Informatique Quantique

Frédéric Magniez

Cours 3:
Algorithme de Grover
Applications et limitations

Circuit réversible

- Un circuit logique est réversible s'il n'utilise que des portes réversibles
- Un circuit réversible est aussi un circuit quantique
  (car il permute les éléments de la base classique)

Notation : $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^m$

$f_\oplus : \{0,1\}^{n+m} \to \{0,1\}^{n+m}$ $\quad f_\oplus(x,y) = (x, y \oplus f(x))$

Théorème

- Toute fonction F calculable par un circuit logique de taille L est aussi calculable par un circuit réversible de taille $O(L)$

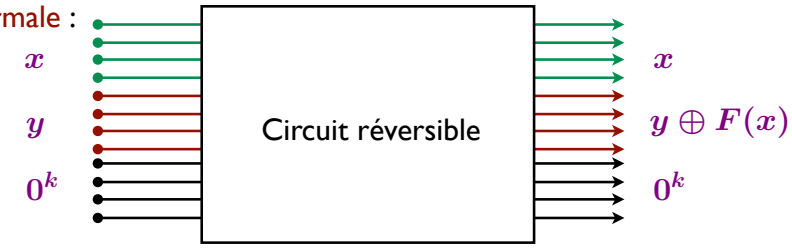
  porte f ➡ porte réversible $f_\oplus$ + c-NOT

Remarque

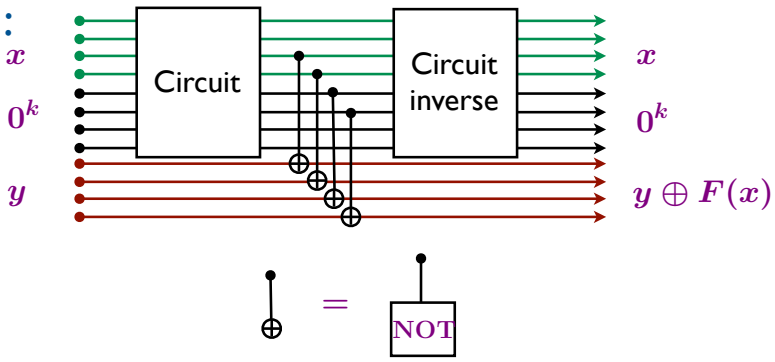
- La porte Toffoli (c-c-NOT) est universelle pour le calcul réversible

Théorème

- Dans le théorème précédent on peut demander que le circuit calcule $F_\oplus$ et que les bits auxiliaires reviennent à 0, *i.e.* que le circuit soit en forme normale :



Preuve :



Corollaire

- Si *F* a une complexité classique *L* alors sa complexité quantique est en *O*(*L*)
- *F* et c-*F* ont des complexités classiques (resp. quantiques) équivalentes

Théorème

- La porte Toffoli (avec la porte NOT pour générer des bits à 1) est universelle pour le calcul réversible

$$T(a,b,c) = (a,b,c \oplus (a \wedge b))$$

- La porte Toffoli (avec NOT...) et la porte de Hadamard sont universelles pour le calcul quantique (avec amplitudes réelles)
- La porte c-NOT et la porte $\sqrt{\text{H}}$ (avec NOT...) sont universelles pour le calcul quantique

Exercice

- Montrer comment implémenter $S_F|x\rangle = (-1)^{F(x)}|x\rangle$, lorsque F est à valeurs booléennes, en utilisant $U_F|x,y\rangle = |F_\oplus(x,y)\rangle = |x, y \oplus F(x)\rangle$

Théorème

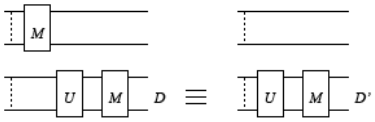
- Une fonction calculable par un circuit avec des mesures intermédiaires l'est aussi par un circuit comparable avec uniquement une mesure à la fin.

Exercice

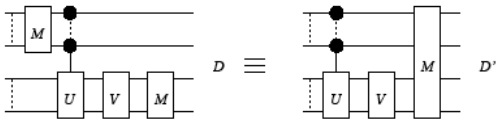
- Montrer le théorème pour les cas suivants :

  Faire un raisonnement à l'aide de matrices densités bien choisies

Mesure implicite



Mesure de contrôle

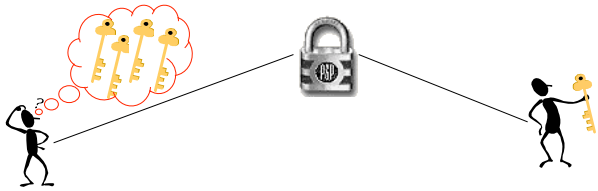


Entrée

- Ensemble $X = \{a, b, c, \ldots\}$
- Elements marqués : M sous-ensemble de X

Sortie

- Un élément marqué x de M



Modèle de requêtes

- Coût 1 pour répondre à "x dans M ?"

Recherche exhaustive

- Trouve un élément marqué en $|X|$ requêtes

Recherche aléatoire

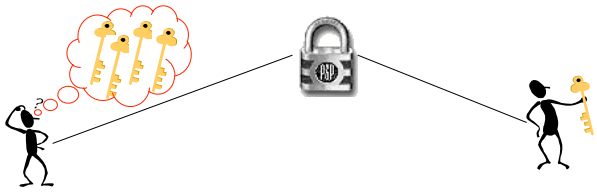
- Trouve un élément marqué en utilisant $1/\varepsilon$ requêtes $\quad \varepsilon = \Pr(M)$

Recherche quantique [Grover, ...]

- Accélération quadratique de la recherche aléatoire
- Trouve un élément marqué en utilisant $1/\sqrt{\varepsilon}$ requêtes

Problème revu

- Entrée : $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ telle que $\exists! x_0 : f(x_0) = 1$
- Sortie : x_0
- Contrainte : f est une boîte noire



Reformulation

- $N = 2^n$ et $f : \{1, 2, \ldots, N\} \to \{0,1\}$

Complexité en requêtes

- Probabiliste : $\Theta(N)$
- Quantique : $\Theta(\sqrt{N})$

$$N = 4 \implies 1 \text{ requête}$$

Implémentation de f

$$\sum_x \alpha_x |x\rangle \dashrightarrow \boxed{S_f} \dashrightarrow \sum_x (-1)^{f(x)} \alpha_x |x\rangle = \sum_x \alpha_x |x\rangle - 2\alpha_{x_0} |x_0\rangle$$

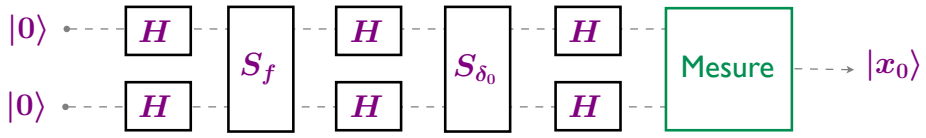
Double porte de Hadamard

$$|x_1\rangle \dashrightarrow \boxed{H} \dashrightarrow \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + (-1)^{x_1}|1\rangle)$$
$$|x_2\rangle \dashrightarrow \boxed{H} \dashrightarrow \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + (-1)^{x_2}|1\rangle)$$

$$|x\rangle = |x_1 x_2\rangle \dashrightarrow \boxed{H} \boxed{H} \dashrightarrow \frac{1}{2} \sum_y (-1)^{x \cdot y} |y\rangle$$

avec $x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 \mod 2$

Solution quantique ($N = 4$)



Initialisation : $|00\rangle$

Parallélisation : $\frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)$

Appel de f : $\frac{1}{2}\sum_x |x\rangle - |x_0\rangle$

Interférences : $|00\rangle - \frac{1}{2}\sum_y (-1)^{x_0 \cdot y}|y\rangle$

Appel de δ_0 : $-|00\rangle - \frac{1}{2}(\sum_y (-1)^{x_0 \cdot y}|y\rangle - 2|00\rangle) = -H \otimes H|x_0\rangle$

Regroupement : $-|x_0\rangle$

Exercice : Analyse numérique

Opérateur de diffusion

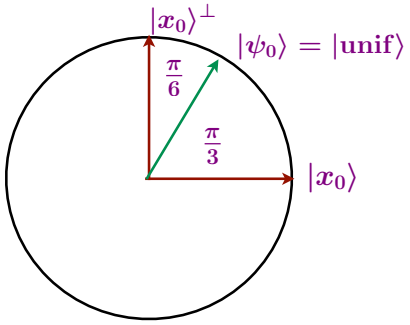
- Soit l'opérateur $D = H^{\otimes 2}(S_{\delta_0})H^{\otimes 2}$. Calculer D
- Montrer que $(-D)$ appliqué à un état $|\psi\rangle$, effectue sur chaque coordonnée une symétrie par rapport à la moyenne des amplitudes.
- A l'aide d'un graphique des amplitudes, représenter le graphe des amplitudes de l'état du circuit après la parallèlisation, l'appel de f, puis l'application de $(-D)$

- Montrer que remplacer D par $(-D)$ ne change rien à l'analyse. Conclure
- Justifier pourquoi l'algorithme utilise D

Opérateur de Grover

Exercice

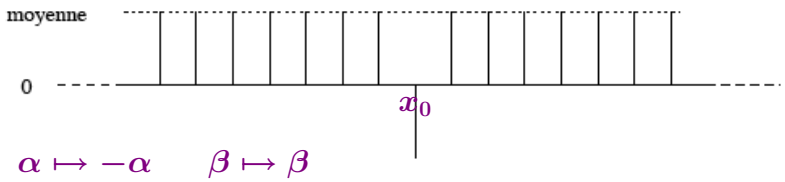
- Pourquoi remplacer S_{δ_0} par $-S_{\delta_0}$ ne change rien à l'analyse ?
- Interpréter S_f comme une symétrie orthogonale dont on calculera l'espace de symétrie.
- Faire de même avec $-S_{\delta_0}$ puis avec $H^{\otimes 2}(-S_{\delta_0})H^{\otimes 2}$
- Montrer que le plan $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(|x_0\rangle, |\mathrm{unif}\rangle)$ est stable par G
- Dans ce plan, montrer que G est une rotation dont on calculera l'angle
- Conclure



Changement de phase

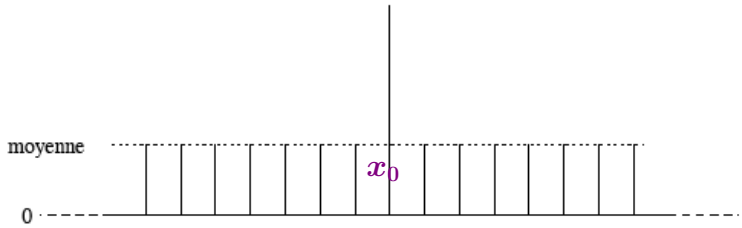
α : amplitude de x_0 β : autres amplitudes

$$\alpha^2 + (N-1)\beta^2 = 1$$



$\alpha \mapsto -\alpha \qquad \beta \mapsto \beta$

Inversion par rapport à la moyenne



$$-\alpha \mapsto \alpha + \tfrac{2}{N}((N-1)\beta - \alpha) = \alpha + 2\beta - \tfrac{2}{N}(\beta + \alpha)$$
$$\beta \mapsto -\beta + \tfrac{2}{N}((N-1)\beta - \alpha) = \beta - \tfrac{2}{N}(\beta + \alpha)$$

Conclusion : $\alpha_j = \sin((2j+1)\theta)$ $\qquad \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{N}}$

- Nombre d'itérations : $T \simeq \frac{\pi}{4}\sqrt{N}$

Opérateur de Grover

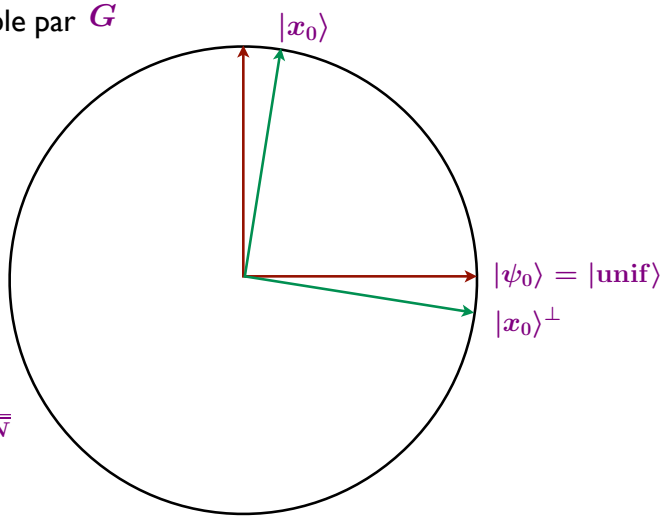
$$G \overset{\text{def}}{=} S_f \; H \; -S_{\delta_0} \; H$$

- $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(|x_0\rangle, |\mathrm{unif}\rangle)$ est stable par G
- Dans ce plan on a

  $S_f = -S_{|x_0\rangle} = S_{|x_0\rangle^\perp}$

  $-S_{\delta_0} = S_{|0^n\rangle}$

  $H^{\otimes n} S_{|0^n\rangle} H^{\otimes n} = S_{|\mathrm{unif}\rangle}$



Conclusion

- $G = S_{|\mathrm{unif}\rangle} S_{|x_0\rangle^\perp} = R_{2\theta}$

  avec $\sin\theta = \langle \mathrm{unif}|x_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}$
- Et donc nombre d'itérations :

  $T \simeq \frac{\pi}{4}\sqrt{N}$

Nombre connu : t

$\sin\theta = \langle \mathrm{unif}|\frac{1}{\sqrt{k}}\sum_{x_0}|x_0\rangle = \sqrt{\frac{t}{N}} \implies \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{N}{t}}$ itérations conviennent

Nombre inconnu (I) : réduction probabiliste

- Partir de $m = 1$
- Choisir aléatoirement un entier $j \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$
- Effectuer j itérations de l'opérateur de Grover sur la superposition uniforme $\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}|i\rangle$
- Observer le registre, soit i la sortie obtenue
- Si $F(i) = 1$, alors renvoyer i et s'arrêter
- Sinon, fixer $m = \min(8m/7, \sqrt{N})$ et recommencer

Théorème : temps moyen = $O(\sqrt{\frac{N}{t}})$

Nombre inconnu (II) : comptage quantique

- Temps (dans tous les cas) : $O(\sqrt{\frac{N}{t}})$

Etat initial (obtenu par un circuit quantique)

$$A : |0\rangle \mapsto |p\rangle = \sum_x \sqrt{p_x}|x\rangle$$

Opérateur de requêtes

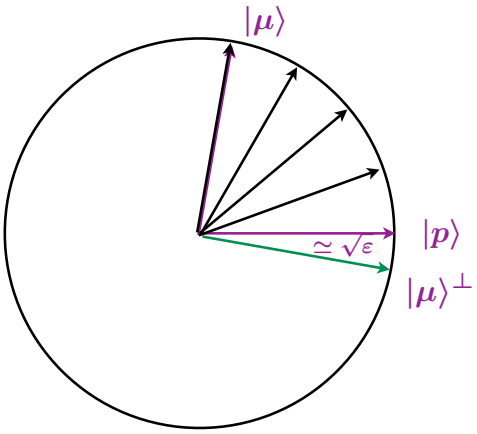
$$O_M : |x\rangle \mapsto \begin{cases} -|x\rangle & \text{if } x \in M \\ |x\rangle & \text{otherwise} \end{cases}$$

Etat recherché

- Projection de $|p\rangle$ sur $\mathbf{span}(|x\rangle : x \in M)$:

$$|\mu\rangle = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_{x \in M} \sqrt{p_x}|x\rangle$$

- Probabilité de succès initiale : $|\langle \mu | p \rangle|^2 = \varepsilon$



Symétries dans $\mathbf{span}(|p\rangle, |\mu\rangle)$

- O_M : symétrie selon $|\mu\rangle^\perp$
- $A(-O_0)A^{-1}$: symétrie selon $|p\rangle$
- Opérateur de Grover : $A(-O_0)A^{-1}O_M$
  est une rotation d'angle $\simeq 2\sqrt{\varepsilon}$

Conclusion

- $\frac{\pi}{4\sqrt{\varepsilon}}$ iterations de l'opérateur de Grover sur $|p\rangle$: $\simeq |\mu\rangle$

Exercice 1

- Combien de requêtes sont-elles nécessaires si $t = N/4$?

Exercice 2

- Soit une fonction $f : \{1, \ldots, N\} \to \{1, \ldots, N\}$ 2-vers-1

$$\forall x \exists! y : f(x) = f(y)$$

- Combien de requêtes à f utilisez-vous classiquement pour trouver une paire $(x, y) : x \neq y, f(x) = f(y)$?
- Même question quantiquement.

Exercice 3

- Même exercice sans hypothèse sur f

Modélisation

- Soit U un circuit qui résout le problème de Grover avec précision ε

$$U = U_T S_f U_{T-1} S_f \dots U_1 S_f U_0$$

- Soit $|\psi_t^i\rangle$ l'état du circuit après la t-ème question à f_i, où

$$f_i : \{1, 2 \dots, N\} \to \{0, 1\},\ x \mapsto \begin{cases} 1, & x = i \\ 0, & x \neq i \end{cases} \quad i = 1, \dots, N$$

$$f_0 \equiv 0$$

- La réponse est soit la solution i soit "pas de solution", cas f_0. Il faut donc adapter l'algorithme de Grover en vérifiant à la fin que la solution donnée est correcte

Mesure du progrès

$$W_t = \sum_{i=1}^{N} |\langle \psi_t^0 | \psi_t^i \rangle|$$

Condition initiale

$$W_0 = N$$

Condition finale

- Les états finaux $|\psi_T^0\rangle$ et $|\psi_T^i\rangle$ sont quasi-orthogonaux :

$$|\langle \psi_T^0 | \psi_T^i \rangle| \leq 2\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)} \implies |W_T| \leq 2N\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)}$$

Majoration des sauts

Exercice : Vérifier cette majoration quand ε=0

- Les applications unitaires ne comptent pas :

$$\langle \psi_t^0 | \psi_t^i \rangle = \langle \psi_t^0 U | U \psi_t^i \rangle$$

P_i: projecteur sur le sous-espace posant la question i

- Influence des questions.

$$\begin{aligned} |\langle \psi_t^0 | \psi_t^i \rangle - \langle \psi_{t+1}^0 | \psi_{t+1}^i \rangle| &= |\langle \psi_t^0 | \psi_t^i \rangle - \langle \psi_t^0 | S_{f_i} | \psi_t^i \rangle| \\ &\leq 2|\langle \psi_t^0 | P_i | \psi_t^i \rangle\rangle| \\ &\leq 2\|P_i | \psi_t^0 \rangle\| \end{aligned}$$

Exercice : Vérifier cette majoration

- Au total :

$$|W_t - W_{t+1}| \leq \sum_{i=1}^{N} 2\|P_i|\psi_t^0\rangle\| \leq 2\sqrt{N}\sqrt{\sum_{i=1}^{N} \|P_i|\psi_t^0\rangle\|^2} = 2\sqrt{N}$$

Conclusion

$$T \geq \frac{1 - 2\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)}}{2}\sqrt{N}$$