsymbol{j}(\boldsymbol{j}_{n^*,n+1}) \restriction \boldsymbol{ON}"] & & \boldsymbol{j}(\boldsymbol{M}_{n+1}) \cap \boldsymbol{ON} \arrow[d, leftrightarrow, "\cong"] \\
\boldsymbol{M}_{n^*} \cap \boldsymbol{ON} \arrow[rr, "\boldsymbol{j}_{n^*,n+1} \restriction \boldsymbol{ON}"'] & & \boldsymbol{M}_{n+1} \cap \boldsymbol{ON}
\end{tikzcd}$$

Par conséquent, pour tout $\alpha \in \boldsymbol{ON}$, nous avons

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{j}_{n^*,n+1})(\alpha) = [\![c_\alpha]\!]_{\boldsymbol{j}(\mathscr{E}_n)}^{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{M}_{n^*})} = [\![c_\alpha]\!]_{\mathscr{E}_n}^{\boldsymbol{M}_{n^*}} = \boldsymbol{j}_{\mathscr{E}_n}^{\boldsymbol{M}_{n^*}}(\alpha) = \boldsymbol{j}_{n^*,n+1}(\alpha).$$

Ainsi se termine la démonstration de (2). □

Notes. Ce chapitre est basé entièrement sur [MS89]. Toutefois, l'auteur a opté pour une définition récursive de la notion d'arbre d'itération, souhaitant notamment éviter l'utilisation de classes propres.

Chapitre 6

Cardinaux de Woodin

Les montagnes au loin
reflet dans les prunelles
d'une libellule

Yosa Buson

Un cardinal de Woodin représente le grand objet dont nous avons besoin de supposer l'existence. Sa présence permet de parler d'une grande diversité de mondes. Elle nous permet de comprendre les ensembles qui nous intéresse en leur associant des arbres d'univers. L'appartenance d'un élément à un tel ensemble est alors ramenée à la bonne fondation des univers au bout de la branche associée à cet élément.

6.1 Définition

Nous commençons par donner une première formulation de la notion de grand cardinal dont nous avons besoin. Cette définition n'est pas directement exprimable dans ZFC, le Lemme 6.1.3 ci-après nous donne une équivalence avec un énoncé formalisable dans le langage de la théorie des ensembles.

Définition 6.1.1. Un cardinal δ est **Woodin** si pour toute fonction $f \in {}^{\delta}\delta$, il existe $\kappa < \delta$ tel que $f"\kappa \subseteq \kappa$ et une injection élémentaire $\boldsymbol{j} : V \to \boldsymbol{M}$ dans un modèle transitif $\boldsymbol{M}$ avec $\mathrm{crit}(\boldsymbol{j}) = \kappa$ et $V_{(\boldsymbol{j}f)(\kappa)} \subseteq \boldsymbol{M}$.

Nous commençons par montrer une propriété fondamentale des cardinaux de Woodin.

Lemme 6.1.2. *Soit δ un cardinal de Woodin. Pour tout $A \subseteq V_\delta$, il existe $\kappa < \delta$ arbitrairement grand, pour tout $\alpha < \delta$, il existe une injection élémentaire $\boldsymbol{j} : V \to \boldsymbol{M}$ dans un modèle $\boldsymbol{M}$ transitif avec $\mathrm{crit}(\boldsymbol{j}) = \kappa$, $V_\alpha \subseteq \boldsymbol{M}$ et $V_\alpha \cap A = V_\alpha \cap \boldsymbol{j}(A)$. De plus, $\boldsymbol{j} : V \to \boldsymbol{M}$ peut être choisie comme l'injection élémentaire $\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}} : V \to \mathbf{Ult}(V, \mathscr{E})$ associée à un extenseur $\mathscr{E} \in V_\delta$ avec $\mathrm{Supp}(\mathscr{E}) \supseteq V_\alpha$ et $\mathrm{Supp}(\mathscr{E})$ dénombrablement clos.*

Démonstration. Par contradiction, supposons qu'il existe $A \subseteq V_\delta$, il existe $\beta < \delta$, pour tout $\kappa < \delta - \beta$, il existe $\alpha < \delta$, de sorte que :

$$\begin{gathered}\text{il n'existe pas d'extenseur } \mathscr{E} \in V_\delta \text{ avec } \operatorname{crit}\mathscr{E} = \kappa,\ \operatorname{Supp}(\mathscr{E}) \supseteq V_\alpha, \\ \operatorname{Supp}(\mathscr{E}) \text{ dénombrablement clos et } V_\alpha \cap A = V_\alpha \cap \boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}(A).\end{gathered} \tag{6.1}$$

Pour tout $\kappa \in \delta - \beta$, notons $\alpha(\kappa)$ le plus petit $\alpha \geq \kappa + 2$ à satisfaire l'énoncé (6.1). Nous définissons une fonction $f : \delta \to \delta$ par

$$f(\kappa) = \begin{cases} \beta + 1 & \text{si } \kappa \in \beta; \\ \alpha(\kappa) + \omega_1 + 1 & \text{si } \kappa \in \delta - \beta. \end{cases}$$

Comme δ est Woodin, il existe $\kappa < \delta$ avec $f"\kappa \subseteq \kappa$ et une injection élémentaire $\boldsymbol{j} : V \to \boldsymbol{M}$ dans un modèle $\boldsymbol{M}$ transitif avec $\operatorname{crit}\boldsymbol{j} = \kappa$ et $V_{(\boldsymbol{j}f)(\kappa)} \subseteq \boldsymbol{M}$. Remarquons que par définition de f, pour tout $\alpha \leq \beta$, $f"\alpha \nsubseteq \alpha$. Par conséquent, nécessairement $\kappa > \beta$. Ainsi, par élémentarité de $\boldsymbol{j}$

$$(\boldsymbol{j}f)(\kappa) = (\boldsymbol{j}\alpha)(\kappa) + \omega_1 + 1.$$

Nous pouvons donc considérer l'extenseur $\mathscr{E}$ dérivé de $\boldsymbol{j}$ avec support $V_{(\boldsymbol{j}\alpha)(\kappa)+\omega_1}$. Ce support est dénombrablement clos car ω_1 est un ordinal régulier. Notre extenseur $\mathscr{E}$ est une fonction

$$\mathscr{E} : {}^{<\omega}V_{(\boldsymbol{j}\alpha)(\kappa)+\omega_1} \to \mathscr{P}(\mathscr{P}(V_\kappa)).$$

Par définition de la fonction α et l'élémentarité de $\boldsymbol{j}$, nous avons $(\boldsymbol{j}\alpha)(\gamma) \geq \gamma + 2$ pour tout $\gamma \in \boldsymbol{j}(\delta) - \beta$. Ainsi, en particulier, $(\boldsymbol{j}\alpha)(\kappa) \geq \kappa + 2$. Il s'ensuit que $\mathscr{E} \subseteq V_{(\boldsymbol{j}\alpha)(\kappa)+\omega_1}$ et donc $\mathscr{E} \in V_{(\boldsymbol{j}f)(\kappa)} \subseteq \boldsymbol{M}$ est aussi un extenseur dans $\boldsymbol{M}$.

Dans $\boldsymbol{M}$, l'extenseur $\mathscr{E}$ dérivé de $\boldsymbol{j}$ avec support $V_{(\boldsymbol{j}\alpha)(\kappa)+\omega_1}$ vérifie $\mathscr{E} \in V_{\boldsymbol{j}(\delta)} \cap \boldsymbol{M}$ est un extenseur, $V_{(\boldsymbol{j}\alpha)(\kappa)} \subseteq \operatorname{Supp}(\mathscr{E})$, et $\operatorname{Supp}(\mathscr{E})$ dénombrablement clos. Nous montrons de plus que

$$V_{(\boldsymbol{j}\alpha)(\kappa)} \cap \boldsymbol{j}^{\boldsymbol{M}}_{\mathscr{E}}(\boldsymbol{j}(A)) = V_{(\boldsymbol{j}\alpha)(\kappa)} \cap \boldsymbol{j}(A). \tag{6.2}$$

Il s'ensuit alors une contradiction. En effet, pour tout $\gamma \in \delta - \beta$, $\alpha(\gamma)$ satisfait l'énoncé (6.1). Cet énoncé est donc en particulier vérifié pour $\kappa = \gamma$ et $\alpha = \alpha(\gamma)$. Ainsi par élémentarité de $\boldsymbol{j} : V \to \boldsymbol{M}$, pour tout $\gamma \in \boldsymbol{j}(\delta) - \beta$, nous avons qu'il n'existe pas $\mathscr{E} \in V_{\boldsymbol{j}(\delta)} \cap \boldsymbol{M}$ avec $\mathscr{E}$ est un extenseur dans $\boldsymbol{M}$, $\operatorname{crit}(\mathscr{E}) = \gamma$, $\operatorname{Supp}(\mathscr{E}) \supseteq V_{(\boldsymbol{j}\alpha)(\gamma)}$, $\operatorname{Supp}(\mathscr{E})$ dénombrablement clos et $V_{(\boldsymbol{j}\alpha)(\gamma)} \cap \boldsymbol{j}(A) = V_{(\boldsymbol{j}\alpha)(\gamma)} \cap \boldsymbol{j}^{\boldsymbol{M}}_{\mathscr{E}}(\boldsymbol{j}(A))$. Or notre κ contredit cet énoncé.

Il nous suffit pour cela de montrer (6.2). La situation est décrite par le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd} & \boldsymbol{M} \arrow[r, "\boldsymbol{j}^{\boldsymbol{M}}_{\mathscr{E}}"] & \mathbf{Ult}(\boldsymbol{M}, \mathscr{E}) \\ V \arrow[ur, "\boldsymbol{j}"] \arrow[r, "\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}"'] & \mathbf{Ult}(V, \mathscr{E}) \arrow[u, "\boldsymbol{k}"'] & \end{tikzcd}$$

Le Lemme 4.4.2 nous assure en particulier que

$$V_{(j\alpha)(\kappa)+\omega_1} \subseteq V_{\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}(\kappa)} \cap \mathbf{Ult}(V,\mathscr{E}) = V_{\boldsymbol{j}^{\boldsymbol{M}}_{\mathscr{E}}(\kappa)} \cap \mathbf{Ult}(\boldsymbol{M},\mathscr{E}) \tag{6.3}$$

et que $\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}\restriction V_{\kappa+1} = \boldsymbol{j}^{\boldsymbol{M}}_{\mathscr{E}}\restriction V_{\kappa+1}$.

De plus, rappelons que $\boldsymbol{k} : \mathbf{Ult}(V,\mathscr{E}) \to \boldsymbol{M}$ est donné par $\boldsymbol{k}\big([\![q,F]\!]_{\mathscr{E}}\big) = (\boldsymbol{j}F)(q)$. Le triangle commute, i.e. $\boldsymbol{k}\circ \boldsymbol{j}_{\mathscr{E}} = \boldsymbol{j}$, et la restriction de $\boldsymbol{k}$ au support de $\mathscr{E}$ est l'identité, i.e. $\boldsymbol{k}\restriction V_{(j\alpha)(\kappa)+\omega_1} = \mathrm{id}$. Ainsi, nous avons premièrement,

$$\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}(A)\cap V_{(j\alpha)(\kappa)} = \boldsymbol{k}\big(\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}(A)\cap V_{(j\alpha)(\kappa)}\big) = \boldsymbol{j}(A)\cap V_{(j\alpha)(\kappa)}. \tag{6.4}$$

Deuxièmement, comme $\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}\restriction V_{\kappa+1} = \boldsymbol{j}^{\boldsymbol{M}}_{\mathscr{E}}\restriction V_{\kappa+1}$,

$$\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}(A)\cap V^{\mathbf{Ult}(V,\mathscr{E})}_{\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}(\kappa)} = \boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}(A\cap V_\kappa) = \boldsymbol{j}^{\boldsymbol{M}}_{\mathscr{E}}(A\cap V_\kappa) = \boldsymbol{j}^{\boldsymbol{M}}_{\mathscr{E}}(A)\cap V^{\mathbf{Ult}(\boldsymbol{M},\mathscr{E})}_{\boldsymbol{j}^{\boldsymbol{M}}_{\mathscr{E}}(\kappa)},$$

et en utilisant (6.3), nous obtenons en particulier que

$$\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}(A)\cap V_{(j\alpha)(\kappa)} = \boldsymbol{j}^{\boldsymbol{M}}_{\mathscr{E}}(A)\cap V_{(j\alpha)(\kappa)}. \tag{6.5}$$

Troisièmement, comme $\mathrm{crit}(\boldsymbol{j}) = \kappa$, $\boldsymbol{j}\restriction V_\kappa = \mathrm{id}$ et donc $A\cap V_\kappa = \boldsymbol{j}(A)\cap V_\kappa$. Ainsi,

$$\boldsymbol{j}^{\boldsymbol{M}}_{\mathscr{E}}(\boldsymbol{j}(A))\cap V^{\mathbf{Ult}(\boldsymbol{M},\mathscr{E})}_{\boldsymbol{j}^{\boldsymbol{M}}_{\mathscr{E}}(\kappa)} = \boldsymbol{j}^{\boldsymbol{M}}_{\mathscr{E}}(\boldsymbol{j}(A)\cap V_\kappa) = \boldsymbol{j}^{\boldsymbol{M}}_{\mathscr{E}}(A\cap V_\kappa) = \boldsymbol{j}^{\boldsymbol{M}}_{\mathscr{E}}(A)\cap V^{\mathbf{Ult}(\boldsymbol{M},\mathscr{E})}_{\boldsymbol{j}^{\boldsymbol{M}}_{\mathscr{E}}(\kappa)},$$

et en utilisant à nouveau (6.3), nous obtenons en particulier

$$\boldsymbol{j}^{\boldsymbol{M}}_{\mathscr{E}}(\boldsymbol{j}(A))\cap V_{(j\alpha)(\kappa)} = \boldsymbol{j}^{\boldsymbol{M}}_{\mathscr{E}}(A)\cap V_{(j\alpha)(\kappa)}. \tag{6.6}$$

Finalement, (6.2) découle de (6.4), (6.5), et (6.6). Ceci termine la démonstration. □

Lemme 6.1.3. *Un cardinal δ est Woodin si et seulement si pour toute fonction $f\in {}^\delta\delta$ il existe un extenseur $\mathscr{E}\in V_\delta$ avec $f``\mathrm{crit}(\mathscr{E})\subseteq \mathrm{crit}(\mathscr{E})$, $V_{(\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}f)(\mathrm{crit}(\mathscr{E}))}\subseteq \mathrm{Supp}(\mathscr{E})$, et $\mathrm{Supp}(\mathscr{E})$ dénombrablement clos.*

Démonstration. Pour l'implication directe, considérons sans perte de généralité une fonction $f:\delta\to\delta$ telle que $f(\gamma)\geq\gamma$ pour tout $\gamma\in\delta$. Par le Lemme 6.1.2, pour $A = f = \{(\gamma,f(\gamma)) \mid \gamma\in\delta\}$, il existe $\kappa<\delta$, tel que, en particulier, pour $\alpha = f(\kappa)+3$, il existe un extenseur $\mathscr{E}\in V_\delta$ avec $\mathrm{Supp}(\mathscr{E})\supseteq V_{f(\kappa)+3}$, $\mathrm{Supp}(\mathscr{E})$ dénombrablement clos, et $V_{f(\kappa)+3}\cap f = V_{f(\kappa)+3}\cap \boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}(f)$. Il nous suffit alors de montrer que $(\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}f)(\kappa) = f(\kappa)$. Ceci implique alors que $f``\kappa\subseteq f(\kappa)=\kappa$ et d'autre part $V_{(\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}f)(\kappa)} = V_{f(\kappa)}\subseteq\mathrm{Supp}(\mathscr{E})$.

Or $f(\kappa)\geq\kappa$ et donc $\mathrm{rang}\big(\kappa,f(\kappa)\big)\leq f(\kappa)+2$. Ainsi,

$$(\kappa,f(\kappa))\in V_{f(\kappa)+3}\cap f = V_{f(\kappa)+3}\cap \boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}(f),$$

et donc $(\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}f)(\kappa) = f(\kappa)$. □

Ainsi, la notion de cardinal de Woodin s'exprime également en termes d'extenseurs et donc dans ZFC.

Nous montrons maintenant qu'un cardinal de Woodin est en particulier fortement inaccessible.

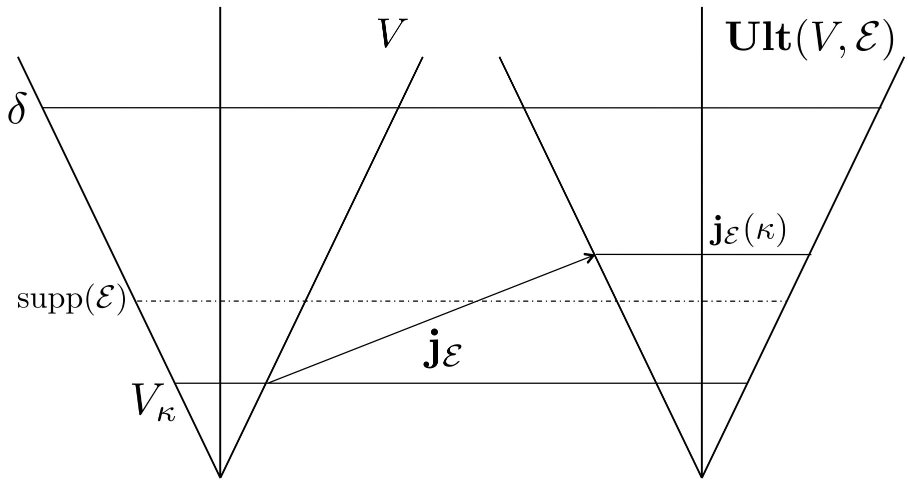
Lemme 6.1.4. *Un cardinal de Woodin est fortement inaccessible.*

Démonstration. Soit δ un cardinal de Woodin.

δ est régulier. Supposons par l'absurde que δ n'est pas régulier. Il existe alors une fonction $f : \gamma \to \delta$ avec $\gamma < \delta$ dont l'image n'est pas bornée. Définissons $g : \delta \to \delta$ par $g(0) = \gamma$, $g(\alpha+1) = f(\alpha)$ si $\alpha < \gamma$ et $g(\alpha) = 0$ si $\alpha \in \delta - \gamma$. Alors pour tout $\alpha < \delta$, nous avons $g"\alpha \not\subseteq \alpha$. Ceci contredit le fait que δ est Woodin.

δ est fortement limite. Supposons par l'absurde que pour un cardinal $\lambda < \delta$ nous avons $\delta \leq 2^\lambda$. Considérons alors n'importe quelle fonction $f : \delta \to \delta$ pour laquelle $f(0) = \lambda$. Comme δ est Woodin, il existe $\kappa < \delta$ et $\boldsymbol{j} : V \to \boldsymbol{M}$ avec en particulier $\mathrm{crit}(\boldsymbol{j}) = \kappa$ et $f"\kappa \subseteq \kappa$. Nécessairement nous avons donc $\lambda \in \kappa$. Comme κ est le point critique d'une injection élémentaire, κ est fortement inaccessible. Mais nous avons $\lambda < \kappa < \delta \leq 2^\lambda$. Ceci contredit le fait qu'en particulier κ est fortement limite. □

Un cardinal de Woodin δ est un point fixe pour toute injection élémentaire associée à un extenseur dans V_δ. Plus généralement, nous avons le résultat suivant.



Lemme 6.1.5. *Si δ est un cardinal fortement inaccessible, si $\mathscr{E} \in V_\delta$ est un extenseur, et si la cofinalité de δ est strictement supérieure à $\mathrm{crit}(\mathscr{E}) = \kappa$, alors $\boldsymbol{j}_\mathscr{E}(\delta) = \delta$.*

Démonstration. Nous savons que $\delta \leq \boldsymbol{j}_\mathscr{E}(\delta)$. Pour montrer l'autre inclusion, supposons que $x \in \boldsymbol{j}_\mathscr{E}(\delta)$. L'ensemble x est représenté par une fonction $F : {}^nV_\kappa \to \delta$ relativement à une suite $q \in {}^{<\omega}\,\mathrm{Supp}(\mathscr{E})$ de longueur n, i.e. $[\![q, F]\!]_\mathscr{E} = x$. La cardinalité de ${}^nV_\kappa$ est κ et comme la cofinalité de δ est strictement supérieure à κ, il existe $\alpha < \delta$ tel que

$$\{f \in {}^nV_\kappa \mid F(f) \leq \alpha\} \in E(q).$$

Par conséquent,

$$[\![q,F]\!]_{\mathscr{E}} \leq \boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}(\alpha) = \left\{ [\![r,G]\!]_{\mathscr{E}} \;\middle|\; r \in {}^{<\omega}\operatorname{Supp}(\mathscr{E}) \text{ et } G : {}^{\operatorname{long}(r)}V_\kappa \to \alpha \right\} \subseteq V_\delta$$

De plus, comme $\mathscr{E} \in V_\delta$ et δ est fortement limite, nous avons

$$\left| \left\{ [\![r,G]\!]_{\mathscr{E}} \;\middle|\; r \in {}^{<\omega}\operatorname{Supp}(\mathscr{E}) \text{ et } G : {}^{\operatorname{long}(r)}V_\kappa \to \alpha \right\} \right| \leq \max\left(\left| {}^{<\omega}\operatorname{Supp}(\mathscr{E}) \right|, \kappa^{|\alpha|} \right) < \delta.$$

Ainsi, $\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}(\alpha) \in V_\delta$ et comme c'est un ordinal, $\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}(\alpha) < \delta$. Par conséquent, par transitivité de l'ordinal $\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}(\alpha)$

$$x = [\![q,F]\!]_{\mathscr{E}} \leq \boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}(\alpha) \subseteq \delta.$$

Nous avons donc obtenu que $\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}(\delta) \subseteq \delta$ donc finalement $\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}(\delta) = \delta$. □

6.2 Construire des arbres

Nous démontrons dans cette section les résultats nécessaires pour montrer que l'existence d'un cardinal de Woodin permet la construction de chaînes alternées. Nous commençons par caractériser d'une nouvelle façon les cardinaux de Woodin.

Notre nouvelle formulation équivalente de la notion de cardinal de Woodin est basée sur le Lemme 6.1.2. Rappelons que ce lemme nous affirme que pour δ Woodin, tout sous-ensemble A de V_δ admet un $\kappa < \delta$ arbitrairement grand, vérifiant pour tout $\alpha < \delta$, il existe une injection élémentaire $\boldsymbol{j}$ de point critique κ avec la propriété que A et $\boldsymbol{j}(A)$ possèdent exactement les mêmes éléments de rang strictement inférieur à α, i.e. $V_\alpha \cap A = V_\alpha \cap \boldsymbol{j}(A)$.

L'idée est d'appliquer ce lemme à des ensembles A dont les éléments sont les formules du langage de la théorie des ensembles à paramètre dans V_α satisfaites par un $V_{\delta+\beta}$.

Précisément, nous faisons les définitions suivantes.

Définition 6.2.1. Soit δ un cardinal fortement limite.

(1) Pour des ordinaux $\omega \leq \alpha \leq \delta$ et β, et pour $z \in {}^{<\omega}V_{\delta+\beta}$, nous définissons le (α,β)-**type** de z relativement à δ comme l'ensemble

$$(\alpha,\beta)\operatorname{tp}_\delta(z) = \left\{ (a, \ulcorner\varphi\urcorner) \;\middle|\; \varphi \text{ formule de LTE } \wedge a \in {}^{<\omega}V_\alpha \wedge V_{\delta+\beta} \models \varphi[a,\delta,z] \right\},$$

où LTE désigne le langage de la théorie des ensembles et $\varphi[a,\delta,z]$ réfère à l'énoncé obtenu de la formule φ avec variables libres parmi $v_1,\ldots,v_{\operatorname{long}(a)+\operatorname{long}(z)+1}$ en effectuant la substitution $\varphi[a_0,\ldots,a_{\operatorname{long}(a)-1},\delta,z_0,\ldots,z_{\operatorname{long}(z)-1}]$.

(2) Pour β un ordinal et $z \in {}^{<\omega}V_{\delta+\beta}$, un cardinal $\kappa < \delta$ est β-**reflétant** dans z relativement à δ si pour tout $\omega \leq \alpha < \delta$ il existe un extenseur $\mathscr{E} \in V_\delta$ avec $\operatorname{Supp}(\mathscr{E})$ dénombrablement clos, $V_\alpha \subseteq \operatorname{Supp}(\mathscr{E})$, $\operatorname{crit}(\mathscr{E}) = \kappa$, et

$$(\alpha,\beta)\operatorname{tp}_\delta(z) = (\alpha, \boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}(\beta))\operatorname{tp}_\delta^{\mathbf{Ult}(V,\mathscr{E})}(\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}(z)).$$

Remarque 6.2.2. (a) Le (α,β)-type de z relativement à δ est essentiellement un sous-ensemble de V_α. Ainsi, pour $\alpha' < \alpha$, $(\alpha,\beta)\,\mathrm{tp}(z) \cap V_{\alpha'} = (\alpha',\beta)\,\mathrm{tp}(z)$.

(b) Par la suite, nous omettons la mention relativement à δ. Ceci ne causera pas de confusion, car les extenseurs que nous considérons seront toujours dans V_δ et δ sera donc fixé par les injections élémentaires associées, comme l'assure le Lemme 6.1.5.

(c) Pour un extenseur $\mathscr{E} \in V_\delta$, par absoluité des codes des formules et du codage de la notion de satisfaction d'une formule par un ensemble, nous avons par élémentarité

$$\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}\big((\alpha,\beta)\,\mathrm{tp}(z)\big) = \big(\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}(\alpha),\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}(\beta)\big)\,\mathrm{tp}^{\mathbf{Ult}(V,\mathscr{E})}(\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}(z)),$$

car nous avons

$$\begin{aligned}
&(a,\ulcorner\varphi\urcorner) \in \boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}\big((\alpha,\beta)\,\mathrm{tp}(z)\big)\\
&\longleftrightarrow \quad \varphi \text{ formule de LTE } \wedge a \in {}^{<\omega}V_{\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}(\alpha)} \wedge V^{\mathbf{Ult}(V,\mathscr{E})}_{\delta+\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}(\beta)} \models \varphi[\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}(a),\delta,\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}(z)]^{\mathbf{Ult}(V,\mathscr{E})}.
\end{aligned}$$

Lemme 6.2.3. *Soit δ un cardinal fortement inaccessible. Les énoncés suivants sont équivalents.*

(1) δ est Woodin ;

(2) pour tout ordinal β et tout $z \in {}^{<\omega}V_{\delta+\beta}$, l'ensemble des cardinaux $\kappa < \delta$ qui sont β-reflétant dans z est non borné ;

(3) pour tout $z \in {}^{<\omega}V_{\delta+1}$, il existe un cardinal $\kappa < \delta$ qui est 1-reflétant dans z.

Démonstration. (1) $\Rightarrow$ (2). Soient β un ordinal et $z \in {}^{<\omega}V_{\delta+\beta}$. Par le Lemme 6.1.2, pour $A = (\delta,\beta)\,\mathrm{tp}(z)$, il existe $\kappa < \delta$ arbitrairement grand, tel que pour tout $\alpha < \delta$, il existe un extenseur $\mathscr{E} \in V_\delta$ avec $\mathrm{Supp}(\mathscr{E})$ dénombrablement clos, $V_\alpha \subseteq \mathrm{Supp}(\mathscr{E})$, $\mathrm{crit}(\mathscr{E}) = \kappa$ et $V_\alpha \cap A = V_\alpha \cap \boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}(A)$. Comme δ est fortement inaccessible, nous avons $\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}(\delta) = \delta$ par le Lemme 6.1.5. Par conséquent, $\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}(A) = (\delta,\boldsymbol{j}(\beta))\,\mathrm{tp}^{\mathbf{Ult}(V,\mathscr{E})}(\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}(z))$. Ainsi pour $\omega \leq \alpha < \delta$, le fait que $V_\alpha \cap A = V_\alpha \cap \boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}(A)$ signifie que

$$(\alpha,\beta)\,\mathrm{tp}(z) = (\alpha,\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}(\beta))\,\mathrm{tp}^{\mathbf{Ult}(V,\mathscr{E})}(\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}(z)).$$

Les extenseurs fournis par le Lemme 6.1.2 attestent donc du fait que κ est β-reflétant dans z relativement à δ.

(3) $\Rightarrow$ (1). Supposons que δ fortement inaccessible satisfait (3) et soit $f : \delta \to \delta$ une fonction. Par (3), il existe $\kappa < \delta$ qui est 1-reflétant dans la suite $\langle f\rangle$. Posons

$$\alpha = \max\left\{\kappa+1, \sup\{f(\xi)+1 \mid \xi \leq \kappa\}\right\}. \tag{6.7}$$

Nous avons $\alpha < \delta$ car δ est régulier. Pour $\xi \leq \kappa$, le fait que $\gamma = f(\xi)$ est exprimé par un membre de l'ensemble $(\alpha,1)\,\mathrm{tp}(\langle f\rangle)$, car ξ et γ sont dans V_α. Choisissons alors $\mathscr{E} \in V_\delta$ un extenseur attestant pour α que κ est 1-reflétant dans $\langle f\rangle$. Nous avons

$$(\alpha,1)\,\mathrm{tp}(\langle F\rangle) = (\alpha,\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}(1))\,\mathrm{tp}^{\mathbf{Ult}(V,\mathscr{E})}(\langle \boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}(f)\rangle).$$

Par conséquent, pour tout $\xi \leq \kappa$, si $f(\xi) = \gamma$, alors $(\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}} f)(\xi) = \gamma$. Pour les $\xi < \kappa$, cela signifie par définition de α que

$$(\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}} f)(\xi) = \gamma = f(\xi) < \alpha \leq \boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}(\kappa), \tag{6.8}$$

où la dernière inégalité découle du fait que $V_\alpha \subseteq \mathrm{Supp}(\mathscr{E})$. Et comme pour $\xi < \kappa$, $\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}(\xi) = \xi$, nous avons

$$\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}(f(\xi)) = (\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}} f)(\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}(\xi)) = (\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}} f)(\xi) \in \boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}(\kappa),$$

ce qui implique par élémentarité de $\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}$ que $f(\xi) \in \kappa$ pour tout $\xi < \kappa$. Par conséquent, $f``\kappa \subseteq \kappa$.

De plus pour $\xi = \kappa$, (6.8) implique aussi que $(\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}} f)(\kappa) = f(\kappa)$. Or par définition de α, $f(\kappa) < \alpha$ et donc $V_\alpha \subseteq \mathrm{Supp}(\mathscr{E})$ implique que

$$V_{(j_E f)(\kappa)} = V_{f(\kappa)} \subseteq \mathrm{Supp}(\mathscr{E}) \subseteq \mathbf{Ult}(V, \mathscr{E}).$$

Nous avons donc montré que l'extenseur $\mathscr{E}$ attestant pour α défini par (6.7) que κ est 1-reflétant dans $\langle f \rangle$ atteste également pour f que δ est Woodin. $\square$

Lemme 6.2.4. *Soient $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ des modèles intérieurs de* ZFC *dénombrablement clos. Soient δ fortement inaccessible et $\kappa < \delta$ tel que $V_{\kappa+1} \cap \boldsymbol{M} = V_{\kappa+1} \cap \boldsymbol{N}$. Soient β et β', et deux suites finies $x \in {}^{<\omega}V_{\delta+\beta} \cap \boldsymbol{M}$ et $x' \in {}^{<\omega}V_{\delta+\beta'} \cap \boldsymbol{N}$. Si*

$$(\kappa, \beta)\,\mathrm{tp}_\delta^{\boldsymbol{M}}(x) = (\kappa, \beta')\,\mathrm{tp}_\delta^{\boldsymbol{N}}(x'),$$

et si $\mathscr{E} \in V_\delta$ atteste pour un certain $\alpha < \delta$ que κ est β-reflétant dans x relativement à δ dans $\boldsymbol{M}$, alors l'ultrapuissance externe bien fondée et dénombrablement close $\mathbf{Ult}^{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{N}, \mathscr{E})$ vérifie

$$V_\alpha \cap \mathbf{Ult}^{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{N}, \mathscr{E}) = V_\alpha \cap \boldsymbol{M}$$

et

$$(\alpha, \beta)\,\mathrm{tp}_\delta^{\boldsymbol{M}}(x) = (\alpha, \boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}^{\boldsymbol{N}}(\beta'))\,\mathrm{tp}_\delta^{\mathbf{Ult}^{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{N},\mathscr{E})}\left(\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}^{\boldsymbol{N}}(x')\right).$$

Démonstration. Par les lemmes 4.3.4 et 4.4.3, comme $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ et $\mathrm{Supp}(\mathscr{E})$ sont dénombrablement clos, $\mathbf{Ult}^{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{N}, \mathscr{E})$ est bien fondée et dénombrablement close. Et par le Lemme 4.4.2, le fait que $V_\alpha \subseteq \mathrm{Supp}(\mathscr{E})$ implique que

$$V_\alpha \cap \boldsymbol{M} = V_\alpha \cap \mathbf{Ult}(\boldsymbol{M}, \mathscr{E}) = V_\alpha \cap \mathbf{Ult}^{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{N}, \mathscr{E}).$$

Supposons maintenant que pour une suite finie $a \in {}^{<\omega}\left(V_\alpha \cap \mathbf{Ult}^{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{N}, \mathscr{E})\right)$ et une formule φ du langage de la théorie des ensembles, nous avons

$$(a, \ulcorner\varphi\urcorner) \in (\alpha, \boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}^{\boldsymbol{N}}(\beta'))\,\mathrm{tp}_\delta^{\mathbf{Ult}^{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{N},\mathscr{E})}\left(\boldsymbol{j}_{\mathscr{E}}^{\boldsymbol{N}}(x')\right).$$

L'élément $(a, \ulcorner\varphi\urcorner)$ de $\mathbf{Ult}^{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{N}, \mathscr{E})$ est notamment représenté relativement à la suite $\langle a \rangle \in {}^{<\omega}\,\mathrm{Supp}(\mathscr{E})$ par la fonction $F \in \boldsymbol{M} \cap \boldsymbol{N}$, $F : {}^1V_\kappa \cap \boldsymbol{N} \to V_\kappa$ donnée par $F(\langle r \rangle) = (r, \ulcorner\varphi\urcorner)$ pour tout $\langle r \rangle \in {}^1V_\kappa \cap \boldsymbol{N}$. Par le Théorème de Łoś, cette fonction possède la propriété que pour $E(\langle a \rangle)$-presque tout $\langle r \rangle \in {}^1V_\kappa \cap \boldsymbol{N}$, $r \in {}^{\mathrm{long}(a)}V_\kappa \cap \boldsymbol{N}$. De plus, toujours par le Théorème de Łoś, nous avons pour $E(\langle a\rangle)$-presque tout $r \in {}^{\mathrm{long}(a)}V_\kappa \cap$ $\boldsymbol{N}$ que

$$F(\langle z\rangle) = (z, \ulcorner\varphi\urcorner) \in (\kappa, \beta')\,\mathrm{tp}^{\boldsymbol{N}}_{\delta}(x').$$

Ainsi comme par hypothèse, $(\kappa,\beta)\,\mathrm{tp}^{\boldsymbol{M}}_{\delta}(x) = (\kappa,\beta')\,\mathrm{tp}^{\boldsymbol{N}}_{\delta}(x')$, nous avons par le Théorème de Łoś que

$$(a, \ulcorner\varphi\urcorner) = [\![\langle a\rangle, F]\!]^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}} = [\![\langle a\rangle, F]\!]^{\boldsymbol{M}}_{\mathscr{E}} \in (\alpha, \boldsymbol{j}^{\boldsymbol{M}}_{\mathscr{E}}(\beta))\,\mathrm{tp}^{\boldsymbol{M}}_{\delta}(\boldsymbol{j}^{\boldsymbol{M}}_{\mathscr{E}}(x)).$$

Or comme $\mathscr{E}$ atteste pour α que κ est β-reflétant dans x relativement à δ dans $\boldsymbol{M}$, $(\alpha, \boldsymbol{j}^{\boldsymbol{M}}_{\mathscr{E}}(\beta))\,\mathrm{tp}^{\mathbf{Ult}(\boldsymbol{M},\mathscr{E})}_{\delta}(\boldsymbol{j}^{\boldsymbol{M}}_{\mathscr{E}}(x)) = (\alpha,\beta)\,\mathrm{tp}^{\boldsymbol{M}}_{\delta}(x)$. Ainsi, $(a,\ulcorner\varphi\urcorner) \in (\alpha,\beta)\,\mathrm{tp}^{\boldsymbol{M}}_{\delta}(x)$. L'autre inclusion est similaire. $\square$

Lemme 6.2.5 (One-Step Lemma)**.** *Soient $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ des modèles intérieurs dénombrablement clos de* ZFC*. Soit δ Woodin dans $\boldsymbol{M}$ et fortement inaccessible dans V. Soient $\kappa < \delta$, $\eta < \delta$, β, β' des ordinaux, et $\xi < \beta$ un ordinal. Soient des suites finies $x, y \in {}^{<\omega}V_{\delta+\xi} \cap \boldsymbol{M}$ et $x' \in {}^{<\omega}V_{\delta+\beta'} \cap \boldsymbol{N}$. Soit $\phi(v)$ une formule du langage de la théorie des ensembles à une variable libre. Supposons que*

(a) $V_{\kappa+1} \cap \boldsymbol{M} = V_{\kappa+1} \cap \boldsymbol{N}$ *;*

(b) $(\kappa,\beta)\,\mathrm{tp}^{\boldsymbol{M}}_{\delta}(x) = (\kappa,\beta')\,\mathrm{tp}^{\boldsymbol{N}}_{\delta}(x')$*;*

(c) κ est β-reflétant dans x relativement à δ dans $\boldsymbol{M}$;

(d) $V_{\delta+\beta} \cap \boldsymbol{M} \models \phi[\xi]$.

Alors il existe $\mathscr{E} \in V_\delta \cap \boldsymbol{M}$ extenseur dans $\boldsymbol{M}$, avec $\mathrm{Supp}(\mathscr{E})$ *dénombrablement clos,* $\mathrm{crit}(\mathscr{E}) = \kappa$*, de sorte que pour l'ultrapuissance bien fondée et dénombrablement close* $\mathbf{Ult}^{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{N},\mathscr{E})$*, il existe de plus κ^* avec $\eta < \kappa^* < \delta$ et $V_{\kappa^*+1} \cap \boldsymbol{M} \subseteq$* $\mathrm{Supp}(\mathscr{E})$*, ξ^* avec $\xi^* < \delta + \boldsymbol{j}^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}}(\beta')$ et $\boldsymbol{j}^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}}(x') \in {}^{<\omega}V_{\delta+\xi^*} \cap \mathbf{Ult}^{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{N},\mathscr{E})$, et $y^* \in {}^{<\omega}V_{\delta+\xi^*} \cap \mathbf{Ult}^{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{N},\mathscr{E})$, vérifiant les propriétés suivantes*

(a)* $V_{\kappa^*+1} \cap \mathbf{Ult}^{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{N},\mathscr{E}) = V_{\kappa^*+1} \cap \boldsymbol{M}$ *;*

(b)* $(\kappa^*,\xi^*)\,\mathrm{tp}^{\mathbf{Ult}^{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{N},\mathscr{E})}_{\delta}(\boldsymbol{j}^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}}(x')^\frown y^*) = (\kappa^*,\xi)\,\mathrm{tp}^{\boldsymbol{M}}_{\delta}(x^\frown y)$*;*

(c) κ^* est ξ^*-reflétant dans $\boldsymbol{j}^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}}(x')^\frown y^*$ relativement à δ dans $\mathbf{Ult}^{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{N},\mathscr{E})$;*

(d)* $V_{\delta+\boldsymbol{j}^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}}(\beta')} \cap \mathbf{Ult}^{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{N},\mathscr{E}) \models \phi[\xi^*]$*;*

(e) si y est une suite d'ordinaux de longueur n, alors y^* est une suite d'ordinaux de longueur n définissable dans $V_{\delta+\boldsymbol{j}^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}}(\beta')} \cap \mathbf{Ult}^{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{N},\mathscr{E})$ à partir de δ, $\boldsymbol{j}^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}}(x')$, et d'éléments de $V_{\kappa^*+1} \cap \mathbf{Ult}^{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{N},\mathscr{E})$.*

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{E} \in \boldsymbol{M} \arrow[r, dotted, "\boldsymbol{j}^{\boldsymbol{M}}_{\mathscr{E}'}"] & {} \\
\boldsymbol{N} \arrow[r, "\boldsymbol{j}^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}}"'] & \mathbf{Ult}^{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{N},\mathscr{E}) \ni \mathscr{E}'
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Par le Lemme 6.2.3, il existe $\kappa^* < \delta$ avec $\eta < \kappa^*$ qui est ξ-reflétant dans $x^\frown y$ dans $\boldsymbol{M}$. Par (c), il existe $\mathscr{E} \in V_\delta \cap \boldsymbol{M}$ un extenseur attestant dans $\boldsymbol{M}$ pour $\alpha = \kappa^* + 1$ que κ est β-reflétant dans x dans $\boldsymbol{M}$. En utilisant (b), le Lemme 6.2.4 implique (a^*) et le fait que

$$(\kappa^*+1,\beta)\,\mathrm{tp}^{\boldsymbol{M}}(x) = (\kappa^*+1, \boldsymbol{j}^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}}(\beta'))\,\mathrm{tp}^{\mathbf{Ult}^{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{N},\mathscr{E})}(\boldsymbol{j}^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}}(x')). \tag{6.9}$$

Appelons $\tau = (\kappa^*, \xi)\,\mathrm{tp}^{\boldsymbol{M}}(x^\frown y)$, nous avons essentiellement $\tau \in V_{\kappa^*+1} \cap \boldsymbol{M}$. Il apparaît notamment par (d), que $V_{\delta+\beta} \cap \boldsymbol{M}$ satisfait la formule suivante

$$\psi : \exists\nu\exists u\Big(\nu \text{ est un ordinal } \wedge u \in {}^{<\omega}V_{\delta+\nu} \wedge \tau = (\kappa^*, \nu)\,\mathrm{tp}(x^\frown u) \\ \wedge \kappa^* \text{ est } \nu\text{-reflétant dans } x^\frown u \wedge \phi(\nu)\Big).$$

En effet, comme $\xi < \beta$, il suffit en effet de prendre $u = y \in {}^{<\omega}V_{\delta+\xi} \subseteq {}^{<\omega}V_{\delta+\beta}$ et $\nu = \xi \in V_{\delta+\beta}$. Le couple formé de la suite $\langle\tau, \kappa^*\rangle$ de paramètres dans V_{κ^*+1} et du code de ψ appartient donc à $(\kappa^* + 1, \beta)\,\mathrm{tp}^{\boldsymbol{M}}(x)$. Ainsi par (6.9), il existe un ordinal $\xi^* < \delta + \boldsymbol{j}^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}}(\beta')$ et $y^* \in V_{\delta+\xi^*} \cap \mathbf{Ult}^{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{N}, \mathscr{E})$ de sorte que

$$(\kappa^*, \xi^*)\,\mathrm{tp}^{\mathbf{Ult}^{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{N},\mathscr{E})}(\boldsymbol{j}^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}}(x')^\frown y^*) = \tau = (\kappa^*, \xi)\,\mathrm{tp}^{\boldsymbol{M}}(x^\frown y),$$

mais aussi que κ^* est ξ^*-reflétant dans $x^\frown y^*$ et que

$$V_{\delta+\boldsymbol{j}^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}}(\beta')} \cap \mathbf{Ult}^{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{N}, \mathscr{E}) \models \phi(\xi^*).$$

Nous avons ainsi obtenu (b^*), (c^*) et (d^*). Pour voir (e^*), il suffit de voir que si y est une suite finie d'ordinaux, alors nous pouvons faire dire en plus à ψ que u est une suite d'ordinaux de longueur $\mathrm{long}(y)$ qui est la plus petite pour l'ordre lexicographique à vérifier les autres exigences de ψ. Le y^* résultant de cette modification de ψ, est alors une suite d'ordinaux de longueur $\mathrm{long}(y)$ définissable dans $V_{\delta+\boldsymbol{j}^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}}(\beta')} \cap \mathbf{Ult}^{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{N}, \mathscr{E})$ à partir δ, $\boldsymbol{j}^{\boldsymbol{N}}_{\mathscr{E}}(x')$, et de τ et κ^* qui sont dans $V_{\kappa^*+1} \cap \mathbf{Ult}^{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{N}, \mathscr{E})$. □

Notes. Hormis le Lemme 6.1.5 dont les arguments sont inspirés de la Proposition 5.7 du chapitre 1 de [Kan94], ce chapitre est basé sur [MS89].

Chapitre 7

Détermination projective

Rien qui ne m'appartienne
sinon la paix du cœur
et la fraîcheur de l'air

Kobayashi Issa

7.1 Construction de chaînes alternées

Pour simplifier les notations lors de la manipulation de chaînes alternées, nous définissons pour tous entiers $k, l \in \omega$ l'opération $k \dot{-} l = \max\{0, k - l\}$. Le prédécesseur immédiat de $k+1$ pour l'ordre $\prec_{\mathrm{alt}}$ est $k \dot{-} 1$.

Nous commençons par montrer qu'un cas très particulier du One-Step Lemma assure que l'existence d'un cardinal de Woodin implique l'existence de chaînes alternées de longueur finie quelconque.

Théorème 7.1.1. *S'il existe un cardinal de Woodin, alors pour tout $n > 0$, $n \in \omega$, il existe une chaîne alternée de longueur $n+1$.*

Démonstration. Soient δ un cardinal de Woodin et $n > 0$. Par le Lemme 6.2.3, il existe $\kappa_0 < \delta$ qui est $(n-1)$-reflétant dans la suite vide $\emptyset$. Par induction, supposons que pour k avec $0 \leq k < n$ nous avons une chaîne alternée $\langle (\mathscr{E}_m, \rho_m) \mid m < k \rangle$, notons $\langle \boldsymbol{M}_m, \boldsymbol{j}_{m,l} \mid m \preceq_{\mathrm{alt}} l \leq k \rangle$ son système canonique associé, et supposons aussi que

(i)$_k$ pour chaque $m < k$, $\mathscr{E}_m \in V_\delta$;

(ii)$_k$ nous avons une suite d'ordinaux $\kappa_0, \ldots, \kappa_k$ avec $\kappa_m = \mathrm{crit}(\mathscr{E}_m)$ pour tous $m < k$ et si $k > 0$, $\kappa_k = \rho_{k-1}$;

(iii)$_k$ $(\kappa_k, n-k-1)\,\mathrm{tp}^{\boldsymbol{M}_k}(\emptyset) = (\kappa_k, n-k-1)\,\mathrm{tp}^{\boldsymbol{M}_{k \dot{-} 1}}(\emptyset)$;

(iv)$_k$ κ_k est $(n-k-1)$-reflétant dans $\emptyset$ dans $\boldsymbol{M}_k$.

Observons que cette hypothèse d'induction est satisfaite pour $k = 0$ en prenant κ_0 qui est $(n-1)$ reflétant dans $\emptyset$.

Cas intermédiaire. Si $k < n-1$, nous appliquons le One-Step Lemma à $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_k$, $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{M}_{k \dot{-} 1}$, $\kappa = \kappa_k$, $\eta = \kappa_k$, $\beta = \beta' = n-k-1$, $\xi = n-k-2$, $x = y = x' = \emptyset$ et pour la formule $\phi(v)$ donnée par « $\delta + v$ est le plus grand ordinal ».

Soient alors $\mathscr{E}$, κ^*, ξ^*, y^*, donnés par ce lemme. Nous avons $\kappa_k = \eta < \kappa^*$. Comme par (e^*), $V_{\delta+n-k-1} \cap \mathbf{Ult}^{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{M}_{k \dot{-} 1}, \mathscr{E}) \models \phi(\xi^*)$, nous avons nécessairement $\xi^* = n-k-2$. Par (e^*), nous avons $y^* = \emptyset$.

Nous posons $\mathscr{E}_k = \mathscr{E}$, $\rho_k = \kappa^*$ et $\kappa_{k+1} = \kappa^*$. Nous avons $(\mathrm{i})_{k+1}$ et $\mathrm{crit}(\mathscr{E}_k) = \kappa_k$. Ainsi, nous avons directement $(\mathrm{ii})_{k+1}$. En outre, l'extenseur $\mathscr{E}_k$ et l'ordinal ρ_k satisfont les points (a_k) à (e_k) de la définition récursive d'arbre d'itérations (Définition 5.1.1). En particulier pour $k > 0$, $\rho_{k-1}\kappa_k < \kappa_{k+1} = \rho_k$ et donc les ρ_m pour $m < k+1$ sont croissants. Le système $\langle (E_m, \rho_m) \mid m < k+1 \rangle$ est donc bien une chaîne alternée de longueur $k+1$. Son système canonique associé est complété avec

$$\boldsymbol{j}_{k \dot{-} 1, k+1} = \boldsymbol{j}_{\mathscr{E}_k}^{\boldsymbol{M}_{k \dot{-} 1}} : \boldsymbol{M}_{k \dot{-} 1} \to \boldsymbol{M}_{k+1} = \mathbf{Ult}^{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{M}_{k \dot{-} 1}, \mathscr{E}_k)$$

De plus, le One-step Lemma nous assure que $(\mathrm{i})_{k+1}$ est vérifiée. Il nous assure également par (b^*) et (c^*) respectivement que $(\mathrm{iii})_{k+1}$ et $(\mathrm{iv})_{k+1}$ sont vérifiées. Ainsi notre hypothèse d'induction est vérifiée pour $k+1$.

Cas final. Si $k = n-1$, nous choisissons $E_k \in V_\delta$ attestant pour $\alpha = \kappa_k + 1$ que κ_k est 0-reflétant dans $\emptyset$ dans $\boldsymbol{M}_k$. Nous posons $\rho_k = \kappa_k$ et nous avons

$$\boldsymbol{j}_{k-1,k} : \boldsymbol{M}_{k-1} \to \boldsymbol{M}_n = \mathbf{Ult}^{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{M}_{k-1}, \mathscr{E}_k).$$

Partant d'un cardinal $(n-1)$-reflétant dans $\emptyset$, dont l'existence est assurée par le Lemme 6.2.3, le One-Step Lemma permet ainsi de construire étape par étape une chaîne alternée de longueur $n+1$. □

Le théorème précédent est loin d'utiliser les nombreux paramètres du One-Step Lemma. Nous montrons à présent comme tirer profit du paramètre η. Soit δ un cardinal de Woodin. Considérons le jeux $\mathscr{G}_n$ suivant.

$$\begin{tikzcd}
I : & \alpha_0 \arrow[dr] & & \alpha_1 \arrow[dr] & & & \alpha_{n-1} \arrow[dr] & & \alpha_n \arrow[dr] & \\
II : & & \kappa_0 \arrow[ur] & & (\mathscr{E}_0, \rho_0, \kappa_1) & \cdots & & (\mathscr{E}_{n-2}, \rho_{n-2}, \kappa_{n-1}) \arrow[ur] & & (\mathscr{E}_{n-1}, \rho_{n-1})
\end{tikzcd}$$

Le joueur *I* joue des ordinaux, le joueur *II* construit une chaîne alternée pas à pas. Nous avons de plus les règles suivantes devant être vérifiées,

R1. pour chaque $k \leq n$, $\alpha_k < \delta$;

R2. pour chaque $k < n$, nous avons $\alpha_k < \kappa_k < \delta$, $\rho_k = \kappa_{k+1}$, $\mathrm{crit}(\mathscr{E}_k) = \kappa_k$, et le système $\langle (E_m, \rho_m) \mid m < k \rangle$ est une chaîne alternée de longueur $k+1$.

R3. $\rho_{n-1} > \alpha_n$.

Le premier joueur à désobéir à une règle perd et si les règles sont respectées le joueur *II* gagne. Le résultat d'une partie gagnée par *II* est une chaîne alternée $\langle (E_k, \rho_k) \mid k < n \rangle$ de longueur $n+1$ avec $\mathrm{crit}(\mathscr{E}_k) > \alpha_k$ pour tout $k < m$.

Théorème 7.1.2. *S'il existe un cardinal de Woodin δ, alors pour tout $n \in \omega$ le joueur II possède une stratégie gagnante dans $\mathscr{G}_n$.*

Démonstration. La démonstration de ce théorème est à quelques différences près identique à celle du Théorème 7.1.1. Nous indiquons ces différences.

Pour le choix de κ_0, nous utilisons de façon plus complète le Lemme 6.2.3 qui nous assure l'existence d'un κ_0 avec $\alpha_0 < \kappa_0 < \delta$ qui est $(n-1)$-reflétant dans $\emptyset$.

Dans le cas intermédiaire, nous procédons de façon identique si ce n'est que nous prenons $\eta = \alpha_{k+1}$ dans l'application du One-Step Lemma.

Dans le cas final, nous choisissons $\mathscr{E}_{n-1}$ qui atteste pour $\alpha = \alpha_n + 2$ que κ_{n-1} est 0-reflétant dans $\emptyset$ dans $\boldsymbol{M}_{n-1}$ et nous posons $\rho_{n-1} = \alpha_n + 1$. □

7.2 L'homogénéité de T^*

Nous montrons dans cette section que sous certaines hypothèses, l'homogénéité d'un arbre T implique l'homogénéité de l'arbre T^* défini à la section 3.4.

Notre première tâche est de montrer que le One-Step Lemma permet en fait de construire des chaînes alternées de longueur ω. Dans la section précédente, notre utilisation de ce lemme semble indiquer que la condition $\xi < \beta$ s'oppose à la construction de chaînes alternées infinies. Toutefois, le lemme suivant va nous permettre de contourner cet obstacle.

Lemme 7.2.1. *Soit δ un cardinal fortement inaccessible. Pour tout cardinal $\lambda > \delta$, il existe trois cardinaux $\lambda < c_0 < c_1 < c_2$ vérifiant les propriétés suivantes :*

(1) c_0, c_1 et c_2 sont des cardinaux fortement limites de cofinalité strictement supérieure à δ.

(2) c_0 et c_1 satisfont dans V_{c_2} les mêmes formules à paramètres dans $V_{\lambda+1}$, i.e.

$$(\lambda+1,0)\,\mathrm{tp}_{c_2}(c_0) = (\lambda+1,0)\,\mathrm{tp}_{c_2}(c_1).$$

Démonstration. Observons pour commencer que la classe des cardinaux fortement limites de cofinalité strictement supérieure à δ est une classe propre. Rappelons que la fonctionnelle $\beth$ est définie par $\beth_0 = \aleph_0$, $\beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}$ et $\beth_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} \beth_\alpha$ pour γ limite. Alors, pour tout ordinal α, le cardinal $\beth_{\alpha+\delta^+}$ est fortement limite et de cofinalité δ^+.

Notons alors $\boldsymbol{Z}$ la classe propre des cardinaux strictement supérieurs à λ qui sont fortement limites et de cofinalité strictement supérieur à δ. Choisissons c_2 comme le $\left|V_{\lambda+2}\right|^+$ème membre de $\boldsymbol{Z}$. Or il n'y a que $\left|V_{\lambda+2}\right|$ différents $(\lambda+1,0)\,\mathrm{tp}_{c_2}$ possibles, et il existe donc $c_0 < c_1 < c_2$ dans $\boldsymbol{Z}$ vérifiant dans V_{c_2} les mêmes formules à paramètres dans $V_{\lambda+1}$. □

Pour $\delta < \lambda$, l'intérêt des cardinaux $< c_0 < c_1 < c_2$ fournis par le lemme précédent réside dans les propriétés suivantes.

P1 la condition (1) nous assure par le Lemme 6.1.5 que c_0, c_1 et c_2 sont fixés par toute injection élémentaire associée à un extenseur dans V_δ.

P2 Si $\kappa < \delta$ est c_0-reflétant dans un $z \in {}^{<\omega}V_{\lambda+1}$, alors V_{c_2} satisfait « κ est c_0-reflétant dans z » et par (2), κ est c_1-reflétant dans z.

P3 Pour $\alpha < \delta$, si $z \in {}^{<\omega}V_{\lambda+1}$, alors

$$(\alpha, c_0)\,\mathrm{tp}_\delta(z) = (\alpha, c_1)\,\mathrm{tp}_\delta(z).$$

Nous reprenons à présent les notations de la section 3.4. Soit δ un cardinal de Woodin. Soit T un arbre δ^+-homogène sur $Y \times \lambda$ avec λ un cardinal strictement supérieur à δ. Soient $c_0 < c_1 < c_2$ donnés par le Lemme 7.2.1. Pour tout cardinal $\kappa < \delta$, nous considérons le jeu $\mathscr{G}_\kappa^T$ suivant.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
I: & (m_0, \eta_0, \alpha_0) \arrow[dr] & & (m_1, \eta_1, \alpha_1) \arrow[dr] & & \cdots \\
II: & & (\mathscr{E}_0, \rho_0, \eta'_0, \mathscr{E}_1, \rho_1, \beta_1) \arrow[ur] & & (\mathscr{E}_2, \rho_2, \eta'_1, \mathscr{E}_3, \rho_3, \beta_2) &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \boldsymbol{M}_1 = \mathbf{Ult}(V, \mathscr{E}_0) \arrow[r, "j_{\mathscr{E}_2}^{\boldsymbol{M}_1}"] & \boldsymbol{M}_3 = \mathbf{Ult}^{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{M}_1, \mathscr{E}_2) & \\
\boldsymbol{M}_0 = V \arrow[ur, bend left, "j_{\mathscr{E}_0}"] \arrow[dr, bend right, "j_{\mathscr{E}_1}"'] & & & \cdots \\
 & \boldsymbol{M}_2 = \mathbf{Ult}^{\mathrm{ext}}(V, \mathscr{E}_1) \arrow[r, "j_{\mathscr{E}_3}^{\boldsymbol{M}_2}"'] & \boldsymbol{M}_4 = \mathbf{Ult}^{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{M}_2, \mathscr{E}_3) &
\end{tikzcd}$$

Le joueur I joue à chaque tour un naturel m et deux ordinaux η et α. Le joueur II construit pas à pas une chaîne alternée, il joue de plus à chaque tour des ordinaux η' et β. Le premier joueur qui désobéit à une des règles suivantes perd. Si les règles sont respectées, alors II gagne. Les règles consistent à vérifier les conditions suivantes pour chaque $n \in \omega$

R1. $\mathscr{C}_n = \langle (\mathscr{E}_k, \rho_k) \mid k < n \rangle$ est une chaîne alternée de longueur $n+1$ et chaque $\mathscr{E}_n \in V_\delta$.

Tant que la règle R1. est respectée, nous désignons par $\langle \boldsymbol{M}_k, \boldsymbol{j}_{k,l} \mid k \preceq_{\mathrm{alt}} l \leq n \rangle$ le système canonique associé à $\mathscr{C}_n$.

R2. $\rho_{n-1} = \mathrm{crit}\,\mathscr{E}_n$;

R3. $\rho_{2n-1} < \alpha_n < \delta$, avec $\rho_{-1} = \kappa$;

R4. $\alpha_n < \rho_{2n} < \rho_{2n+1}$;

R5. $\beta_{n+1} < \boldsymbol{j}_{2n,2n+2}(\beta_n)$, avec $\beta_0 = c_0$;

R6. notons $t_n = \langle \boldsymbol{j}_{2k,2n\dot{-}2}(\eta_k) \mid k < n \rangle$, alors

$$\big(\langle m_k \mid k \leq n \rangle, t_{n+1}\big) \in \boldsymbol{j}_{0,2n}(T);$$

R7. notons $r_n = \langle \boldsymbol{j}_{2k+1,2n\dot{-}1}(\eta'_k) \mid k < n \rangle$, alors

$$\big(\langle m_k \mid k \leq n \rangle, r_{n+1}\big) \in \boldsymbol{j}_{0,2n+1}(T);$$

R8. η'_n est définissable dans $V_{c_2} \cap \boldsymbol{M}_{2n+1}$ à partir d'éléments de $(V_{\rho_{2n}+1} \cap \boldsymbol{M}_{2n+1}) \cup \{\delta, \boldsymbol{j}_{0,2n+1}(T), c_0\}$.

Remarque 7.2.2. En fait, nous nous intéressons exclusivement à une stratégie gagnante pour *II* face à une façon de jouer particulière de I. L'idée est que I se donne une branche maximale de (s,t) de T. Il commence alors par jouer $(s(0),t(0))$ ainsi qu'un $\alpha_0 > \kappa$. Ensuite, prenant en compte les coups de *II*, il joue $t(k)$, $\eta_k = \boldsymbol{j}_{0,2k}(t(k))$ et un ordinal $\rho_{2k-1} < \alpha_k < \delta$. Jouant ainsi, I s'assure de respecter les règles qui lui sont imposées. En effet, R3. est respectée et comme

$$t_n = \langle \boldsymbol{j}_{2k,2n\dot{-}2} \circ \boldsymbol{j}_{0,2k}(t(k)) \mid k < n \rangle = \boldsymbol{j}_{0,2n\dot{-}2}(t\restriction n),$$

nous avons par élémentarité de $\boldsymbol{j}_{0,2n}$ que

$$(s\restriction n+1, t_{n+1}) \in \boldsymbol{j}_{0,2n}(T) \longleftrightarrow \boldsymbol{j}_{0,2n}(s\restriction n+1, t\restriction n+1) \in \boldsymbol{j}_{0,2}(T) \longleftrightarrow (s\restriction n+1, t\restriction n+1) \in T,$$

et donc R6. est vérifiée. Le rôle des α_k est simplement de forcer la croissance des points critiques de la chaîne alternée que doit construire *II*. Nous disons que I **joue pour** (s,t) s'il joue de la façon que nous venons de décrire.

Supposons maintenant que *II* gagne une partie du jeu $\mathscr{G}_\kappa^T$ où I joue pour une branche (x,f) de T.

Le joueur *II* a dû d'une part construire une chaîne alternée $\mathscr{C} = \langle (\mathscr{E}_n, \rho_n) \mid n \in \omega \rangle$ de longueur $2\operatorname{long}(x)$. Si la branche (x,f) est infinie, alors la chaîne alternée $\mathscr{C}$ possède deux branches infinies Pair $= \{2n \mid n \in \omega\}$ et Imp $= \{2n+1 \mid n \in \omega\}$, et les ultrapuissances $\boldsymbol{M}_{\mathrm{Pair}}$ et $\boldsymbol{M}_{\mathrm{Imp}}$ associées. D'autre part, il a joué des ordinaux β et η' en nombre $\operatorname{long}(x)$. Le rôle des β est d'assurer que lorsque $x \in p[T]$, alors $\boldsymbol{M}_{\mathrm{Pair}}$ est mal fondée. Nous verrons par la suite que les η' assurent dans un certain sens que $\boldsymbol{M}_{\mathrm{Imp}}$ est mal fondée lorsque $x \notin p[T]$. L'idée est que si $x \notin p[T]$, alors l'arbre $T(x) = \{t \in {}^{<\omega}\lambda \mid (x\restriction \operatorname{long}(t), t) \in T\}$ est bien fondé. Ainsi, tant qu'ils sont définis, le rang dans $T(x)$ des r_n décroît. De plus, la règle R8. contraint *II* à jouer ses η' dans un sous-ensemble de V_{c_2} qui possède une cardinalité inférieure à δ.

Lemme 7.2.3. *Si δ est un cardinal de Woodin et T est un arbre sur $\omega \times \lambda$, alors l'ensemble des $\kappa < \delta$ tels que II possède une stratégie gagnante dans $\mathscr{G}_\kappa^T$ est non borné.*

Démonstration. L'arbre T sur $\omega \times \lambda$ appartient à V_{c_0} où $\lambda < c_0 < c_1 < c_2$ sont donnés par le Lemme 7.2.1. Par le Lemme 6.2.3, l'ensemble des $\kappa < \delta$ qui sont (c_0+1)-reflétant dans $\langle T \rangle$ est non borné. Pour un tel κ, nous construisons une stratégie gagnante τ pour *II* dans $\mathscr{G}_\kappa^T$.

Hypothèses d'induction. Nous supposons par induction que τ est définie sur toutes les positions de longueur strictement inférieure à $2n$. Nous supposons également par induction que

$$(*)_n \qquad \begin{aligned} &(\rho_{2n-1}, \beta_n + 1)\, \mathrm{tp}_\delta^{\boldsymbol{M}_{2n}} \left(\langle \boldsymbol{j}_{0,2n}(T) \rangle^\frown \boldsymbol{j}_{2n\dot{-}2,2n}(t_n) \right) \\ &\qquad\qquad = (\rho_{2n-1}, c_0 + 1)\, \mathrm{tp}_\delta^{\boldsymbol{M}_{2n\dot{-}1}} \left(\langle \boldsymbol{j}_{0,2n\dot{-}1}(T) \rangle^\frown r_n \right); \end{aligned}$$

$(**)_n$ $\quad$ ρ_{2n-1} est (β_n+1)-reflétant dans $\langle \boldsymbol{j}_{0,2n}(T) \rangle^\frown \boldsymbol{j}_{2n\dot{-}2,2n}(t_n)$ relativement à δ dans $\boldsymbol{M}_{2n}$.

Notons que $(*)_0$ et $(**)_0$ sont vérifiée pour $\rho_{-1} = \kappa$ et $\beta_0 = c_0$.

Supposons que I joue (m_n, η_n, α_n) en respectant les règles qui le concernent, à savoir R3 et R6. Ainsi, $\rho_{2n-1} < \alpha_n < \delta$ et $t_{n+1} = \boldsymbol{j}_{2n\dot{-}2,2n}(t_n)^\frown(\eta_n)$ vérifie $t_{n+1} \in \boldsymbol{j}_{0,2n}(T)$. Nous décrivons en deux étapes ce que doit jouer *II* selon τ pour son $n^{\text{ème}}$ tour.

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny] & (m_n, \eta_n, \alpha_n) \arrow[dr, Rightarrow, "\tau"] & \\ (\mathscr{E}_{2n\dot{-}2}, \rho_{2n\dot{-}2}, \eta'_{n\dot{-}1}, \mathscr{E}_{2n\dot{-}1}, \rho_{2n\dot{-}1}, \beta_n) \arrow[ur] & & (\mathscr{E}_{2n}, \rho_{2n}, \eta'_n, \mathscr{E}_{2n+1}, \rho_{2n+1}, \beta_{n+1}) \end{tikzcd}$$

$$\boldsymbol{M}_{2n\dot{-}1} \xrightarrow{\boldsymbol{j}_{2n\dot{-}1,2n+1} = \boldsymbol{j}^{\boldsymbol{M}_{2n-1}}_{\mathscr{E}_{2n}}} \boldsymbol{M}_{2n+1} = \mathbf{Ult}^{\text{ext}}(\boldsymbol{M}_{2n\dot{-}1}, \mathscr{E}_{2n}) \ni \mathscr{E}_{2n+1}$$

$$\mathscr{E}_{2n} \in \boldsymbol{M}_{2n} \xrightarrow[\boldsymbol{j}_{2n,2n+2} = \boldsymbol{j}^{\boldsymbol{M}_{2n}}_{\mathscr{E}_{2n+1}}]{} \boldsymbol{M}_{2n+2} = \mathbf{Ult}^{\text{ext}}(\boldsymbol{M}_{2n}, \mathscr{E}_{2n+1})$$

1ère étape. Nous commençons par décrire le $\mathscr{E}_{2n}$, le ρ_{2n} et le η'_n que doit jouer *II*. Par nos hypothèses d'inductions, nous pouvons appliquer le One-Step Lemma à $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_{2n}$ et $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{M}_{2n\dot{-}1}$, $\kappa = \rho_{2n-1}$, $\eta = \alpha_n$, $\beta = \beta_n + 1$, $\beta' = c_0 + 1$, $\xi = \beta_n$, $x = \langle \boldsymbol{j}_{0,2n}(T)\rangle^\frown \boldsymbol{j}_{2n\dot{-}2,2n}(t_n)$, $y = \langle \eta_n \rangle$, $x' = \langle \boldsymbol{j}_{0,2n\dot{-}1}(T)\rangle^\frown r_n$ et à $\phi(\nu)$, la formule disant « $\delta + \nu$ est le plus grand ordinal ». En effet, (a) est vérifiée car R1 a été suivie, (b) et (c) sont respectivement assurée par $(*)_n$ et $(**)_n$, et (d) découle du choix de β et ξ.

Soient $\mathscr{E} \in V_\delta$, κ^*, ξ^* et y^* fournis par le One-Step Lemma. Par (e^*), y^* est une suite de longueur 1 et par (d^*) nous avons $\xi^* = c_0$. Nous convenons que τ dicte à *II* de commencer son $n^{\text{ème}}$ tour en jouant

$$\mathscr{E}_{2n} = \mathscr{E}, \quad \rho_{2n} = \kappa^*, \quad \text{et} \quad \langle \eta'_n \rangle = y^*.$$

Nous avons bien une chaîne alternée et $\text{crit}(\mathscr{E}_{2n}) = \rho_{2n-1}$ donc R1 et R2 sont respectées. Aussi, comme $\alpha_n = \eta < \kappa^* = \rho_{2n}$, R4 est suivie. En outre, du fait de notre choix pour ρ_{2n-1}, nous avons par (b^*) et (c^*) que

$(*)'_n$ $\quad (\rho_{2n}, c_0)\, \text{tp}_\delta^{\boldsymbol{M}_{2n+1}} \left(\langle \boldsymbol{j}_{0,2n+1}(T)\rangle^\frown r_{n+1}\right) = (\rho_{2n}, \beta_n)\, \text{tp}_\delta^{\boldsymbol{M}_{2n}} \left(\langle \boldsymbol{j}_{0,2n}(T)\rangle^\frown t_{n+1}\right);$

$(**)'_n$ $\quad \rho_{2n-1}$ est c_0-reflétant dans $\langle \boldsymbol{j}_{0,2n+1}(T)\rangle^\frown r_{n+1}$ relativement à δ dans $\boldsymbol{M}_{2n+1}$.

Il découle de $(*)'_n$ et du fait que I a suivi R6 jusque ici, que

$$\left(\langle m_k \mid k \le n\rangle, r_{n+1}\right) \in \boldsymbol{j}_{0,2n+1}(T),$$

et donc R7 est respectée. Finalement, le point (e^*) du One-Step Lemma nous assure que $\langle \eta'_n \rangle = y^*$ est définissable dans $V_{c_0+1} \cap \boldsymbol{M}_{2n+1}$ à partir d'éléments de δ, $\langle \boldsymbol{j}_{0,2n+1}(T)\rangle^\frown \boldsymbol{j}_{2n\dot{-}1,2n+1}(r_n)$ et d'éléments de $V_{\rho_{2n}+1} \cap \boldsymbol{M}_{2n+1}$. Or R8 a été suivie jusqu'à maintenant, et donc $\boldsymbol{j}_{2n\dot{-}1,2n+1}(r_n)$ est définissable dans $V_{c_2} \cap \boldsymbol{M}_{2n+1}$ à partir d'éléments de $(V_{\rho_{2n}} \cap \boldsymbol{M}_{2n+1}) \cup \{\delta, \boldsymbol{j}_{0,2n+1}(T), c_0\}$. Ainsi en jouant $\langle \eta'_{2n} \rangle = y^*$, *II* respecte la règle R8.

Nous avons utilisé sans la mentionner la propriété P1 des cardinaux $c_0 < c_1 < c_2$ fournis par le Lemme 7.2.1. Le fait qu'ils jouissent également des propriété P2 et P3 nous assure que $(*)'_n$ et $(**)'_n$ impliquent respectivement

$$(*)''_n \qquad (\rho_{2n}, c_1)\,\mathrm{tp}_\delta^{\boldsymbol{M}_{2n+1}}\left(\langle \boldsymbol{j}_{0,2n+1}(T)\rangle^\frown r_{n+1}\right) = (\rho_{2n}, \beta_n)\,\mathrm{tp}_\delta^{\boldsymbol{M}_{2n}}\left(\langle \boldsymbol{j}_{0,2n}(T)\rangle^\frown t_{n+1}\right);$$

$(**)''_n$ $\qquad$ ρ_{2n-1} est c_1-reflétant dans $\langle \boldsymbol{j}_{0,2n+1}(T)\rangle^\frown r_{n+1}$ relativement à δ dans $\boldsymbol{M}_{2n+1}$.

Pour $(*)''_n$ remarquer que nous avons bien que la suite $\langle \boldsymbol{j}_{0,2n+1}(T)\rangle^\frown r_{n+1}$ appartient à ${}^{<\omega}V_{\boldsymbol{j}_{0,2n+1}(\lambda)+1}$, car T est un arbre sur $\omega \times \lambda$, ainsi P3 s'applique. De la même façon, $(**)''_n$ découle de P2.

2ème étape. Nous décrivons à présent le $\mathscr{E}_{2n+1}$, le ρ_{2n+1} et le β_{n+1} que doit jouer *II*. Nous sommes en mesure d'appliquer une nouvelle fois le One-Step Lemma à $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_{2n+1}$, $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{M}_{2n}$, $\kappa = \rho_{2n}$, $\eta = \rho_{2n}$, $\beta = c_1$, $\beta' = \beta_n$, $\xi = c_0 + 1$, $x = \langle \boldsymbol{j}_{0,2n+1}(T)\rangle^\frown r_{n+1}$, $y = \emptyset$, $x' = \langle \boldsymbol{j}_{0,2n}(T)\rangle^\frown t_{n+1}$, et à $\phi(v)$ la formule « v est un ordinal successeur et $\exists w(\delta + v = w)$ ». En effet, (a) est vérifiée par le respect de R1 lors de la première partie du coup *II* que nous avons décrite. Les conditions $(*)''_n$ et $(**)''_n$ assure respectivement que (b) et (c) sont vérifiées. La condition (d) est remplie car $\xi = c_0 + 1 < c_2$ et $\delta + c_0 + 1 = c_0 + 1$.

Soient $\mathscr{E}$, κ^*, ξ^*, et y^* fournis par le One-Step Lemma. Nous avons par $(d*)$ que ξ^* est un ordinal successeur tel que $\delta + \xi^* < \delta + \boldsymbol{j}_{2n,2n+2}(\beta')$ et donc $\xi^* < \boldsymbol{j}_{2n,2n+2}(\beta')$. Nous avons par (e^*) que $y^* = \emptyset$.

Convenons que τ dicte à *II* de terminer son $n^{\text{ème}}$ tour en jouant

$$\mathscr{E}_{2n+1} = \mathscr{E}, \quad \rho_{2n+1} = \kappa^*, \quad \text{et} \quad \beta_{n+1} + 1 = \xi^*.$$

Comme précédemment, R1 est satisfaite, i.e. nous avons bien une chaîne alternée. Par définition $\mathrm{crit}(\mathscr{E}_{2n+1}) = \kappa = \rho_{2n}$, donc R2. est vérifiée. Comme $\rho_{2n} = \eta < \kappa^* = \rho_{2n+1}$, le coup de *II* suit R4. Puisque $\beta_{n+1} < \xi^* < \boldsymbol{j}_{2n,2n+2}(\beta') = \boldsymbol{j}_{2n,2n+2}(\beta_n)$, nous respectons R5. Ainsi toutes les règles sont respectées. En outre, par (b^*) et (c^*) du One-Step Lemma, nos hypothèses d'induction $(*)_{n+1}$ et $(**)_{n+1}$ sont vérifiées pour $n+1$. $\square$

Théorème 7.2.4. *S'il existe un cardinal de Woodin δ, et si T est un arbre δ^+-homogène sur $\omega \times \lambda$, alors ${}^\omega\omega - p[T]$ possède une représentation arborescente.*

Démonstration. Par le Lemme 7.2.3, il existe $\kappa < \delta$ tel que le joueur *II* possède une stratégie gagnante dans $\mathscr{G}_\kappa^T$. Pour un tel κ, nous considérons une stratégie τ gagnante pour le joueur *II*. Rappelons que comme T est homogène, nous avons en particulier que pour tout $s \in {}^{<\omega}\omega$, l'ensemble $T_s = \{t \in {}^{<\omega}\lambda \mid (s,t) \in T\}$ est non vide. Pour tout $(s,t) \in T$, nous considérons le début de partie de $\mathscr{G}_\kappa^T$ suivant. Le joueur *II* suit τ. Le joueur I, tenant compte du jeu de *II*, joue pour (s,t). Il joue donc

$m_k = s(k)$, $\eta_k = \boldsymbol{j}_{0,2k}(t(k))$, et $\alpha_k = \rho_{2k-1}$ déjà joué par *II*. Nous notons pour tout $(s,t) \in T$:

$$\mathscr{C}(s,t) = \langle (\mathscr{E}_k(s,t), \rho_k(s,t)) \mid k < 2\operatorname{long}(s)\rangle$$
$$\langle r_k(s,t) \mid k < \operatorname{long}(s)\rangle \quad \text{et} \quad \langle \beta_k(s,t) \mid k \leq \operatorname{long}(s)\rangle$$

la chaîne alternée et les deux suites d'ordinaux résultant de ce début de partie. Nous notons $\langle \boldsymbol{M}_k(s,t), \boldsymbol{j}_{k,l}(s,t) \mid k \preceq_{\text{alt}} l \leq 2\operatorname{long}(s)\rangle$ le système canonique associé à $\mathscr{C}(s,t)$.

Soit $\langle U_s \mid s \in {}^{<\omega}\omega\rangle$ attestant la δ^+-homogénéité de T. Pour $s \in {}^{<\omega}\omega$, observons le fait suivant. L'application $t \in T_s \mapsto \mathscr{C}(s,t) \in V_\delta$ a un codomaine de cardinalité δ car δ est en particulier fortement inaccessible. Or U_s est une mesure δ^+-complète sur T_s, et comme
$$T_s = \bigcup_{x\in\delta} \{t \in T_s \mid \mathscr{C}(t,s) = x\},$$
il découle de la propriété duale de la complétude d'un ultrafiltre (1.2.4) qu'il existe $x \in V_\delta$ tel que $\mathscr{C}(s,t) = x$ U_s-presque partout. De plus, par R8, les $r_k(s,t)$ sont définissables dans V_{c_2} à partir d'éléments de $V_\delta \cup \{\delta, c_0, T\}$. Ainsi, de la même façon, $t \in T_s \mapsto r_k(s,t)$ est constante U_s-presque partout. Nous notons pour tout $s \in {}^{<\omega}\omega$, $\mathscr{C}(s)$ et $\langle r_k(s) \mid k < \operatorname{long}(s)\rangle$ ces valeurs constantes et désignons par $X_s \in U_s$ un ensemble sur lequel ces valeurs sont toujours atteintes. Observons que par compatibilité des U_s, pour toutes suites $s_1, s_2 \in {}^{<\omega}\omega$ avec $s_1 \subseteq s_2$, nous avons

$$\mathscr{C}(s_1) = \mathscr{C}(s_2)\restriction 2\operatorname{long}(s_1) \quad \text{et} \quad \langle r_k(s_1) \mid k < \operatorname{long}(s_1)\rangle = \langle r_k(s_2) \mid k < \operatorname{long}(s_1)\rangle.$$

Nous notons pour tout $s \in {}^{<\omega}\omega$

$$\langle \boldsymbol{M}_k(s), \boldsymbol{j}_{k,l}(s) \mid k \preceq l \leq 2\operatorname{long}(s)\rangle$$

le système canonique associé à $\mathscr{C}(s)$.

Nous montrons que le système formé des branches paires des chaînes alternées

$$\langle \boldsymbol{M}_{2\operatorname{long}(s_1)}(s_1), \boldsymbol{j}_{2\operatorname{long}(s_1), 2\operatorname{long}(s_2)(s_2)} \mid s_1, s_2 \in {}^{<\omega}\omega \wedge s_1 \subseteq s_2\rangle$$

est une représentation arborescente pour ${}^{\omega}\omega - p[T]$. Il nous reste à montrer la propriété (c) de la définition 3.4.3.

Pour $x \in {}^{\omega}\omega$, notons $\mathscr{C} = \langle (\mathscr{E}_n, \rho_n) \mid n \in \omega\rangle$ la chaîne alternée de longueur ω telle que $\mathscr{C}\restriction 2n = \mathscr{C}(x\restriction n)$. Notons $\langle \boldsymbol{M}_m, \boldsymbol{j}_{m,n} \mid m \preceq_{\text{alt}} n \in \omega\rangle$ son système canonique associé. Nous montrons les deux faits suivants

$$1.\ x \in p[T] \Rightarrow \boldsymbol{M}_{\text{Pair}} \text{ mal fondée} \quad \text{et} \quad 2.\ x \notin p[T] \Rightarrow \boldsymbol{M}_{\text{Pair}} \text{ bien fondée.}$$

1. Supposons donc que $x \in p[T]$. Considérons la suite $\langle X_{x\restriction n} \mid n \in \omega\rangle$, où $X_{x\restriction n} \in U_{x\restriction n}$ réalise la valeur constante $\mathscr{C}(x\restriction n)$. Il existe par le Lemme 3.1.3 une fonction $f : \omega \to \lambda$ telle que $f\restriction n \in X_{x\restriction n}$ pour tout $n \in \omega$. Pour tout $n \in \omega$, posons $\beta_n = \beta_n(x\restriction n, f\restriction n)$. Par la règle R5, et comme

$$\boldsymbol{j}_{2n,2n+2} = \boldsymbol{j}_{2n,2n+2}(x\restriction n) = \boldsymbol{j}_{2n,2n+2}(x\restriction n, f\restriction n),$$

nous avons

$$\beta_{n+1} < \boldsymbol{j}_{2n,2n+2}(\beta_n).$$

Par conséquent, la suite $\langle \boldsymbol{j}_{2n,\mathrm{Pair}}(\beta_n) \mid n \in \omega\rangle$ est descendante dans $\boldsymbol{M}_{\mathrm{Pair}}$. La limite directe $\boldsymbol{M}_{\mathrm{Pair}}$ est donc mal fondée.

2. Supposons maintenant que $x \notin p[T]$. Notons pour tout $n \in \omega$ $r_n = r_n(x \restriction n)$. Par la règle R7, $r_{n+1} \in \boldsymbol{j}_{0,2n+1}(T)$ pour tout $n \in \omega$. Or l'arbre $T(x) = \{t \in {}^{<\omega}\lambda \mid (x \restriction t, t) \in T\}$ est bien fondé. Posons donc pour tout $n \in \omega$

$$\gamma_n = \mathrm{rang}_{\boldsymbol{j}_{0,2n+1}(T)}(r_{n+1}).$$

Comme $\boldsymbol{j}_{2n+1,2n+3}(r_{n+1}) \subsetneq r_{n+2}$, nous avons $\boldsymbol{j}_{2n+1,2n+3}(\gamma_n) < \gamma_{n+1}$. Par conséquent, la suite $\xi_{2n+1} = \gamma_n$ nous assure par le Lemme 5.2.3 que $\boldsymbol{M}_{\mathrm{Pair}}$ est bien fondée. □

Théorème 7.2.5. *Si δ est un cardinal de Woodin et si T est un arbre δ^+-homogène sur $\omega \times \lambda$, alors l'arbre T^* défini à partir de T avant le Lemme 3.4.1 est α-homogène pour tout $\alpha < \delta$.*

Démonstration. Soit $\langle U_s \mid s \in {}^{<\omega}\omega\rangle$ attestant que T est δ^+-homogène. Pour tout $\alpha < \delta$, il existe par le Lemme 7.2.3 un $\alpha < \kappa < \delta$ tel que *II* possède une stratégie gagnante dans $\mathscr{G}^T_\kappa$. Pour un tel κ et une stratégie gagnante τ pour *II* dans $\mathscr{G}^T_\kappa$, nous notons comme dans le Théorème 7.2.4,

$$\mathscr{C}(s) = \langle (\mathscr{E}_k(s), \rho_k(s)) \mid k \leq 2\,\mathrm{long}(s)\rangle$$

la chaîne alternée résultant des coups de *II* prévus par τ pour U_s-presque toute partie où *I* a joué pour $(s,t) \in T$. Nous notons son système canonique associé

$$\langle \boldsymbol{M}_m(s), \boldsymbol{j}_{m,n}(s) \mid m \preceq_{\mathrm{alt}} n \leq 2\,\mathrm{long}(s)\rangle.$$

Pour tout $(s,t) \in T$, nous considérons également la suite

$$\langle \beta_k(s,t) \mid k \leq \mathrm{long}(s)\rangle$$

des β joués par *II* selon τ quand *I* joue pour (s,t).

Pour toute suite $s \in {}^{<\omega}\omega$ et tout $k < \mathrm{long}(s)$, nous définissons une fonction $F^s_k : T_{s\restriction k} \to \boldsymbol{ON}$ par

$$F^s_k(t) = \beta_k(s \restriction k, t), \quad \text{pour tout } t \in T_{s\restriction k},$$

et notons $e_k(s) = [F^k_s]_{U_{s\restriction k}}$ l'ordinal représenté par F^s_k dans $\mathbf{Ult}(V, U_{s\restriction k})$. Nous allons considérer les ordinaux $e_k(s)$ comme des membres de $\boldsymbol{M}_{2k}(s)$. Pour tout $s \in {}^{<\omega}\omega$, nous définissons alors à la manière du Lemme 5.2.1 (2), un ultrafiltre U^*_s par

$$X \in U^*_s \quad \longleftrightarrow \quad \langle \boldsymbol{j}_{2k,2\,\mathrm{long}(s)}(s)\big(e_k(s)\big) \mid k < \mathrm{long}(s)\rangle \in \boldsymbol{j}_{0,2\,\mathrm{long}(s)}(s)(X).$$

Nous allons montrer que pour chaque $s \in {}^{<\omega}\omega$, nous avons $T^*_s \in U^*_s$ et que U^*_s est donc essentiellement un ultrafiltre sur T^*_s. Mais observons d'abord que chaque U^*_s est κ-complet, car par les règle R2 et R4 du jeu $\mathscr{G}^T_\kappa$, tous les points critiques de chaque

$\boldsymbol{j}_{0,n}(s)$ est supérieur à κ. Par conséquent, chaque U_s^* est α-complet. De plus, les U_s^* sont compatibles car pour tout $s_1 \subseteq s_2$, nous avons

$$\begin{aligned}
\{f \mid f \restriction \operatorname{long}(s_1) \in X\} \in U_{s_2}^* &\longleftrightarrow \langle \boldsymbol{j}_{2k,2\operatorname{long}(s_2)}(s_2)\big(e_k(s_2)\big) \mid k < \operatorname{long}(s_1)\rangle \in \boldsymbol{j}_{0,2\operatorname{long}(s_2)}(s_2)(X)\\
&\longleftrightarrow \langle \boldsymbol{j}_{2k,2\operatorname{long}(s_1)}(s_2)\big(e_k(s_2)\big) \mid k < \operatorname{long}(s_1)\rangle \in \boldsymbol{j}_{0,2\operatorname{long}(s_1)}(s_2)(X)\\
&\longleftrightarrow \langle \boldsymbol{j}_{2k,2\operatorname{long}(s_1)}(s_1)\big(e_k(s_1)\big) \mid k < \operatorname{long}(s_1)\rangle \in \boldsymbol{j}_{0,2\operatorname{long}(s_1)}(s_1)(X)\\
&\longleftrightarrow X \in U_{s_1}^*.
\end{aligned}$$

En outre, par le Théorème 7.2.4, si $x \in {}^{\omega}\omega - p[T]$, alors la limite directe $\boldsymbol{M}_{\mathrm{Pair}}(x)$ le long de la branche paire de la chaîne alternée $\bigcup_{n\in\omega} \mathscr{C}(x\restriction n)$ est bien fondée. Par le Lemme 5.2.1, l'ultrapuissance $\mathbf{Ult}(V, \mathscr{U}_x^*)$ du système inductif d'ultrafiltres $\mathscr{U}_x^* = \langle U_{x\restriction n}^* \mid n \in \omega\rangle$ est donc également bien fondée. Ainsi,

$$x \in p[T^*] \quad \to \quad x \in {}^{\omega}\omega - p[T] \quad \to \quad \mathbf{Ult}(V, \mathscr{U}_x^*) \text{ bien fondée.}$$

Nous représentons les suites d'injections élémentaires en jeu de la façon suivante.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{Ult}(V, U_{s\restriction 1}^*) \arrow[r, "\boldsymbol{i}_{1,2}^*"] \arrow[d, dotted] & \mathbf{Ult}(V, U_{s\restriction 2}^*) \arrow[d, dotted] & \cdots & \mathbf{Ult}(V, \mathscr{U}_x^*) \arrow[d, dotted] \\
 & e_1(s) \in \boldsymbol{M}_2(s) \arrow[r, "\boldsymbol{j}_{2,3}"'] & e_2(s) \in \boldsymbol{M}_4(s) & \cdots & \boldsymbol{M}_{\mathrm{Pair}}(x) \\
\boldsymbol{M}_0 = V \arrow[uur, bend left, "\boldsymbol{i}_{0,1}^*"] \arrow[ur, bend left, "\boldsymbol{j}_{0,2}"'] \arrow[r, "\boldsymbol{i}_{0,1}"'] & \mathbf{Ult}(V, U_{s\restriction 1}) \arrow[r, "\boldsymbol{i}_{1,2}"'] & \mathbf{Ult}(V, U_{s\restriction 2}) & \cdots & \mathbf{Ult}(V, \mathscr{U}_x)
\end{tikzcd}$$

Comme annoncé, il nous reste à montrer que pour tout $s \in {}^{<\omega}\omega$, nous avons bien $T_s^* \in U_s^*$. Fixons donc une suite $s \in {}^{<\omega}\omega$ arbitraire et allégeons nos notations en convenant que $e_k(s) = e_k$ et $\boldsymbol{j}_{m,n}(s) = \boldsymbol{j}_{m,n}$. Notons de plus pour tous $m \leq n < \operatorname{long}(s)$ $\boldsymbol{i}_{m,n} : \mathbf{Ult}(V, U_{s\restriction m}) \to \mathbf{Ult}(V, U_{s\restriction n})$ les injections élémentaires associées à l'arbre δ^+-homogène T.

Nous devons montrer par définition de T^* que

$$\Big\{u \in {}^{\operatorname{long}(s)}\boldsymbol{ON} \mid \forall k\big(k+1 < \operatorname{long}(s) \to u(k+1) < \boldsymbol{i}_{k,k+1}(z(k))\big)\Big\} \in U_s^*.$$

Ce qui est équivalent par définition de U_s^* à

$$\forall k+1 < \operatorname{long}(s)\Big(\boldsymbol{j}_{2k+2,2\operatorname{long}(s)}(e_{k+1}) < \big(\boldsymbol{j}_{0,2\operatorname{long}(s)}(\boldsymbol{i}_{k,k+1})\big)(\boldsymbol{j}_{2k,2\operatorname{long}(s)}(e_k))\Big).$$

Fixons alors $k+1 < \operatorname{long}(s)$. Nous devons voir que

$$\boldsymbol{j}_{2k+2,2\operatorname{long}(s)}(e_{k+1}) < \big(\boldsymbol{j}_{0,2\operatorname{long}(s)}(\boldsymbol{i}_{k,k+1})\big)(\boldsymbol{j}_{2k,2\operatorname{long}(s)}(e_k)).$$

Ceci équivaut, par élémentarité de $\boldsymbol{j}_{2k+2,2\operatorname{long}(s)}$, à

$$e_{k+1} < \big(\boldsymbol{j}_{0,2k+2}(\boldsymbol{i}_{k,k+1})\big)(\boldsymbol{j}_{2k,2k+2}(e_k)).$$

Or le Lemme 5.3.1 s'applique à $U_{s\restriction k}$ et $U_{s\restriction k+1}$, $p = \pi_{s\restriction k+1, s\restriction k} : T_{s\restriction k+1} \to T_{s\restriction k}$, $t \mapsto t\restriction k$, et la chaîne alternée $\mathscr{C}(s)$. En effet, $U_{s\restriction k}$ et $U_{s\restriction k+1}$ sont δ^+-complets, $\mathscr{C}(s) \in V_\delta$ et $p = \pi_{s\restriction k, s\restriction k+1}$ satisfait les hypothèses du Lemme 5.3.1 par compatibilité des U_s. La dernière assertion de (1) du Lemme 5.3.1, nous assure donc que $\boldsymbol{j}_{0,2k+2}(\boldsymbol{i}_{k,k+1}) = \boldsymbol{i}_{k,k+1}\restriction \boldsymbol{i}_{0,k}(\boldsymbol{M}_{2k+2})$. Ainsi ce que nous devons montrer se réduit à

$$e_{k+1} < \boldsymbol{i}_{k,k+1}(\boldsymbol{j}_{2k,2k+2}(e_k)).$$

Par ailleurs, la règle R5 du jeu $\mathscr{G}_\kappa^T$ atteste que $\beta_{k+1}(s,t) < \boldsymbol{j}_{2k,2k+2}(\beta_k(s,t))$ pour tout $t \in T_s$ et donc

$$\beta_{k+1}(s\restriction k+1, t) < \boldsymbol{j}_{2k,2k+2}(\beta_k(s\restriction k, t\restriction k)) \quad \text{pour tout } t \in T_{s\restriction k+1}.$$

Ainsi par définition des F_k^s, nous avons

$$F_{k+1}^s(t) < \boldsymbol{j}_{2k,2k+2}\big(F_k^s(t\restriction k)\big) \quad \text{pour tout } t \in T_{s\restriction k+1},$$

ce qui équivaut à

$$[F_{k+1}^s]_{U_{s\restriction k+1}} < \boldsymbol{i}_{k,k+1}\big([\boldsymbol{j}_{2k,2k+2} \circ F_k^s]_{U_{s\restriction k}}\big).$$

Par l'isomorphisme $\boldsymbol{f}_n$ défini dans la démonstration du Lemme 5.3.1, nous avons

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{j}_{2k,2k+2} \circ F_k^s]_{U_{s\restriction k}} &= \big[\widetilde{\boldsymbol{j}_{2k,2k+2}(F_k^s)} \circ \boldsymbol{j}_{0,2k+2}\big]_{U_{s\restriction k}} \\
&= \big[\boldsymbol{j}_{2k,2k+2}(F_k^s)\big]^{\boldsymbol{M}_{2k+2}}_{\boldsymbol{j}_{0,2k+2}(U_{s\restriction k})} \\
&= \boldsymbol{i}_{0,k}(\boldsymbol{j}_{2k,2k+2})\big([F_k^s \circ \boldsymbol{j}_{0,2k}]^{\boldsymbol{M}_{2k}}_{\boldsymbol{j}_{0,2k}(U_{s\restriction k})}\big) \\
&= \boldsymbol{i}_{0,k}(\boldsymbol{j}_{2k,2k+2})\big([F_k^s]_{U_{s\restriction k}}\big)
\end{aligned}$$

où $\widetilde{\boldsymbol{j}_{2k,2k+2}(F_k^s)} : \boldsymbol{j}_{0,2k+2}(T_{s\restriction k}) \to \boldsymbol{M}_{2k+2}$, $\boldsymbol{j}_{0,2k+2}(x) \mapsto \big(\boldsymbol{j}_{2k,2k+2}(F_k^s)\big)(x)$.

Ainsi, en utilisant aussi la définition des e_k, nous avons

$$e_{k+1} < \boldsymbol{i}_{k,k+1}\big(\boldsymbol{i}_{0,k}(\boldsymbol{j}_{2k,2k+2})(e_k)\big).$$

Or par le point (2) du Lemme 5.3.1 $\boldsymbol{i}_{0,k}(\boldsymbol{j}_{2k,2k+2})\restriction \boldsymbol{ON} = \boldsymbol{j}_{2k,2k+2}\restriction \boldsymbol{ON}$, et nous avons donc finalement

$$e_{k+1} < \boldsymbol{i}_{k,k+1}\big(\boldsymbol{j}_{2k,2k+2}(e_k)\big).$$

« Puisque ceci est justement ce que nous essayons de montrer, la démonstration est complète » [1]. □

7.3 Le théorème

Nous énonçons à présent le théorème principal de l'article [MS89]. Au sujet de la démonstration de ce résultat, Martin et Steel nous disent le fait suivant.

1. « Since this is just what we are trying to show, the proof is complete », [MS89] pp. 115, 125.

> There is a theorem simpler than the Main Theorem, giving that T^* is under certain condition η-homogenous for certain η. In §5 we shall first present the proof of this simpler theorem, since all ideas needed for the Main Theorem's proof appear in a more easily digested form in the proof of the simpler theorem. [MS89], p. 89.

Ce théorème plus simple est précisément notre Théorème 7.2.5. Nous nous contentons donc d'énoncer le théorème principal et d'en conclure le corollaire qui s'impose.

Théorème 7.3.1 (Martin et Steel)**.** *Si δ est un cardinal de Woodin et si T est un arbre δ^+-homogène sur $(\omega\times\omega)\times\lambda$, alors l'arbre $\widetilde{T}$ défini à partir de T avant le Lemme 3.4.2 est α-homogène pour tout $\alpha<\delta$.*

Corollaire 7.3.2. *Pour tout $n\in\omega$, s'il existe n cardinaux de Woodin et un cardinal mesurable au dessus d'eux, alors les ensembles $\mathbf{\Pi}^1_{n+1}$ sont déterminés.*

Démonstration. Soient $\delta_1<\delta_2<\ldots<\delta_n$ des cardinaux de Woodin et $\mu>\delta_n$ un cardinal mesurable. Désignons ω par δ_0. Pour chaque $i<n$, choisissons un cardinal α_i avec $\delta_i<\alpha_i<\delta_{i+1}$ et nous posons $\alpha_n=\mu$. Par induction sur $0\le i\le n$, nous montrons que tout ensemble $\mathbf{\Pi}^1_{i+1}$ est α_{n-i}-homogènement Souslin.

Base de l'induction. Par le Théorème 3.2.1, tout ensemble $\mathbf{\Pi}^1_1$ est μ-homogènement Souslin, et $\mu=\alpha_{n-0}=\alpha_n$.

Étape d'induction. Supposons pour $0\le i<n$ que tout ensemble $\mathbf{\Pi}^1_{i+1}$ est α_{n-i}-homogènement Souslin et soit $A\subseteq{}^\omega\omega$ un ensemble $\mathbf{\Pi}^1_{i+2}$. Il existe un $\mathbf{\Pi}^1_{i+1}$ $B\subseteq{}^\omega\omega\times{}^\omega\omega$ avec $A=\{x\mid\forall y(x,y)\notin B\}$. Par hypothèse d'induction, il existe un arbre α_{n-i}-homogène T sur $(\omega\times\omega)\times\lambda$, assurant que B est α_{n-i}-homogènement Souslin. Par le Théorème 7.3.1, l'arbre $\widetilde{T}$ défini à partir de T est $\alpha_{n-(i+1)}$-homogène. Par le Lemme 3.4.2, $p[\widetilde{T}]=A$ et par conséquent A est $\alpha_{n-(i+1)}$-homogènement Souslin.

Étape finale. Pour $i=n$, nous avons que les ensembles $\mathbf{\Pi}^1_{n+1}$ sont α_0-homogènement Souslin. Par le Théorème 3.3.1, ils sont déterminés. □

Martin et Steel nous font remarquer que la combinaison du Théorème 3.3.1 et de leur théorème principal avec un résultat de H. Woodin permet d'obtenir la détermination de $L(\mathbb{R})$ où $\mathbb{R}={}^\omega\omega$.

Théorème 7.3.3 (Woodin)**.** *Supposons qu'il existe une infinité de cardinaux de Woodin et un cardinal mesurable au-dessus d'eux. Alors tout ensemble de réels dans $L(\mathbb{R})$ est de la forme $\{x\mid\forall y(x,y)\notin p[T]\}$ pour un arbre δ^+-homogène sur $(\omega\times\omega)\times Z$ pour un ensemble Z et un cardinal de Woodin δ.*

Démonstration. Voir [Woo88], ou [Kan94] p. 464. □

Corollaire 7.3.4. *S'il existe une infinité de cardinaux de Woodin avec un mesurable au-dessus d'eux, alors tout ensemble de réels dans $L(\mathbb{R})$ est déterminé, i.e. l'axiome de détermination est satisfait dans $L(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Toute stratégie est codée par un réel qui appartient donc à $L(\mathbb{R})$. De plus, la propriété d'être une stratégie gagnante pour un jeu $G(\omega,X)$ pour $X\in L(\mathbb{R})$ est absolue pour $L(\mathbb{R})$. □

Notes. Ce chapitre est exclusivement basé sur [MS89].

Conclusion

Il est temps de mettre un point final à ce travail. Toutefois, le terme conclusion ne me semble pas convenir à ce paragraphe final. Si les arguments mathématiques s'imposent par leur précision, la nature des objets qu'ils évoquent affirme son caractère insaisissable. La richesse et la précision du langage de la théorie des ensembles font de ce fragment du langage naturel un cadre fascinant. L'acceptation de l'incomplétude de nos hypothèses sur l'univers des ensembles me renvoie à l'idée de faire face à notre condition humaine. La démarche d'exploration des façons de compléter notre vision de cet objet mathématique par excellence me renvoie à l'idée de faire progresser ce que nous sommes.

Annexe A

Détermination

A.1 Jeux de Gale-Stewart

Soit A un ensemble non vide et $X \subseteq {}^{\omega}A$. Le **jeu de Gale-Stewart** $G(A,X)$ est un jeu infini à deux joueurs, à information parfaite. À tour de rôle, les deux joueurs I et II choisissent, en commençant par I, des éléments de A. Le jeu à une durée infinie ω.

$$\begin{array}{lccccccccccc}
I: & a_0 & & & & a_2 & & & & a_4 & & \\
 & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \cdots \\
II: & & & a_1 & & & & a_3 & & & & a_5
\end{array}$$

Une **partie** est donc une suite $a = (a_0, a_1, a_2, \ldots) \in {}^{\omega}A$. Le joueur I **gagne** la partie a si et seulement si $a \in A$. Réciproquement, II **gagne** la partie a si et seulement si I ne gagne pas, i.e. si $a \notin X$.

Une **stratégie gagnante** pour I est une fonction $f : {}^{<\omega}A \to A$ telle que si $x \in {}^{\omega}A$ vérifie $x_{2n} = f(x \restriction 2n)$ pour tout $n \in \omega$, alors $x \in X$. Une stratégie gagnante pour I est définie de façon similaire. L'existence d'une stratégie gagnante pour I peut être vue comme la formule infinie

$$\Phi_I = \exists x_0 \forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 \ldots \exists x_{2n} \forall x_{2n+1} \cdots \quad (x_0, x_1, \ldots) \in X.$$

De la même façon, l'existence d'une stratégie gagnante pour II correspond à la formule

$$\Phi_{II} = \forall x_0 \exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \ldots \forall x_{2n} \exists x_{2n+1} \cdots \quad (x_0, x_1, \ldots) \notin X.$$

Le jeu $G(A,X)$ est **déterminé** s'il existe une stratégie gagnante pour l'un des deux joueurs. Le jeu est donc déterminé si la « formule » $\Phi_I \vee \Phi_{II}$ est vraie. Cette formule est un analogue infini de la combinaison d'une des loi de De Morgan et de la loi du tiers exclu.

A.2 L'espace topologique des suites infinies

Étant donné un ensemble non vide A, mettons sur A la topologie discrète, puis sur ${}^{\omega}A$ la topologie produit dont les ouverts de base sont les ensembles de la forme $\{x \in {}^{\omega}A \mid s \subseteq x\}$ pour $s \in {}^{<\omega}A$. Cet espace topologique est un **espace Polonais**, c'est-à-dire qu'il est complètement métrisable et si A est dénombrable il est séparable. Il est de plus zéro-dimensionnel, car les ouverts de base sont également fermés. L'exemple qui nous intéresse tout particulièrement est celui où $A = \omega$. L'espace topologique ${}^{\omega}\omega$ est appelé l'espace de Baire. Il est homéomorphe à l'espace topologique des nombres irrationnels munis de la topologie induite de la topologie usuelle sur les réels. De plus, par un théorème de Alexandrov et Urysohn (voir [Kec95] p.37) l'espace de Baire est à homéomorphisme près l'unique espace Polonais zéro-dimensionnel dont tous les compacts sont d'intérieur vide.

Gale et Stewart ont montré en 1953 le premier résultat de détermination au sujet des jeux qui portent leur nom. Ce résultat est un théorème de ZFC, il est d'ailleurs équivalent dans ZF à l'axiome du choix.

Théorème A.2.1 (Gale et Stewart, 1953)**.** *Soit $X \subseteq {}^{\omega}A$ un ensemble fermé. Alors le jeu $G(A, X)$ est déterminé.*

Démonstration. Voir [Kec95], p. 138. □

Ces deux auteurs ont montré dans le même article que l'axiome du choix implique l'existence d'un ensemble non déterminé. Au sujet de cette preuve, Y.N. Moschovakis fait la remarque suivante dans [Mos09] p.222.

> The proof of course depends on a blatant application of the axiom of choice. No one has been able to prove without the axiom of choice that there exist non determined games on ω or 2 ; neither has anyone defined a specific set $A \subseteq {}^{\omega}2$ or $A \subseteq {}^{\omega}\omega$ and then proved in ZFC that A is not determined.

Ensuite, un sous-ensemble d'un espace topologique est borélien si par définition, il appartient à la clôture par complémentation et union dénombrable des ensembles fermés. Donald A. Martin montre en 1975 que ZFC implique la détermination des ensembles boréliens.

Théorème A.2.2 (Martin, 1975)**.** *Soit $X \subseteq {}^{\omega}A$ un ensemble borélien. Alors $G(\omega, X)$ est déterminé.*

Démonstration. Voir [Kec95], p. 140. □

L'importance de la détermination vient principalement du fait qu'elle implique des propriétés de régularités. De manière générale, nous avons le résultat suivant dans ZF.

Théorème A.2.3 (Mycielski-Swierczkowski ; Mazur, Banach ; Davis)**.** *Supposons AD, i.e. pour tout ensemble de réels $X \subseteq {}^{\omega}\omega$ le jeu $G(\omega, X)$ est déterminé. Alors tout ensemble de réels est Lebesgue mesurable, possède la propriété de Baire, et possède la propriété de l'ensemble parfait.*

Démonstration. Voir [Kan94] p. 377, [Jec03] p.629. □

Une analyse de la démonstration de ce résultat permet de voir que la possession de ces propriétés de régularité par les boréliens sont une conséquence de la détermination de cette classe d'ensemble (voir [Kec95] p.149).

Les ensembles boréliens ne sont pas les seuls ensembles définissables d'un espace topologique. Au delà des boréliens, nous avons les ensembles projectifs qui forment la clôture par image de fonction continue et complémentation des ensembles fermés. Les ensembles projectifs admettent une hiérarchie de hauteur ω. Nous définissons simultanément pour tout produit fini $X = {}^k({}^\omega\omega)$ les classes d'ensembles suivantes. La classe $\mathbf{\Pi}^1_0$ désigne les fermés de X, ensuite par récurrence sur $n \in \omega$

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{\Sigma}^1_{n+1} & = & \left\{pA \,\middle|\, A \in \mathbf{\Pi}^1_n(X \times {}^\omega\omega)\right\} \\ \mathbf{\Pi}^1_{n+1} & = & \left\{X - A \,\middle|\, A \in \mathbf{\Sigma}^1_{n+1}(X)\right\} \\ \mathbf{\Delta}^1_n & = & \mathbf{\Pi}^1_n \cap \mathbf{\Sigma}^1_n \end{array}$$

où $\mathbf{\Pi}^1_n(X)$, $\mathbf{\Sigma}^1_n(X)$, $\mathbf{\Delta}^1_n(X)$ dénotent respectivement la classe des sous-ensembles $\mathbf{\Pi}^1_n$, $\mathbf{\Sigma}^1_n$, $\mathbf{\Delta}^1_n$ de X et $pA = \{x \in X \mid \exists y(x,y) \in A\}$. Les ensembles de la classe $\mathbf{\Sigma}^1_1$ sont appelés analytiques et ceux de la classe $\mathbf{\Pi}^1_1$ sont appelés co-analytiques. Les boréliens de l'espace de Baire sont exactement les ensembles appartenant à $\mathbf{\Delta}^1_1({}^\omega\omega)$ (voir [Kec95] p. 88).

Le théorème suivant montre dans un certain sens que le Théorème A.2.2 est optimal dans le cadre de la théorie ZFC, dans la mesure où la détermination des ensembles $\mathbf{\Sigma}^1_1$ est déjà équivalente à une hypothèse de grand cardinal.

Théorème A.2.4. *La détermination de tous les ensembles de réels $\mathbf{\Sigma}^1_1$ est équivalente à l'énoncé : pour tout réel $a \in {}^\omega\omega$ $a^\sharp$ existe.*

Démonstration. La preuve de la détermination analytique est due à D. A Martin, voir [Mar70]. La nécessité de l'existence des $a^\sharp$ est un résultat de Harrington, voir [Har78]. □

Par ailleurs, une analyse de la démonstration du Théorème A.2.3 mène au résultat suivant.

Théorème A.2.5 (Kechris, Martin)**.** *La détermination de tous les ensembles de réels $\mathbf{\Pi}^1_n$ implique que tout ensemble $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$ est Lebesgue mesurable, possède la propriété de Baire, et possède la propriété de l'ensemble parfait.*

Démonstration. Voir [Kan94] p. 380. □

Annexe B

Énumerer les suites finies d'entiers

Aux sections 3.2 et 3.4, nous utilisons une énumération des suites finies d'entiers. Dans chaque cas, nous avons d'une énumération possédant une propriété particulière. Nous montrons qu'il existe une énumération $\{u_n \mid n \in \omega\}$ de l'ensemble ${}^{<\omega}\omega$ des suites finies de nombres naturels satisfaisant les deux propriétés suivantes :

a) pour tout $n \in \omega$, $\text{long}(u_n) \leq n$;

b) pour tous $m, n \in \omega$,
$$u_m \subsetneq u_n \to m < n.$$

Une telle énumération peut par exemple se construire comme suit. Soit $\{p_n \mid n \in \omega\}$ l'énumération croissante de tous les nombres premiers. Définissons $\varphi : {}^{<\omega}\omega \to \omega$ par

$$\begin{aligned}\varphi(\emptyset) &= 0\\ \varphi(a_0, \ldots, a_n) &= \prod_{i=0}^{n} p_i^{a_i+1}.\end{aligned}$$

Cette fonction est injective. Elle vérifie de plus $\text{long}(s) \leq \varphi(s)$ pour toute suite $s \in {}^{<\omega}\omega$ et $\varphi(s) < \varphi(t)$ pour toutes suites telles que $s \subsetneq t$. Nous définissons alors une bijection $\sigma : \text{Im}(\varphi) \to \omega$ par

$$\sigma(\varphi(s)) = \left|\{t \in {}^{<\omega}\omega \mid \varphi(t) < \varphi(s)\}\right|$$

La bijection $\psi = \sigma \circ \varphi$ vérifie donc pour toute suite s

$$\psi(s) = \left|\{t \in {}^{<\omega}\omega \mid \varphi(t) < \varphi(s)\}\right| \geq \left|\{s{\restriction}k \mid 0 \leq k < \text{long}(s)\}\right| = \text{long}(s).$$

De plus, si $s \subsetneq t$, alors $\varphi(s) < \varphi(t)$ implique $\psi(s) < \psi(t)$. Nous pouvons donc poser $u_n = \psi^{-1}(n)$.

Bibliographie

[AB02] Corinne Atlan et Zéno Bianu : *HAIKU, Anthologie du poème court japonais*. Nrf. Poésie/Gallimard, Paris, 2002.

[Deh89] Patrick Dehornoy : La détermination projective. *Séminaire Nicolas Bourbaki*, pages 261–276, 1988-1989.

[Har78] L. A. Harrington : Analytic determinacy and $0^{\#}$. *The Journal of Symbolic Logic*, 43(4):685 – 693, 1978. 101

[Jec03] Thomas Jech : *Set theory : The third millenium edition, revised and expanded*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003. vii, 14, 101

[Kan94] Akihiro Kanamori : *The higher infinite. Large cardinals in set theory from their beginnings*. Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag, Berlin, 1994. 7, 14, 18, 30, 81, 94, 101

[Kan96] Akihiro Kanamori : The mathematical development of set theory from cantor to cohen. *The Bulletin of Symbolic Logic*, 2(1):1–71, 1996.

[Kec95] Alexander S. Kechris : *Classical descriptive set theory*. Springer-Verlag, New York, 1995. 100, 101

[Kun80] Kenneth Kunen : *Set theory : an introduction to independence proofs / Kenneth Kunen*. North-Holland Pub. Co. ; sole distributors for the U.S.A. and Canada, Elsevier North-Holland, Amsterdam ; New York : New York :, 1980. vii, 17, 21, 30

[Mar70] D. A. Martin : Measurable cardinals and analytic games. *Fundamenta Mathematicae*, (66):287–291, 1970. 101

[Mos09] Y.N. Moschovakis : *Descriptive set theory*. Amer Mathematical Society, 2009. 100

[MS89] Donald A. Martin et John R. Steel : A proof of projective determinacy. *J. Amer. Math. Soc.*, 2(1):71–125, 1989. i, vii, 30, 38, 40, 42, 50, 52, 59, 66, 71, 81, 93, 94, 95

[Woo88] W.H. Woodin : Supercompact cardinals, sets of reals, and weakly homogeneous trees. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 85(18):6587, 1988. i, 94