MPRI, Fondations mathématiques de la théorie des automates

Olivier Carton, Jean-Éric Pin

Examen du 12 février 2008, 13h–15h30, tous documents non électroniques autorisés

⋆ ⋆ ⋆

Avertissement : On attachera une grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Partie 1: Langages cycliques

Dans tout le problème, L désigne un langage rationnel de A^*, $\eta : A^* \to M$ son morphisme syntactique et $P = \eta(L)$ l'image syntactique de L.

On dit que L est *cyclique* s'il vérifie les deux conditions suivantes:

(1) pour tout $u \in A^*$ et pour tout entier $n > 0$, $u^n \in L$ si et seulement si $u \in L$,

(2) pour tout $u, v \in A^*$, $uv \in L$ si et seulement si $vu \in L$.

On note $\mathcal{C}ycl$ la classe des langages rationnels cycliques.

Question 1. Montrer que L est cyclique si et seulement si il satisfait les deux conditions suivantes:

(1) pour tout $x, y \in M$, $xy \in P \Leftrightarrow yx \in P$

(2) pour tout $x \in M$, $x \in P \Leftrightarrow x^\omega \in P$

Question 2. En déduire un ensemble d'équations définissant la classe $\mathcal{C}ycl$.

Question 3. La classe $\mathcal{C}ycl$ est-elle fermée pour les opérations suivantes (justifier votre réponse dans chaque cas): union, intersection, complément, quotients ($L \to u^{-1}L$ et $L \to Lu^{-1}$), inverses de morphismes?

Question 4. Soit H un groupe dans M. Montrer que si L est cyclique, H est soit contenu dans P, soit disjoint de P. Montrer que si H est contenu dans P, P contient également tous les groupes de la $\mathcal{D}$-classe de H.

Question 5. Montrer que si L est cyclique, M possède un zéro.

On prend pour M le monoïde donné ci-dessous et $P = \{a, aa, aba, aab\}$. Les relations définissant M sont $b^2 = b$, $a^3 = a$, $ba^2 = a^2b$, $a^2ba = ba$ et $abab = bab$.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7	8
a	3	4	5	2	3	8	2	6
b	7	0	8	4	4	0	7	8
a^2	5	2	3	4	5	6	4	8
ab	8	4	4	0	8	8	0	0
ba	2	0	6	2	2	0	2	6
a^2b	4	0	8	4	4	0	4	8
aba	6	2	2	0	6	6	0	0
bab	0	0	0	0	0	0	0	0

Question 6. Déterminer les idempotents de M et calculer sa structure en $\mathcal{D}$-classes.

Question 7. Montrer que les conditions de la question 1 sont satisfaites. Quel est le langage $\eta^{-1}(P)$?

Partie 2: Langages fortement cycliques

Soit $\mathcal{A} = (Q, A, \cdot\,)$ un automate déterministe (qui peut être incomplet). Si K est une partie de Q, et u un mot de A^*, on pose

$$K \cdot u = \{q \cdot u \mid q \in K\}$$

Le *stabilisateur* de K est l'ensemble

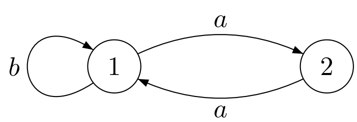
$$\mathrm{Stab}(K) = \{u \in A^* \mid K \cdot u = K\}$$

Le *stabilisateur* de $\mathcal{A}$ est l'ensemble

$$\mathrm{Stab}(\mathcal{A}) = \bigcup_{\emptyset \neq K \subseteq Q} \mathrm{Stab}(K)$$

Question 8. Montrer que $\mathrm{Stab}(\mathcal{A})$ est l'ensemble des mots u pour lesquels il existe un état q tel que, pour tout entier $n \geqslant 0$, l'état $q \cdot u^n$ est défini.

Question 9. On considère l'automate $\mathcal{A}$ suivant:



Déterminer les stabilisateurs des ensembles $\{1\}$, $\{2\}$ et $\{1, 2\}$ et celui de $\mathcal{A}$.

Un langage L est dit *fortement cyclique* s'il existe un automate fini $\mathcal{A}$ tel que $L = \mathrm{Stab}(\mathcal{A})$.

Question 10. On suppose que L **est différent de** A^*. Montrer que L est fortement cyclique si et seulement si M a un zéro et $P = \{x \in M \mid x^\omega \neq 0\}$.

Question 11. En déduire qu'un langage fortement cyclique est cyclique.

Question 12. Montrer que les langages fortement cycliques sont fermés par union finie, par intersection finie et par inverse de morphismes, mais ni par complément, ni par quotients.

Question 13. Démontrer que tout langage cyclique est combinaison booléenne de langages fortement cycliques. Déterminer cette décomposition pour le langage de la question 7.

Partie 3: Langages avec zéro

On rappelle qu'un élément 0 d'un monoïde M est un zéro si, pour tout $x \in M$, $x0 = 0 = 0x$. Par extension, on dit qu'un *langage a un zéro* si son monoïde syntactique a un zéro. On note $\mathcal{Z}$ la classe des langages rationnels avec zéro.

Question 14. Montrer que $\mathcal{Z}$ est fermée pour les opérations booléennes et les quotients. Est-elle fermée par inverse de morphisme?

On se propose de donner une caractérisation équationnelle de $\mathcal{Z}(A^*)$. On fixe un ordre total $<$ sur A et on considère la suite $u_0, u_1, \ldots$ des mots de A^+ ordonnée par l'ordre radiciel (shortlex en anglais). Par exemple, si $A = \{a, b\}$ avec $a < b$, les premiers éléments de cette suite sont

$$1, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb, aaaa, \ldots$$

Question 15. Montrer que la suite des mots $(v_n)_{n \geqslant 0}$ définie par

$$v_0 = u_0,\ v_{n+1} = (v_n u_{n+1} v_n)^{(n+1)!}$$

est convergente dans la topologie profinie. On note ρ_A sa limite.

Question 16. Montrer que ρ_A est un idempotent de l'idéal minimal du monoïde profini libre $\widehat{A^*}$.

Question 17. En déduire qu'un langage possède un zéro si et seulement si il vérifie les équations $x\rho_A = \rho_A = \rho_A x$ pour tout $x \in A^*$.

Question 18. Donner une caractérisation équationnelle de la classe des langages rationnels fortement cycliques de A^*.