
La théorie de l'unification

Retour sur la notion de substitution

Définition :

- Une **substitution** est une fonction $\sigma : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{T}_{\Sigma, \mathcal{X}}$.
- Le **domaine** d'une substitution σ est l'ensemble $Dom(\sigma) = \{x \in \mathcal{X} \mid \sigma(x) \neq x\}$.
- Le **codomaine** d'une substitution σ est l'ensemble $Codom(\sigma) = \{VI(\sigma(x)) \mid x \in Dom(\sigma)\}$.
- Un **renommage** est une substitution **injective** σ t.q. $\sigma(x) = y \forall x \in Dom(\sigma)$.
- Si le domaine d'une substitution σ est **fini** on note $\sigma = \{x_1 \leftarrow t_1, \dots, x_n \leftarrow t_n\}$ si $\sigma(x_i) = t_i$ et $x_i \in Dom(\sigma)$.
- L'application d'une **substitution** à un terme est l'**extension** de σ aux termes donnée par $\sigma(f(t_1, \dots, t_n)) = f(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n))$.

Composition de deux substitutions

Soient σ et τ deux substitution. La **composition** de σ avec τ est donnée par $\sigma \circ \tau(x) = \sigma(\tau(x))$.

Exemple : Soit $\sigma = \{x \leftarrow f(y), w \leftarrow g(z, z)\}$ et $\tau = \{y \leftarrow f(a), z \leftarrow g(x, b)\}$. La substitution $\tau \circ \sigma$ est donnée par $\{x \leftarrow f(f(a)), y \leftarrow f(a), w \leftarrow g(g(x, b), g(x, b)), z \leftarrow g(x, b)\}$ et la substitution $\sigma \circ \tau$ est donnée par $\{y \leftarrow f(a), z \leftarrow g(f(y), b), x \leftarrow f(y), w \leftarrow g(z, z)\}$.

Comparer deux substitutions

La substitution σ est une **instance** de la substitution τ (ou τ est **plus générale** que σ), ce que l'on écrit $\sigma \leq \tau$, ss'il existe une substitution ρ t.q. pour toute variable $x \in \mathcal{X}$, $\sigma(x) = (\rho \circ \tau)(x)$.

Exemple : $\{x \leftarrow f(y), y \leftarrow z\}$ est plus générale que $\{x \leftarrow f(b), y \leftarrow h(c), z \leftarrow h(c)\}$

Identifier deux substitutions

Remarque : La relation \leq n'est pas antisymétrique.

Exemple : Soient $\sigma_1 = \{x \leftarrow y\}$ et $\sigma_2 = \{y \leftarrow x\}$. On a $\sigma_1 \leq \sigma_2$ et $\sigma_2 \leq \sigma_1$ et $\sigma_1 \neq \sigma_2$.

Lemme : La relation d'équivalence engendrée par \leq est donnée par: $\sigma \sim \sigma'$ ssi \exists un renommage ρ t.q. $\sigma = \rho \circ \sigma'$.

Alors, $\sigma_1 \sim \sigma_2$ dans l'exemple précédent car: $\sigma_1 = \sigma_1 \circ \sigma_2$ et $\sigma_2 = \sigma_2 \circ \sigma_1$.

Substitution(s) principale(s)

Soit \mathcal{S} un ensemble de substitutions et $\tau \in \mathcal{S}$. On dit que τ est **principale** ssi toute substitution $\sigma \in \mathcal{S}$ est une instance de τ .

Exemple : Soit $\mathcal{S} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5\}$, où $\sigma_1 = \{x \leftarrow y\}$, $\sigma_2 = \{y \leftarrow x\}$, $\sigma_3 = \{x \leftarrow y, z \leftarrow x\}$, $\sigma_4 = \{x \leftarrow z, y \leftarrow z\}$ et $\sigma_5 = \{x \leftarrow a, y \leftarrow a\}$.

Alors σ_1, σ_2 et σ_3 sont principales pour \mathcal{S} . En effet, $\sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5 \leq \sigma_1$ et $\sigma_1, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5 \leq \sigma_2$ et $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_4, \sigma_5 \leq \sigma_3$.
Mais $\sigma_1 \not\leq \sigma_4$ car $\sigma_1 \neq \{x \leftarrow y, z \leftarrow y\} = \{z \leftarrow y\} \circ \sigma_4$. De même, $\sigma_1 \not\leq \sigma_5$ (entre autres).

Unification comme solution d'un système d'équations

Une **équation** est une paire de termes de la forme $s \doteq t$, elle est **unifiable** ssi il existe une substitution σ t.q. $\sigma(s) = \sigma(t)$.
Cette substitution est un **unificateur** ou une **solution** de l'équation $s \doteq t$.

Un **système fini** ou **problème fini d'équations** \mathcal{P} est un ensemble $\{s_1 \doteq t_1, \dots, s_n \doteq t_n\}$ d'équations, il est **unifiable** ssi il existe une substitution qui est unificateur de toutes les équations de \mathcal{P} . Cette substitution est un **unificateur** ou une **solution** de l'ensemble \mathcal{P} .

Définition :

- L'**ensemble de variables** de \mathcal{P} est notée $Var(\mathcal{P})$.
- L'**application d'une substitution** σ à $\mathcal{P} = \{s_1 \doteq t_1, \dots, s_n \doteq t_n\}$ donne le système $\sigma(\mathcal{P}) = \{\sigma(s_1) \doteq \sigma(t_1), \dots, \sigma(s_n) \doteq \sigma(t_n)\}$.

L'unicité

- 1 On identifie deux unificateurs σ et σ' d'un problème \mathcal{P} s'ils ne diffèrent que par des renommage de variables, c'est à dire, si $\sigma \sim \sigma'$.
- 2 On considère uniquement comme unificateurs de \mathcal{P} les substitutions σ t.q. $Dom(\sigma) \subseteq Var(\mathcal{P})$.

Exemple : Soit $\mathcal{S} = \{x \doteq y\}$. Prenons trois unificateurs principaux de \mathcal{S} : $\sigma_1 = \{x \leftarrow y\}$, $\sigma_2 = \{y \leftarrow x\}$ et $\sigma_3 = \{x \leftarrow y, z \leftarrow w\}$.
Alors $\sigma_1 = \sigma_2$ (car $[\sigma_1]_{\sim} = [\sigma_2]_{\sim}$) et σ_3 n'est plus considéré comme un unificateur de \mathcal{S} .

Modulo ces considérations, l'**unificateur principal d'un problème \mathcal{P}** est **unique** modulo renommage, c'est à dire :
Si σ et σ' sont deux unificateurs principaux de \mathcal{P} , alors $\sigma \sim \sigma'$.

Définition : Un problème d'unification \mathcal{P} est en **forme résolue** ssi il est de la forme $\{x_1 \doteq t_1, \dots, x_n \doteq t_n\}$, où

- ① toutes les variables x_i sont distinctes ($i \neq j$ implique $x_i \neq x_j$)
- ② aucune x_i n'apparaît dans un t_j ($\forall i \forall j x_i \notin VI(t_j)$)

Notation : Si \mathcal{P} est un système en forme résolue $\{x_1 \doteq t_1, \dots, x_n \doteq t_n\}$ on note $\vec{\mathcal{P}}$ la substitution $\{x_1 \leftarrow t_1, \dots, x_n \leftarrow t_n\}$.

$$\frac{\mathcal{P} \cup \{s \doteq s\}}{\mathcal{P}} \quad (\text{effacer}) \quad \frac{\mathcal{P} \cup \{t \doteq x\} \quad t \notin \mathcal{X}}{\mathcal{P} \cup \{x \doteq t\}} \quad (\text{orienter})$$

$$\frac{\mathcal{P} \cup \{f(s_1, \dots, s_n) \doteq f(t_1, \dots, t_n)\}}{\mathcal{P} \cup \{s_1 \doteq t_1, \dots, s_n \doteq t_n\}} \quad (\text{décomposer})$$

$$\frac{\mathcal{P} \cup \{x \doteq s\} \quad x \in \text{Var}(\mathcal{P}) \quad x \notin VI(s)}{\{x \leftarrow s\}(\mathcal{P}) \cup \{x \doteq s\}} \quad (\text{remplacer})$$

Algorithme d'unification d'un problème \mathcal{P}

- ① On démarre avec un problème \mathcal{P}
- ② On applique les règles de transformation tant qu'on peut, on obtient un problème \mathcal{S}
- ③ Si le problème \mathcal{S} est en forme résolue
 - ▶ alors renvoyer $\vec{\mathcal{S}}$
 - ▶ sinon échec

Exemple

Soit $\mathcal{P} = \{f(x, h(b), c) \doteq f(g(y), y, c)\}$.

$$\frac{\frac{\frac{f(x, h(b), c) \doteq f(g(y), y, c)}{x \doteq g(y), h(b) \doteq y, c \doteq c} \text{d}}{x \doteq g(y), h(b) \doteq y} \text{e}}{x \doteq g(y), y \doteq h(b)} \text{o}}{x \doteq g(h(b)), y \doteq h(b)} \text{r}$$

L'unificateur principal de \mathcal{P} est $\sigma = \{x \leftarrow g(h(b)), y \leftarrow h(b)\}$.
Ainsi, $\sigma f(x, h(b), c) = f(g(h(b)), h(b), c) = \sigma f(g(y), y, c)$.

Lemme :

- 1 L'algorithme termine.
- 2 Si σ est un unificateur d'un problème $\mathcal{P} = \{x_1 \doteq t_1, \dots, x_n \doteq t_n\}$, alors $\sigma = \sigma \circ \vec{P}$.
- 3 Si une règle transforme un problème \mathcal{P} dans un problème \mathcal{S} , alors les unificateurs de \mathcal{P} et \mathcal{S} sont les mêmes.
- 4 Si \mathcal{P} est en forme résolue, alors \vec{P} est solution du problème \mathcal{P} .

Théorème : (Correction) Si l'algorithme trouve une substitution \vec{S} pour le problème P , alors P est unifiable et \vec{S} est un unificateur principal de P .
Autrement dit,
Si P n'est pas unifiable, l'algorithme échoue.

Théorème : (Complétude) Si le système P est unifiable, alors l'algorithme calcule l'unificateur principal de P .
Autrement dit,
Si l'algorithme échoue, alors le système P n'est pas unifiable.

La résolution pour le calcul des prédicats

Résolution

Méthode par réfutation :

On suppose que A est close (pas de variables libres).
Dans ce cas, avoir un modèle et être satisfaisable est la même notion.
 A est valide ssi $\neg A$ est insatisfaisable (n'a pas de modèle) ssi en appliquant la méthode de résolution à $\neg A$ on obtient une contradiction (réfutation).

- Forme prénexe
- Skolemisation
- Forme clausale
- Règles de résolution
- Correction et complétude

$$\begin{aligned}
 \forall x. A &\equiv \neg \exists x. \neg A \\
 \neg \forall x. A &\equiv \exists x. \neg A \\
 \exists x. A &\equiv \neg \forall x. \neg A \\
 \neg \exists x. A &\equiv \forall x. \neg A \\
 \forall x. (A \wedge B) &\equiv \forall x. A \wedge \forall x. B \\
 \exists x. (A \vee B) &\equiv \exists x. A \vee \exists x. B \\
 \exists x. (A \rightarrow B) &\equiv \forall x. A \rightarrow \exists x. B \\
 \forall x. \forall y. A &\equiv \forall y. \forall x. A \\
 \exists x. \exists y. A &\equiv \exists y. \exists x. A
 \end{aligned}$$

D'autres exemples d'équivalence lorsque $x \notin VI(A)$

$$\begin{aligned}
 \forall x. A &\equiv \exists x. A && \equiv A \\
 \forall x. (A \wedge B) &\equiv A \wedge \forall x. B \\
 \exists x. (A \wedge B) &\equiv A \wedge \exists x. B \\
 \forall x. (A \vee B) &\equiv A \vee \forall x. B \\
 \exists x. (A \vee B) &\equiv A \vee \exists x. B \\
 \exists x. (A \rightarrow B) &\equiv A \rightarrow \exists x. B \\
 \forall x. (A \rightarrow B) &\equiv A \rightarrow \forall x. B \\
 \exists x. (B \rightarrow A) &\equiv \forall x. B \rightarrow A \\
 \forall x. (B \rightarrow A) &\equiv \exists x. B \rightarrow A
 \end{aligned}$$

Forme prénexe

Définition : Une formule G est dite en **forme prénexe** ssi elle est de la forme $Q_1 x_1 \dots Q_n x_n A$, où chaque Q_i est un quantificateur \forall ou \exists et A ne contient pas de quantificateur.

Théorème : Pour toute formule G il existe une formule G' en forme prénexe t.q $G \equiv G'$.

Exemples

$$\begin{aligned}
 (\forall x p(x)) \wedge r(x) &\equiv \forall y (p(y) \wedge r(x)) \\
 (\forall x p(x)) \wedge (\forall x r(x)) &\equiv \forall x (p(x) \wedge r(x)) \\
 (\forall x p(x)) \wedge (\forall x r(x)) &\equiv \forall x \forall y (p(x) \wedge r(y)) \\
 (\forall x p(x)) \vee (\forall x r(x)) &\equiv \forall x \forall y (p(x) \vee r(y)) \\
 (\forall x p(x)) \rightarrow (\exists y r(y)) &\equiv \exists x \exists y (p(x) \rightarrow r(y)) \\
 \neg[(\forall x p(x)) \rightarrow (\exists y r(y))] &\equiv \forall x \forall y \neg(p(x) \rightarrow r(y))
 \end{aligned}$$

Exemples

G' est la skolemisation partielle de G .

$$\begin{array}{ccc}
 G & & G' \\
 \forall x \forall y \exists z r(x, z) & & \forall x \forall y r(x, f(x, y)) \\
 \forall x \exists z \forall y \exists w \exists w' s(w', x, h(z)) & & \forall x \forall y \exists w \exists w' s(w', x, h(g(x))) \\
 \exists x \exists z \forall y s(x, x, z) & & \exists z \forall y s(a, a, z)
 \end{array}$$

Skolemisation partielle

Définition : Soit G une formule prénexe de la forme $\forall x_1 \dots \forall x_n \exists x_{n+1} Q_{n+2} x_{n+2} Q_{n+i} x_{n+i} A$. Soit f un **nouveau** symbole de fonction n -aire. La formule $\forall x_1 \dots \forall x_n Q_{n+2} x_{n+2} Q_{n+i} x_{n+i} \{x_{n+1} \leftarrow f(x_1, \dots, x_n)\}(A)$ est la **skolemisation partielle** de G .

Lemme : Soit G une formule prénexe et soit G' sa skolemisation partielle. Alors G a un modèle ssi G' a un modèle.

Skolemisation

Définition : Soit G une formule prénexe ayant n quantificateurs \exists . La **Skolemisation** de G est la formule obtenue par n applications successives de la skolemisation partielle.

Théorème : Soit G' la Skolemisation de la formule G . Alors

- Si G contient n quantificateurs \exists , G' contient **au plus** n nouveaux symboles de fonction.
- G' ne contient pas de quantificateurs \exists .
- G a un modèle ssi G' a un modèle.

Exemples

G' est la Skolemisation de G .

$$\begin{array}{l}
 G \\
 \forall x \forall y \exists z r(x, z) \\
 \forall x \exists z \forall y \exists w \exists w' s(w', x, h(z)) \\
 \exists x \exists z \forall y s(x, x, z)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 G' \\
 \forall x \forall y r(x, f(x, y)) \\
 \forall x \forall y s(i(x, y), x, h(g(x))) \\
 \forall y s(a, a, b)
 \end{array}$$

Exemples

\top est une FNC. \perp est une FNC.

$\neg p(h(x))$ est une FNC.

$\neg p(h(x)) \vee p(y)$ est une FNC.

$(\neg p(h(x)) \vee p(y)) \wedge p(z)$ est une FNC.

$(\neg p(h(x)) \vee p(y)) \wedge (p(z) \vee \neg p(h(x)))$ est une FNC.

$\neg(p(x) \vee \neg p(z))$ n'est pas une FNC.

$p(x) \wedge (\neg p(z) \rightarrow p(h(z)))$ n'est pas une FNC.

$p(x) \vee (\neg p(z) \wedge p(h(z)))$ n'est pas une FNC.

Forme normal conjonctive pour le calcul des prédicats

Définition :

- Un **littéral** est une formule de la forme $r(t_1, \dots, t_n)$ ou $\neg r(t_1, \dots, t_n)$.
- Une **clause** est une formule de la forme $L_1 \vee \dots \vee L_q$, $q \geq 0$, où chaque L_i est un littéral. La **clause vide** s'écrit \perp .
- Une formule est en **forme normal conjonctive (FNC)** ssi elle est de la forme $C_1 \wedge \dots \wedge C_n$, $n \geq 0$, où chaque C_i est une clause. La **FNC vide** s'écrit \top .

Existence de la FNC

Théorème : Pour toute formule A **sans quantificateurs**, il existe une formule A' en FNC telle que $A' \equiv A$.

Preuve : Comme dans le cas propositionnel : utiliser les équivalences suivantes:

$A \rightarrow B$	\equiv	$\neg A \vee B$
$\neg \neg A$	\equiv	A
$\neg(A \wedge B)$	\equiv	$\neg A \vee \neg B$
$\neg(A \vee B)$	\equiv	$\neg A \wedge \neg B$
$A \vee (B \wedge C)$	\equiv	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$

La FNC d'une formule n'est pas unique.

Exemple:

$$p \vee \neg p \equiv p \vee p \vee \neg p \equiv \top.$$

Donc,

$p \vee \neg p$, $p \vee p \vee \neg p$ et \top sont trois FNC de la formule $p \vee \neg p$.

Mise sous forme clausale

Théorème : Pour toute formule G il existe un ensemble de clauses \mathcal{C}_G t.q

- $VI(\mathcal{C}_1) \cap VI(\mathcal{C}_2) = \emptyset$ si $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \in \mathcal{C}_G$ et $\mathcal{C}_1 \neq \mathcal{C}_2$
- G a un modèle ssi \mathcal{C}_G a un modèle.

Preuve :

- 1 Utiliser l'équivalence $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$ pour éliminer les implications de G . On obtient une formule $G_1 \equiv G$.
- 2 Calculer G_2 , la forme prénexe de G_1 . On a $G_2 \equiv G_1$.
- 3 Calculer $G_3 = \forall x_1 \dots \forall x_m A$ ($m \geq 0$), la Skolemisation de G_2 . On a que G_3 a un modèle ssi G_2 a un modèle
- 4 Calculer la forme normal conjonctive de A . On obtient $G_4 = \forall x_1 \dots \forall x_m (C_1 \wedge \dots \wedge C_n)$ ($m \geq 0, n \geq 0$). On a $G_4 \equiv G_3$.
- 5 Donner comme résultat $\mathcal{C}_G = \{C'_1, \dots, C'_n\}$ qui est un renommage de $\{C_1, \dots, C_n\}$ afin d'éviter les variables communes. On a que G a un modèle ssi \mathcal{C}_G a un modèle.

Vers la mise sous forme clausale

Lemme : Soit $\Delta = \{A_1, \dots, A_n\}$ un ensemble de formules sans quantificateurs. Soit $FNC_\Delta = \{E_1, \dots, E_n\}$ un ensemble de formules où chaque E_i est une FNC de A_i . Soit \mathcal{C}_Δ l'ensemble de clauses de FNC_Δ construit comme

$$\bigcup_{1 \leq i \leq n} \{D_{i_1}, \dots, D_{i_k} \mid E_i \in FNC_\Delta \text{ et } E_i = D_{i_1} \wedge \dots \wedge D_{i_k}\}.$$

Alors l'ensemble de formules Δ a un modèle ssi l'ensemble de clauses \mathcal{C}_Δ a un modèle.

Exemple

$$G = \neg[[Q(a) \wedge (\forall x Q(x) \rightarrow Q(f(x)))] \rightarrow \exists z Q(f(f(z)))]$$

- 1 $G_1 = \neg[\neg[Q(a) \wedge (\forall x (\neg Q(x) \vee Q(f(x))))] \vee \exists z Q(f(f(z)))]$.
- 2 $G_2 = \forall z \forall x \neg[\neg[Q(a) \wedge (\neg Q(x) \vee Q(f(x)))] \vee Q(f(f(z)))]$.
- 3 $G_3 = G_2$.
- 4 $G_4 = \forall z \forall x [[Q(a) \wedge (\neg Q(x) \vee Q(f(x)))] \wedge \neg Q(f(f(z)))]$.
- 5 $\mathcal{C}_G = \{Q(a), \neg Q(x) \vee Q(f(x)), \neg Q(f(f(z)))\}$.

Exemple

$$G = (\exists y r(x, y) \vee \forall z q(z, z)) \wedge (\neg \forall x p(x)).$$

- 1 $G_1 = G.$
- 2 $G_2 = \exists x' \exists y \forall z (r(x, y) \vee q(z, z)) \wedge (\neg p(x')).$
- 3 $G_3 = \forall z (r(x, b) \vee q(z, z)) \wedge (\neg p(a)).$
- 4 $G_4 = G_3.$
- 5 $C_G = \{r(x, b) \vee q(z, z), \neg p(a)\}.$

Rappel : Le cas particulier de la règle coupure lorsque $r(s_1, \dots, s_n)$ et $r(t_1, \dots, t_n)$ sont unifiables :

$$\frac{r(s_1, \dots, s_n) \quad \neg r(t_1, \dots, t_n)}{\perp}$$

Notation : Comme dans le cas propositionnel, on écrit $\Delta \vdash_R A$ si A est dérivée à partir de l'ensemble Δ par résolution et $\Delta \vdash_R \perp$ si \perp est dérivée à partir de l'ensemble Δ par résolution.

Notion de réfutation

Un ensemble de formules est **réfutable** ssi en lui appliquant la méthode de résolution on obtient \perp .

Résolution pour le calcul des prédicats

Axiomes : aucun

Règles d'inférence :

$$\frac{D \vee r(s_1, \dots, s_n) \quad C \vee \neg r(t_1, \dots, t_n)}{\sigma(D \vee C)} \text{ (coupure)}$$

où σ est l'unificateur principal du problème $\{s_1 \doteq t_1, \dots, s_n \doteq t_n\}$

$$\frac{D \vee L \vee L'}{\sigma(D \vee L)} \text{ (factorisation)}$$

où

- $L = r(s_1, \dots, s_n)$ (resp. $L = \neg r(s_1, \dots, s_n)$) et $L' = r(t_1, \dots, t_n)$ (resp. $L' = \neg r(t_1, \dots, t_n)$)
- σ est l'unificateur principal du problème $\{s_1 \doteq t_1, \dots, s_n \doteq t_n\}$

Exemple I

Montrer que l'ensemble suivant est contradictoire.

$$H_1: \exists x_0 t(x_0)$$

$$H_2: \forall x_2 (d(x_2) \rightarrow \forall x_1 r(x_1, x_2))$$

$$H_3: \forall x_3 \forall x_4 (\neg(t(x_3) \rightarrow \neg q(x_4)) \rightarrow \neg r(x_3, x_4))$$

$$H_4: \neg \forall x_5 (\neg d(x_5) \vee \neg q(x_5))$$

D'abord, on donne un ensemble de **clauses** C équivalent à $\{H_1, H_2, H_3, H_4\}$.

$$C = \{t(a), \neg d(x_2) \vee r(x_1, x_2), \neg t(x_3) \vee \neg q(x_4) \vee \neg r(x_3, x_4), d(b), q(b)\}$$

Puis on donne une **réfutation** de l'ensemble C par la méthode de résolution.

$$\frac{\frac{\frac{\neg t(x_3) \vee \neg q(x_4) \vee \neg r(x_3, x_4) \quad t(a)}{\neg q(x_4) \vee \neg r(a, x_4)} \quad q(b)}{\neg d(x_2) \vee r(x_1, x_2) \quad \neg r(a, b)}{d(b) \quad \neg d(b)}{\perp}$$

Exemple II

Montrer que la formule J_4 est conséquence logique de la formule $J_1 \wedge J_2 \wedge J_3$.

$$J_1: \exists x_0 t(x_0)$$

$$J_2: \forall x_2 (d(x_2) \rightarrow \forall x_1 r(x_1, x_2))$$

$$J_3: \forall x_3 \forall x_4 \neg(t(x_3) \rightarrow \neg q(x_4)) \rightarrow \neg r(x_3, x_4)$$

$$J_4: \forall x_5 (\neg d(x_5) \vee \neg q(x_5))$$

D'abord on utilise le fait que $J_1 \wedge J_2 \wedge J_3 \models J_4$ ssi $J_1 \wedge J_2 \wedge J_3, \neg J_4$ est réfutable. Ceci car les formules n'ont pas de variables libres.

On donne donc un ensemble de **clauses** C équivalent à $\{J_1 \wedge J_2 \wedge J_3, \neg J_4\}$.

$$C = \{t(a), \neg d(x_2) \vee r(x_1, x_2), \neg t(x_3) \vee \neg q(x_4) \vee \neg r(x_3, x_4), d(b), q(b)\}$$

On donne une **réfutation** de l'ensemble C par la méthode de résolution.

Exemple II

$$\frac{\frac{\frac{\neg t(x_3) \vee \neg q(x_4) \vee \neg r(x_3, x_4) \quad t(a)}{\neg q(x_4) \vee \neg r(a, x_4)} \quad q(b)}{\neg r(a, b)}}{\neg d(x_2) \vee r(x_1, x_2)} \quad d(b)}{\neg d(b)} \perp$$

Exemple III

Montrer que la formule $J : \forall x p(x) \vee \exists y \neg p(y)$ est valide.

D'abord on utilise le fait que J est valide ssi $\neg J$ est réfutable.

On donne donc un ensemble de **clauses** C équivalent à $\{\neg J\}$.

$$C = \{\neg p(a), p(y)\}$$

On donne une **réfutation** de l'ensemble C par la méthode de résolution.

$$\frac{\neg p(a) \quad p(y)}{\perp}$$

Autres exemples avec formalisation : au tableau

Propriétés de la résolution

Théorème : La résolution est **correcte**, i.e., si $\Delta \vdash_R A$, alors le séquent $\Delta \vdash A$ est valide et si $\Delta \vdash_R \perp$, alors Δ n'a pas de modèle.

Théorème : La résolution est **complète** pour la réfutation, i.e., si Δ n'a pas de modèle, alors $\Delta \vdash_R \perp$.