Grammaires et analyse - Semaine du 7/10/2000

Langages algébriques

Dominique Poulalhon, Aurelian Lavric , Yan Jurski

Exercice 1 Soit $G = (N, \Sigma, P, S)$ la grammaire donnée par $N = \{S, A\}, \Sigma = \{a, b\}$ et $P = \{S \to AA, A \to AAA, A \to a, A \to bA, A \to Ab\}$.

- Quel sont les mots de $L(G)$ qu'on peut produire avec des dérivations de longueur 4 ou moins ?
- Donner au minimum 4 dérivations différentes du mot *babbab*,
- Pour $m, n, p > 0$ décrire une dérivation dans G du mots $b^m ab^n ab^p$.

Exercice 2 Considérer la grammaire

$$S \to S + S \mid S * S \mid (S) \mid x \mid y$$

- Connaissez vous le langage engendré par cette grammaire ?
- Considérer le mot $x + y * y$. Donner deux arbres de dérivation différents pour ce mot. Quel est celui "normalement" préféré ?

Exercice 3 Montrer que les langages suivants sont algébriques:

- $L_1 = \{a^m b^n \ : \ m \leq 2n\}$
- $L_2 = \{a^m b^n \ : \ m \geq n\}$
- $L_3 = \{a^m b^n c^p d^q \ : \ m + n = p + q\}$
- $L_4 = \{uawb \ : \ u, w \in \{a, b\}^* \text{ et } |u| = |w|\}$

Exercice 4 Considérer la grammaire

$$S \to aSbS \mid bSaS \mid \epsilon$$

- Montrer que cette grammaire est ambiguë en donnant deux dérivations gauches du mot *abab*.
- Donner les deux dérivations droites correspondantes
- Donner les deux arbres de dérivation correspondants
- Quel est le langage généré par cette grammaire?

Exercice 5 Montrer que le langage $L = \{w \in \{a, b\}^* : |w|_a = |w|_b\}$ n'est pas reconnaissable. Meme question avec le langage decrit dans l'exercice 2.

Correction

Les 3 premiers exos se resolvent sans preuves.

pour l'exo 3 : L3 je commencerai comme ca :

$S->S1|S2$, avec pour S1 : moins de m que de q, pour S2 plus de m que de q

je ne vais faire que S1

$S1->aS1d|T1$ on consomme tout les a avec des d, puis dans T1 il n'y aura plus de a

$T1->bT1d$ (on consomme les b tant qu'il y a des d) $|U1$ (plus de d)

$U1->bU1c|\epsilon$

c'est presque pareil pour S2

Pour l'exo 4, 4eme, ce sont les mots qui contiennent autant de a que de b, faire la preuve.

L'exo 5 va prendre du temps, a defaut rapeller le lemme d'iteration et le laisser pour la prochaine fois. Peut etre qu'on fera un TD special non reconnaissable, non algebrique.

Pour l'exo 5 : le lemme est qq chose du genre :

si L est reconnaissable alors il existe N tel que pour tout mot w de L de longueur $> N$, on peut decomposer w en $w1.u.w2$, de sorte que $w1.u$ soit de longueur $< N$, u non nul !!, et tout les $w1.(u^i).w2$ seront aussi dans L. (i est un entier eventuellement nul).

Et on raisonne toujours par l'absurde : on supose L reconnaissable, ce qui nous permet de supposer N fixe. On considere un mot du langage, ici $w = a^N.b^N$ la decomposition du lemme nous donne un u qui n'a que des a. on le suprime ou on l'itere (i=0 ou plus de 1) et on a un mot $w' = a^{N-|u|}.b^N$ qui d'apres le lemme doit etre un mot du langage. Ce qui est absurde si on reprend la definition $->$ il est faux de dire que L est reconnaissable.

Pour l'autre langage, c'est pareil : les mots doivent etre bien parentheses, et on pourrait en construire un qui ne le serai pas.