Algorithmique

TD3. Semaine du 20/10/2003

Eric Colin de Verdiere, Yan Jurski, Sylvain Peyronnet

Corrigé du Probleme à la maison

Soit n un entier strictement positif et soit T un tableau de n nombres distincts. On appelle *maximum provisoire* de T tout indice i dans $[1, n]$ tel que, pour tout j dans $[1, i-1]$, $T[i]$ est plus grand que $T[j]$.

On veut calculer le nombre moyen de maxima provisoires, sur tous les tableaux T qui sont des permutations de $[1, n]$ (*i.e.*, des bijections de $[1, n]$ dans $[1, n]$).

1. On appelle $P_{n,k}$ le nombre de permutations de $[1, n]$ qui ont k maxima provisoires. Montrer que l'on a les relations :
   - $P_{1,1} = 1$, et $P_{1,k} = 0$ pour tout $k \neq 1$;
   - $P_{n,k} = P_{n-1,k-1} + (n-1)P_{n-1,k}$.
2. Soit S_n le nombre moyen de maxima provisoires d'une permutation de $[1, n]$. Montrer que :
$$S_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} k P_{n,k}.$$
3. Calculer S_n.

Tri par insertion

On considère la méthode suivante, réalisant le tri par insertion d'un tableau T à N éléments, numérotés de 1 à N :

- pour chaque $i \in [\,2, \ldots, N\,]$, pris par ordre croissant
  - $j := i - 1$.
  - tant que $(j > 0)$ et $T[j] > T[j+1]$,
    - $*$ échanger les contenus de $T[j]$ et $T[j+1]$.
    - $*$ $j := j - 1$.

Rappelons que dans le pire des cas, le nombre d'échanges nécessaires est égal à $1 + 2 + \ldots (N-1) = \frac{N(N-1)}{2}$.

Exercice 0

Pourquoi doit on prendre i dans l'ordre croissant ?

Exercice 1

Soient $(a_1, \ldots, a_p)$ et $(b_1, \ldots, b_p)$ deux suites d'entiers dont les éléments sont triés par ordre croissant. Soit $T = (a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_p, b_p)$.

Démontrer, par récurrence sur p, que le tri par insertion de T nécessite, dans le pire des cas, seulement $\frac{p(p+1)}{2}$ échanges.

Exercice 2

On considère à présent un tableau T arbitraire de taille $n = 2 \times p$, et l'on considère la méthode suivante :

- trier sur place, par insertion, le sous-tableau de T d'indices paires,
- trier sur place, par insertion, le sous-tableau de T d'indices impaires,
- trier, par insertion, le tableau T résultant.

Quel est, dans le pire des cas, le coût de ce tri ? Comparer la valeur obtenue avec celle du tri par insertion simple. Est-elle meilleure ou pire ?

Exercice 3

On se donne un tableau de longueur N qui contient des nombres compris entre 1 et k. Ces nombres correspondent à des couleurs, par exemple bleu=1, jaune=2, rouge=3, etc. On cherche à réarranger le tableau de manière à ce que les nombres correspondant aux mêmes couleurs soient regroupés ensemble.

1. en supposant que l'on peut déclarer de nouveaux tableaux, écrire un pseudo-code de cet algorithme. Quelle est sa complexité ?

2. même question en supposant à présent qu'aucun nouveau tableau ne peut être déclaré: les seules opérations autorisées sont les échanges de deux éléments du tableau, et les tests de la couleur d'un élément.