Grammaires et Analyse

1. Clôture de la classe des langages algébriques

Soit $\mathcal{L}$ un langage algébrique. Lesquels, parmi les langages suivants, sont encore algébriques ?

1. miroir ;
2. $\mathrm{MIN}(\mathcal{L}) = \{x \in \mathcal{L} \mid x = yz \text{ et } y \in \mathcal{L} \text{ impliquent } z = \epsilon\}$
   (indication: $\mathcal{L} = \{0^i 1^j 2^k \mid i \leq k \text{ ou } j \leq k\})$;
3. $\mathrm{MAX}(\mathcal{L}) = \{x \in \mathcal{L} \mid xy \in \mathcal{L} \text{ implique } y = \epsilon\}$.

2. Algorithme CYK

Le but de cet exercice est d'étudier l'algorithme de Cocke-Younger-Kasami (dit *algorithme CYK*) qui permet de déterminer si un mot donné est dans le langage engendré par une grammaire en forme normale de Chomsky.

Soit G une grammaire en forme normale de Chomsky, $\mathcal{L}$ le langage engendré, et x un mot. On note $x_{i,j}$ le sous-mot de x de longueur j et commençant à la i-ème lettre de x (on compte à partir de 1). Soit $V_{i,j}$ l'ensemble des variables A telles que $A \to^* x_{i,j}$.

0. Pour quelles valeurs de i et j les notations $x_{i,j}$ et $V_{i,j}$ ont-elles un sens ?
1. À quelle condition $A \in V_{i,1}$?
2. Soit $n \leq |x|$ $(n > 1)$. On suppose connus les $V_{i,k}$ pour $k < n$. Comment peut-on calculer les $V_{i,n}$?
3. En déduire un algorithme qui détermine si $x \in \mathcal{L}$. Quelle est la complexité de cet algorithme en fontction de $|x|$?
4. Soit la grammaire suivante :

$$S \to b \mid aSa.$$

Mettez cette grammaire sous forme normale de Chomsky. En utilisant l'algorithme CYK, déterminez si le mot aba est dans le langage engendré.