Grammaires et analyse - Semaine du 28/10/2002
Automates à pile - Langages non reconnaissables

Dominique Poulalhon, Aurelian Lavric , Yan Jurski

Exercice 1 : Un langage algebrique L est *déterministe* s'il existe un automate à pile déterministe qui l'accepte à pile vide et état final.

- Prouver la proposition suivante :
  Si L est un langage algebrique, $v, w \in L$ et v est un prefixe de w, alors $v = w$.
- Pour $i \in N$, soit $L_i = \{a^j b^j \ : \ j \geq i\}$
  - Quel est l'ensemble $N_{det} = \{i \ : \ L_i \text{ est déterministe}\}$.
  - Decrire, en fonction de $j \in N_{det}$, un automate à pile déterministe qui accepte L_j.

Exercice 2 : Soit $L_1 = \{a^n b^p a^n \ : \ n, p > 0\}$ et $L_2 = \{a^n b^p c^p \ : \ n, p > 0\}$.

- Donner des automates à pile pour L_1 et L_2. En déduire un automate à pile non déterministe pour $L_1 \bigcup L_2$.
- Prouver que la classe des langages acceptés par des APND est fermée par union (généraliser la construction précédente). Ceci est-il vrai pour la classe des langages acceptés par des APD ?
- Donner un APD qui accepte $L_1 \bigcup L_2$.

Exercice 3 : Montrer que les langages suivant sont, ou ne sont pas, reconnaissables

- Les mots de la forme $a^n.b^n$
- Les mots sur $\{a, b\}$ qui ont autant de a que de b
- Les mots dont la somme du nombre de a et de b est paire
- Les mots dont la difference entre le nombre de a et de b est paire
- Les mots dont la difference entre le nombre de a et de b est 2

Correction 1 :

- S'il est deterministe, le calcul de A sur v est unique, on arrive a pile vide, alors il n'y a pas de transition possible.
- On trouve un automate pour $i \geq 2$, puis pour $i = 1$.
  On utilise des symboles de pile X_p pour $p \in [1..i]$ pour reconnaitre les premiers a, puis un autre A pour tout les a supplementaires. Quand on lis un b, on change d'etat, et on efface le A, puis on continue ou on fait decroitre l'indice de X_p. Sur X_1 avec un b on va en etat terminal.
  Dominique a une solution plus claire, c'est de faire des chemin de longueur i, si on a le temps on peut donc montrer les 2 solutions.
  Il faut montrer qu'il n'y en a pas pour $i = 0$, on utilise la propriete precedente. On supose L_0 deterministe, puisque $\epsilon \in L_0$ est prefixe de tout autre w de L_0, alors L_0 devrait etre reduit a ϵ, ce qui est absurde.

Correction 2 :

-
- Non, prendre $\{a\}$ et $\{ab\}$, l'union n'est pas APD d'apres la propriete de l'exo 1
- Rq que ca marche parce que L_1 fini par a, et L_2 par c.

  Dans un premier etat, on empile un A pour chaque a lu, puis au premier b on change d'etat, et on empile un B pour chaque b lu. De la, on definit 2 autres etats, ou l'on va en depilant l'un pour la lecture d'un c disons (p), l'autre pour la lecture d'un a, disons (q). Dans (p), je depile un B pour chaque c lu, et si la pile presente autre chose, je change d'etat avec un ϵ. De ce nouvel etat je vide la pile avec des ϵ, puis je vais en final a pile vide sur $Z0$.

  Pour (q), je vide tout les B de la pile en lisant des ϵ, au premier A, encore avec un ϵ je vais en (q') duquel je consomme les A pour chaque a, puis on sort avec $\epsilon, Z0$ dans un etat final a pile vide.

Correction 3 :

- non reconnaissable
- reconnaissable
- c'est le meme
- non reconnaissable, prendre $a^N.b^{N+2}$