Les systèmes de preuves syntaxiques

Systèmes de preuves syntaxiques

- Systèmes "à la Hilbert"
- Calculs des séquents :
  - Déduction naturelle
  - Calcul de Gentzen
- Systèmes de réfutation :
  - Résolution
  - Tableaux

La méthode axiomatique de Hilbert

David Hilbert: mathématicien allemand (1862 - 1943)

Systèmes logiques axiomatiques

- Un ensemble de formules.
- Un sous-ensemble de formules distinguées appelées axiomes.
- Un ensemble de règles d'inférence de la forme:

$$\frac{\texttt{Hyp1} \quad \texttt{Hypn}}{\texttt{Concl}}$$

Exemple : système $H_{\rightarrow}$

- Formules : l'ensemble inductif construit à partir de toutes les lettres propositionnelles et du symbole binaire $\rightarrow$.
- Axiome 1 : toutes les formules de la forme $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
- Axiome 2 : toutes les formules de la forme $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
- Règle de dérivation :

$$\frac{A \rightarrow B \qquad A}{B} \text{(Modus Ponens)}$$

Dérivation sous forme de séquence (premier exemple)

(a) Axiome 2 : $(p \rightarrow ((p \rightarrow p) \rightarrow p)) \rightarrow ((p \rightarrow (p \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow p))$

(b) Axiome 1 : $(p \rightarrow ((p \rightarrow p) \rightarrow p))$

(c) Modus ponens sur a et b : $(p \rightarrow (p \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow p)$

(d) Axiome 1 : $(p \rightarrow (p \rightarrow p))$

(e) Modus ponens sur c et d : $(p \rightarrow p)$

Notation : $\emptyset \vdash_{H_{\rightarrow}} (p \rightarrow p)$ ou $\vdash_{H_{\rightarrow}} (p \rightarrow p)$

Dérivation sous forme de séquence (deuxième exemple)

On fixe un ensemble d'hypothèses. Par exemple $\Delta = \{p\}$.

(a) Axiome 1 : $(p \rightarrow (p \rightarrow p))$

(b) Formule dans Δ : p

(c) Modus ponens sur a et b : $(p \rightarrow p)$

Notation : $\{p\} \vdash_{H_{\rightarrow}} (p \rightarrow p)$ ou $p \vdash_{H_{\rightarrow}} (p \rightarrow p)$

Notion de dérivation sous forme de séquence

Une dérivation de la formule A à partir d'un ensemble d'hypothèses Δ est une séquence de formules $F_1, \ldots, F_n$ telle que pour chaque i :

- F_i est une hypothèse de Δ, ou
- F_i est une instance d'axiome, ou
- F_i est obtenue par une règle d'inférence à partir de $F_{e_1}, \ldots, F_{e_k}$ avec $e_1, \ldots, e_k < i$ et
- la dernière formule de la séquence est A.

Notation : S'il y a une dérivation de A à partir de Δ, nous écrivons $\Delta \vdash_{H_{\rightarrow}} A$. Nous écrivons $\Delta, B \vdash_{H_{\rightarrow}} A$ pour $\Delta \cup \{B\} \vdash_{H_{\rightarrow}} A$.

Dérivation sous forme d'arbre

$$\dfrac{\dfrac{(p \to (p \to p))\,(ax1) \quad p \in \Delta}{(p \to p)} \qquad p \in \Delta}{p}$$

Nous avons $p \vdash_{H_\to} p$.

Notion de dérivation sous forme d'arbre

Définition : La dérivation de la formule A à partir d'un ensemble d'hypothèses Δ est un arbre fini de *formules* tel que

- chaque feuille est soit une hypothèse de Δ soit un axiome
- si B est le père des $B_1 \dots B_n$, alors B est obtenu par l'application d'une règle d'inférence sur les formules $B_1 \dots B_n$.
- la formule A est la racine de l'arbre.

La notion de *théorème*

La formule A est un théorème ssi il existe une dérivation de la formule A à partir d'un ensemble d'hypothèses vide.

Exemple : La formule $p \to p$ est un théorème dans le système $H_\to$.

Théorème de la déduction

Théorème : Soit H un système de Hilbert quelconque tel que

- l'ensemble d'axiomes de H contient au moins Axiome 1 + Axiome 2
- la seule règle d'inférence de H est le Modus Ponens.

Alors, $\Delta \vdash_H A \to B$ ssi $\Delta, A \vdash_H B$.

Preuve : au tableau

Exemple : Montrer que $(p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r))$ est un théorème : par la propriété précédante, on démontre que r est dérivable à partir de $\Delta = \{p \to (q \to r), q, p\}$.

Dérivation comme séquence

$\Delta = \{p \to (q \to r), p, q\}$

(a) Élement dans Δ : $p \to (q \to r)$

(b) Élement dans Δ : p

(c) Modus Ponens sur a et b : $q \to r$

(d) Élement dans Δ : q

(e) Modus Ponens sur c et d : r

Dérivation comme arbre

$\Delta = \{p \to (q \to r), p, q\}$

$$\dfrac{\dfrac{p \to (q \to r) \in \Delta \qquad p \in \Delta}{(q \to r)} \qquad q \in \Delta}{r}$$

Un autre exemple : système H_{prop}

- Axiome 1 : $A \to (B \to A)$
- Axiome 2 : $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
- Axiome 3 : $A \to (B \to (A \wedge B))$
- Axiome 4 : $A \to (A \vee B)$
- Axiome 5 : $B \to (A \vee B)$
- Axiome 6 : $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$
- Axiome 7 : $(A \wedge B) \to A$
- Axiome 8 : $(A \wedge B) \to B$
- Axiome 9 : $(A \to B) \to ((C \to B) \to ((A \vee C) \to B))$
- Axiome 10 : $\neg\neg A \to A$
- Règle de dérivation : Modus Ponens

Exemple de dérivation

Soit $D = A \vee \neg A$ et $\Delta = \{\neg D\}$.

(a) Axiome 4 : $A \to (A \vee \neg A)$ (i.e. $A \to D$)

(b) Axiome 1 : $\neg D \to (A \to \neg D)$

(c) Δ : $\neg D$

(d) Modus ponens b et c : $A \to \neg D$

(e) Axiome 6 : $(A \to D) \to ((A \to \neg D) \to \neg A)$

(f) Modus ponens a,e :$(A \to \neg D) \to \neg A$

(g) Modus ponens d,f : $\neg A$

(h) Axiome 5 : $\neg A \to (A \vee \neg A)$

(i) Modus ponens g, h : $(A \vee \neg A)$

Donc, $\neg D \vdash_{H_{prop}} D$

Exemple de dérivation

Par le théorème de la déduction nous avons une dérivation de $\neg D \to D$ à partir de l'ensemble vide. Pareil pour $\neg D \to \neg D$. On construit maintenant une nouvelle dérivation comme suit :

(a) Obs prec : $\neg D \to D$
(b) Obs prec : $\neg D \to \neg D$
(c) Axiome 6 : $(\neg D \to D) \to ((\neg D \to \neg D) \to \neg\neg D)$
(d) Modus ponens, c, a, b : $\neg\neg D$
(e) Axiome 10 : $\neg\neg D \to D$
(f) Modus ponens e, d : D

Enfin, nous avons une dérivation de D à partir de l'ensemble vide, donc $D = A \vee \neg A$ est un théorème dans H_{prop}.

Théorème de l'affaiblissement

Théorème : Si $\Delta \vdash A$ est dérivable dans le système H_{prop}, alors $\Delta, B \vdash A$ est aussi dérivable dans le système H_{prop} pour toute formule B.

Dit autrement,
Si $\Delta \vdash_{H_{prop}} A$, alors $\Delta, B \vdash_{H_{prop}} A$ pour toute formule B.

Propriétés du système H_{prop}

Théorème : Le système H_{prop} est correct, i.e., si $\Delta \vdash_{H_{prop}} A$, alors $\Delta \models A$.

Preuve : Par induction sur l'arbre de derivation de $\Delta \vdash_{H_{prop}} A$.

Théorème : Le système H_{prop} est complet, i.e., si $\Delta \models A$, alors $\Delta \vdash_{H_{prop}} A$.

Preuve : Dans la suite du cours.

Les séquents en logique

Gerhard Gentzen: mathématicien allemand (1909 - 1945)

La notion de séquent

Définition : Un séquent est un couple de la forme $\Delta \vdash \Gamma$, où Δ et Γ sont des *multi-ensembles* de formules.

La formule associée à un séquent de la forme $A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_k$ est donnée par :

$$A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B_1 \vee \ldots \vee B_k$$

Rappel : une conjonction vide est vraie, une disjonction vide est fausse.

Sémantique d'un séquent

Définition : Un séquent $A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_k$ est valide ssi sa formule associée $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \to (B_1 \vee \ldots \vee B_k)$ est valide.

Les ingrédients d'un calcul de séquents

Pour définir un calcul de séquents :

- On fixe des séquents axiomes (des séquents particuliers)
- On fixe des règles d'inférence de la forme $\dfrac{\Delta_1 \vdash \Gamma_1 \ldots \Delta_n \vdash \Gamma_n}{\Delta \vdash \Gamma}$

Systèmes avec séquents

Définition : La dérivation du séquent $\Delta \vdash \Gamma$ dans un système $\mathcal{S}$ quelconque, ou $\mathcal{S}$-dérivation de $\Delta \vdash \Gamma$, est un arbre fini de *séquents* tel que

- chaque feuille est un axiome de $\mathcal{S}$.
- si $\Lambda \vdash \Phi$ est le père de n séquents $\Lambda_1 \vdash \Phi_1$ et ... et $\Lambda_n \vdash \Phi_n$, alors $\Lambda \vdash \Phi$ est obtenu par l'application d'une règle d'inférence de $\mathcal{S}$ sur ses enfants $\Lambda_1 \vdash \Phi_1$ et ... et $\Lambda_n \vdash \Phi_n$.
- la racine de l'arbre est le séquent $\Delta \vdash \Gamma$.

Notation : On écrit $\Delta \vdash_{\mathcal{S}} \Gamma$ pour dire que le séquent $\Delta \vdash \Gamma$ est $\mathcal{S}$-dérivable et on écrit simplement $\Delta \vdash \Gamma$ pour parler du séquent en tant qu'objet.

Preuves et théorèmes

Définition : Soit $\mathcal{S}$ un système avec séquents. Une preuve d'un séquent $\Delta \vdash \Gamma$ dans $\mathcal{S}$ est une dérivation de $\Delta \vdash \Gamma$ dans $\mathcal{S}$. Un théorème de $\mathcal{S}$ est un séquent de la forme $\emptyset \vdash \Gamma$ ayant une preuve dans $\mathcal{S}$.

Remarque

Un système axiomatique peut aussi se voir comme un calcul avec séquents. Ainsi par exemple, pour $H_\rightarrow$:

- Les séquents axiomes sont de la forme

$$\begin{array}{ll} \Delta \vdash & A \text{ (si } A \in \Delta) \\ \Delta \vdash & A \rightarrow (B \rightarrow A) \\ \Delta \vdash & (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \end{array}$$

- La règle d'inférence est de la forme

$$\frac{\Delta \vdash A \rightarrow B \qquad \Delta \vdash A}{\Delta \vdash B}$$

Système $DN_\rightarrow$: déduction naturelle pour $\rightarrow$

Formules : l'ensemble inductif construit à partir de toutes les lettres propositionnelles et du symbole binaire $\rightarrow$.
Axiome : $\Delta, A \vdash A$
Règles d'inférence :

$$\frac{\Delta, A \vdash B}{\Delta \vdash A \rightarrow B}\ (\rightarrow\ i) \qquad \frac{\Delta \vdash A \qquad \Delta \vdash A \rightarrow B}{\Delta \vdash B}\ (\rightarrow\ e)$$

Exemple de dérivation dans $DN_\rightarrow$

$$\cfrac{\cfrac{A, B \vdash A \quad (axiome)}{A \vdash B \rightarrow A}\ (\rightarrow\ i)}{\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)}\ (\rightarrow\ i)$$

Notation : $\emptyset \vdash_{DN_\rightarrow} A \rightarrow (B \rightarrow A)$ ou $\vdash_{DN_\rightarrow} A \rightarrow (B \rightarrow A)$

Nous avons démontré l'axiome 1 de $H_\rightarrow$ dans le système $DN_\rightarrow$.
De manière similaire on peut démontrer
$\Delta \vdash_{DN_\rightarrow} A \rightarrow (B \rightarrow A)$ pour tout Δ.

Un autre exemple de dérivation dans $DN_\to$

Soit $\Gamma = A \to (B \to C), A \to B, A$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash A \to (B \to C) \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B \to C}\,(\to e) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A \to B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\,(\to e)}{(A \to (B \to C)), (A \to B), A \vdash C}}{(A \to (B \to C)), (A \to B) \vdash A \to C}}{(A \to (B \to C)) \vdash (A \to B) \to (A \to C)}}{\vdash (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))}$$

Nous avons démontré l'axiome 2 de $H_\to$ dans $DN_\to$.
De manière similaire on peut démontrer
$\Delta \vdash_{DN_\to} (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ pour tout Δ.

Équivalence entre $H_\to$ et $DN_\to$ (i)

Théorème : Si $\Delta \vdash_{H_\to} A$, alors $\Delta \vdash_{DN_\to} A$.

Preuve : Par induction sur la dérivation de A à partir de Δ dans le système $H_\to$.

- $A \in \Delta$
- A est une instance d'axiome dans $H_\to$
- La dernière règle est le modus ponens.

Équivalence entre $H_\to$ et $DN_\to$ (ii)

Théorème : Si $\Delta \vdash_{DN_\to} A$, alors $\Delta \vdash_{H_\to} A$.

Preuve : Par induction sur la $DN_\to$-dérivation de $\Delta \vdash A$.

- Si A est axiome dans $DN_\to$, alors c'est trivial.
- Si l'arbre se termine par $\to$ i, alors on utilise le théorème de la déduction.
- Si l'arbre se termine par $\to$ e, alors on utilise modus ponens.

Système DN_{prop} : déduction naturelle pour $\to, \vee, \wedge, \neg$

Axiome : $\Delta, A \vdash A$
Règles d'inférence :

$$\dfrac{\Delta, A \vdash B}{\Delta \vdash A \to B}\,(\to\ i) \qquad \dfrac{\Delta \vdash A \qquad \Delta \vdash A \to B}{\Delta \vdash B}\,(\to\ e)$$

$$\dfrac{\Delta \vdash A \qquad \Delta \vdash B}{\Delta \vdash A \wedge B}\,(\wedge\ i)$$

$$\frac{\Delta \vdash A \wedge B}{\Delta \vdash A}\ (\wedge\ e) \qquad \frac{\Delta \vdash A \wedge B}{\Delta \vdash B}\ (\wedge\ e)$$

$$\frac{\Delta \vdash A}{\Delta \vdash A \vee B}\ (\vee i) \qquad \frac{\Delta \vdash B}{\Delta \vdash A \vee B}\ (\vee i)$$

$$\frac{\Delta \vdash A \vee B \qquad \Delta, A \vdash C \qquad \Delta, B \vdash C}{\Delta \vdash C}\ (\vee e)$$

$$\frac{\Delta, A \vdash B \qquad \Delta, A \vdash \neg B}{\Delta \vdash \neg A}\ (\neg i)$$

$$\frac{\Delta \vdash A \qquad \Delta \vdash \neg A}{\Delta \vdash B}\ (\neg e) \qquad \frac{\Delta \vdash \neg\neg A}{\Delta \vdash A}\ (\neg e)$$

La dernière règle $\neg e$ est connue sous le nom de raisonnement par l'absurde.

Exemple de dérivation dans DN_{prop}

Tiers exclu

$B = A \vee \neg A$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg B, A \vdash A}{\neg B, A \vdash B}\ (\vee i) \qquad \neg B, A \vdash \neg B}{\neg B \vdash \neg A}\ (\neg i)}{\neg B \vdash B}\ (\vee i) \qquad \neg B \vdash \neg B}{\vdash \neg\neg B}\ (\neg i)}{\vdash B}\ (\neg e)$$

Un autre exemple de dérivation dans DN_{prop}

Loi de Peirce

$G = (H \to A) \to A$, $H = A \to B$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg G, H \to A \vdash H \to A \qquad \neg G, H \to A \vdash H}{\neg G, H \to A \vdash A}\ (\to\ e)}{\neg G \vdash G}\ (\to\ i) \qquad \neg G \vdash \neg G}{\vdash \neg\neg G}\ (\neg e)}{\vdash G}\ (\neg e)$$

$G = (H \to A) \to A$, $H = A \to B$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg G, H \to A, A, H \to A \vdash A}{\neg G, H \to A, A \vdash G}\,(\to i) \qquad \neg G, H \to A, A \vdash \neg G}{\neg G, H \to A, A \vdash B}\,(\neg e)}{\neg G, H \to A \vdash H}\,(\to i)$$

Comment transformer des dérivations dans DN_{prop}

Théorème : (Affaiblissement) Si $\Delta \vdash A$ est dérivable dans le système DN_{prop}, alors $\Delta, B \vdash A$ l'est aussi (et la hauteur de l'arbre de dérivation ne change pas).

Théorème : (Contraction) Si $\Delta, B, B \vdash A$ est dérivable dans le système DN_{prop}, alors $\Delta, B \vdash A$ l'est aussi.

Observations

Le raisonnement par l'absurde entraîne le tiers exclu et la loi de Peirce.
Mais, aussi

- Le tiers exclu entraîne la loi de Peirce.
  Soit $F = (A \to B) \to A$.

$$\dfrac{\Gamma \vdash A \vee \neg A \qquad \dfrac{\Gamma, F, A \vdash A}{\Gamma, A \vdash F \to A} \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma, \neg A, F \vdash F \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma, \neg A, F, A \vdash A \qquad \Gamma, \neg A, F, A \vdash \neg A}{\Gamma, \neg A, F, A \vdash B}}{\Gamma, \neg A, F \vdash A \to B}}{\Gamma, \neg A, F \vdash A}}{\Gamma, \neg A \vdash F \to A}}{\Gamma \vdash ((A \to B) \to A) \to A}$$

Observations

- La loi de Peirce entraîne le raisonnement par l'absurde.
  On considère $\neg A = A \to \bot$. ($I(\bot) = F$ pour toute interprétation I)

$$\dfrac{\Delta \vdash ((A \to \bot) \to A) \to A \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Delta \vdash \neg\neg A}{\Delta, \neg A \vdash \neg\neg A}\,(\text{Affaibl.}) \qquad \Delta, \neg A \vdash \neg A}{\Delta, \neg A \vdash A}}{\Delta \vdash \neg A \to A}}{\Delta \vdash A}$$

Équivalence entre H_{prop} et DN_{prop} (i)

Théorème : Si $\Delta \vdash_{H_{prop}} A$, alors $\Delta \vdash_{DN_{prop}} A$.

Preuve : Par induction sur la dérivation de A à partir de Δ dans le système H_{prop}.

Équivalence H_{prop} et DN_{prop} (ii)

Théorème : Si $\Delta \vdash_{DN_{prop}} A$, alors $\Delta \vdash_{H_{prop}} A$.

Preuve : Par induction sur la DN_{prop}-dérivation de $\Delta \vdash A$.

- Si axiome dans DN_{prop}, alors c'est trivial.
- Si l'arbre se termine par $\rightarrow$ i, alors on utilise le théorème de la déduction.
- Si l'arbre se termine par $\rightarrow$ e, alors on utilise modus ponens.
- Si l'arbre se termine par $\wedge$ i, alors on utilise l'axiome 3.
- Si l'arbre se termine par $\wedge$ e, alors on utilise les axiomes 7 et 8.
- Si l'arbre se termine par $\vee$ i, alors on utilise les axiomes 4 et 5.
- Si l'arbre se termine par $\vee$ e, alors on utilise le théorème de la déduction et l'axiome 9.

Suite de la preuve

- Si l'arbre se termine par $\neg$ i, alors on utilise le théorème de la déduction et l'axiome 6.
- Si l'arbre se termine par la seconde règle de $\neg$ e, alors on utilise l'axiome 10.
- Si l'arbre se termine par la première règle de $\neg$ e, alors on raisonne comme suit. Si on dérive A et $\neg A$, alors avec deux instances de l'axiome 1 $(A \rightarrow (\neg B \rightarrow A))$ et $(\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A))$ on obtient $\neg B \rightarrow A$ et $\neg B \rightarrow \neg A$. Avec l'axiome 6 $(\neg B \rightarrow A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg\neg B)$, on obtient $\neg\neg B$, et avec l'axiome 10 $\neg\neg B \rightarrow B$ on obtient B.

Propriétés du système DN_{prop}

Théorème : Le système DN_{prop} est correct, i.e., si $\Delta \vdash_{DN_{prop}} A$, alors $\Delta \vdash A$ est valide.

Théorème : Le système DN_{prop} est complet, i.e, si $\Delta \vdash A$ est valide, alors $\Delta \vdash_{DN_{prop}} A$.

Calcul de Gentzen LK

Axiome : $A \vdash A$

Règles d'inférence structurelles :

$$\frac{\Delta, A, A \vdash \Gamma}{\Delta, A \vdash \Gamma} \ (contraction\ g) \qquad \frac{\Delta \vdash \Gamma, A, A}{\Delta \vdash \Gamma, A} \ (contraction\ d)$$

$$\frac{\Delta \vdash \Gamma}{\Delta, A \vdash \Gamma} \ (affaiblissement\ g) \qquad \frac{\Delta \vdash \Gamma}{\Delta \vdash \Gamma, A} \ (affaiblissement\ d)$$

Règles d'inférence logiques :

$$\frac{\Delta \vdash \Gamma, A}{\Delta, \neg A \vdash \Gamma} \ (\neg\ g) \qquad \frac{\Delta, A \vdash \Gamma}{\Delta \vdash \Gamma, \neg A} \ (\neg\ d)$$

$$\frac{\Delta \vdash A, \Gamma \quad \Pi, B \vdash \Lambda}{\Delta, \Pi, A \rightarrow B \vdash \Gamma, \Lambda} \ (\rightarrow\ g) \qquad \frac{\Delta, A \vdash B, \Gamma}{\Delta \vdash A \rightarrow B, \Gamma} \ (\rightarrow\ d)$$

$$\frac{\Delta, A, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \wedge B \vdash \Gamma} \ (\wedge\ g) \qquad \frac{\Delta \vdash A, \Gamma \quad \Delta \vdash B, \Gamma}{\Delta \vdash A \wedge B, \Gamma} \ (\wedge\ d)$$

$$\frac{\Delta, A \vdash \Gamma \quad \Delta, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \vee B \vdash \Gamma} \ (\vee g) \qquad \frac{\Delta \vdash A, \Gamma}{\Delta \vdash A \vee B, \Gamma} \ (\vee d) \qquad \frac{\Delta \vdash B, \Gamma}{\Delta \vdash A \vee B, \Gamma} \ (\vee d)$$

Règles d'inférence coupure :

$$\frac{\Delta \vdash \Gamma, A \quad A, \Lambda \vdash \Pi}{\Delta, \Lambda \vdash \Gamma, \Pi}$$

Dérivation dans LK

On note $\Delta \vdash_{LK} \Gamma$ si le séquent $\Delta \vdash \Gamma$ est dérivable dans le système LK.

Premier exemple de dérivation dans LK

Modus Ponens

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \vdash p\ (ax) \quad q \vdash q\ (ax)}{p, (p \to q) \vdash q}\,(\to\ g)}{p \wedge (p \to q) \vdash q}\,(\wedge\ g)}{\vdash (p \wedge (p \to q)) \to q}\,(\to\ d)$$

Deuxième exemple de dérivation dans LK

Tiers exclu

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \vdash p\ (ax)}{\vdash p, \neg p}\,(\neg\ d)}{\vdash p, p \vee \neg p}\,(\vee\ d)}{\vdash p \vee \neg p, p \vee \neg p}\,(\vee\ d)}{\vdash p \vee \neg p}\,(cont\ d)$$

Troisième exemple de dérivation dans LK

Loi de Peirce

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A\ (ax)}{A \vdash B, A}\,(aff\ d)}{\vdash A \to B, A}\,(\to\ d) \quad A \vdash A\ (ax)}{(A \to B) \to A \vdash A, A}\,(\to\ g)}{(A \to B) \to A \vdash A}\,(cont\ d)}{\vdash ((A \to B) \to A) \to A}\,(\to\ d)$$

Propriétés du système LK

Théorème : (Élimination de coupures) Si $\Delta \vdash \Gamma$ est dérivable dans le système LK, alors il existe une dérivation de $\Delta \vdash \Gamma$ dans LK qui n'utilise pas la règle de coupure.

Équivalence entre la Déduction naturelle et LK

Remarque : Si $\Delta \vdash_{LK} \Gamma$, alors soit Δ soit Γ n'est pas vide.

Théorème : Si $\Delta \vdash_{LK} \Gamma$, alors

- Si $\Delta = \emptyset$, alors $\vdash_{DN_{prop}} \bigvee \Gamma$.
- Si $\Gamma = \emptyset$, alors $\vdash_{DN_{prop}} \bigvee \neg\Delta$.
- Sinon, $\vdash_{DN_{prop}} \bigvee \neg\Delta \vee \bigvee \Gamma$

Théorème : Si $\Delta \vdash_{DN_{prop}} A$, alors $\Delta \vdash_{LK} A$.

Propriétés du système de Gentzen LK

Théorème : Le système LK est correct, i.e., si $\Delta \vdash_{LK} \Gamma$, alors $\Delta \vdash \Gamma$ est valide.

Théorème : Le système LK est complet, i.e., si $\Delta \vdash \Gamma$ est valide, alors $\Delta \vdash_{LK} \Gamma$.

Automatisation : le système $\mathcal{G}$

Axiome : $\Delta, A \vdash \Gamma, A$

Règles d'inférence logiques :

$$\frac{\Delta \vdash \Gamma, A}{\Delta, \neg A \vdash \Gamma}\ (\neg\ g) \qquad \frac{\Delta, A \vdash \Gamma}{\Delta \vdash \Gamma, \neg A}\ (\neg\ d)$$

$$\frac{\Delta \vdash A, \Gamma \quad \Delta, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \rightarrow B \vdash \Gamma}\ (\rightarrow\ g) \qquad \frac{\Delta, A \vdash B, \Gamma}{\Delta \vdash A \rightarrow B, \Gamma}\ (\rightarrow\ d)$$

$$\frac{\Delta, A, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \wedge B \vdash \Gamma}\ (\wedge\ g) \qquad \frac{\Delta \vdash A, \Gamma \quad \Delta \vdash B, \Gamma}{\Delta \vdash A \wedge B, \Gamma}\ (\wedge\ d)$$

$$\frac{\Delta, A \vdash \Gamma \quad \Delta, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \vee B \vdash \Gamma}\ (\vee g) \qquad \frac{\Delta \vdash A, B, \Gamma}{\Delta \vdash A \vee B, \Gamma}\ (\vee d)$$

Règles de coupure :

$$\frac{\Delta \vdash \Gamma, A \quad A, \Lambda \vdash \Pi}{\Delta, \Lambda \vdash \Gamma, \Pi}$$

Dérivation dans $\mathcal{G}$

On note $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$ si le séquent $\Delta \vdash \Gamma$ est dérivable dans le système $\mathcal{G}$.

Premier exemple de dérivation dans $\mathcal{G}$

Tiers exclu

$$\dfrac{\dfrac{p \vdash p\ (ax)}{\vdash p, \neg p}\ (\neg\ d)}{\vdash p \vee \neg p}\ (\vee\ d)$$

Deuxième exemple de dérivation dans $\mathcal{G}$

Loi de Peirce

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \vdash q, p\ (ax)}{\vdash p \to q, p}\ (\to\ d) \quad p \vdash p\ (ax)}{(p \to q) \to p \vdash p}\ (\to\ g)}{\vdash ((p \to q) \to p) \to p}\ (\to\ d)$$

Comment transformer quelques dérivations dans $\mathcal{G}$

Théorème : (Affaiblissement) Si $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$, alors $\Delta, A \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$ et $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} A, \Gamma$.

Théorème : (Contraction) Si $\Delta, A, A \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$, alors $\Delta, A \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$. Si $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma, A, A$, alors $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma, A$ l'est aussi.

Théorème : (Élimination de coupures) Si $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$, alors il existe une dérivation de $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$ qui n'utilise pas la règle de coupure.

Équivalence entre LK et $\mathcal{G}$

Théorème : Si $\Delta \vdash \Gamma$ est dérivable en LK, alors $\Delta \vdash \Gamma$ est dérivable en $\mathcal{G}$.

Théorème : Si $\Delta \vdash \Gamma$ est dérivable en $\mathcal{G}$, alors $\Delta \vdash \Gamma$ est dérivable en LK.

Équivalence entre *DN* et $\mathcal{G}$

Théorème : Si $\Delta \vdash_{DN_{prop}} A$, alors $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} A$.

Remarque : Si $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$, alors soit Δ soit Γ n'est pas vide.

Théorème : Si $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$, alors

- Si $\Delta = \emptyset$, alors $\vdash_{DN_{prop}} \bigvee \Gamma$.
- Si $\Gamma = \emptyset$, alors $\vdash_{DN_{prop}} \bigvee \neg\Delta$.
- Sinon, $\vdash_{DN_{prop}} \bigvee \neg\Delta \vee \bigvee \Gamma$

Propriétés du système $\mathcal{G}$

Théorème : Toute règle de $\mathcal{G}$ de la forme $\dfrac{S_1 \ldots S_n}{S}$ est réversible, i.e., $S_1 \wedge \ldots \wedge S_n$ est valide ssi S est valide.

Théorème : Le système $\mathcal{G}$ est correct, i.e., si $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$, alors $\Delta \vdash \Gamma$ est valide.

Preuve : Par induction sur la dérivation du séquent $\Delta \vdash \Gamma$ dans le système $\mathcal{G}$ à l'aide de la réversibilité et du fait que les axiomes sont des séquents valides.

Propriétés du système $\mathcal{G}$

Théorème : Le système $\mathcal{G}$ est complet, i.e., si $\Delta \vdash \Gamma$ est valide, alors $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$.

Preuve :

- On construit un arbre de dérivation pour le séquent $\Delta \vdash \Gamma$ dans le système $\mathcal{G}$ sans coupures, en appliquant les règles du système "du bas vers le haut" aussi longtemps que possible.
- Ce processus s'arrête nécessairement car tout séquent "hypothèse" est plus petit que le séquent "conclusion" (propriété de sous-formule).
- Puisque le séquent de la racine est valide, tous les séquents introduits par cette construction sont valides d'après le théorème de réversibilité.

Suite de la preuve

- Pour conclure il faut montrer que la construction s'arrête sur des séquents axiomes, c'est à dire, que toute feuille de l'arbre de dérivation est un axiome.
- On raisonne par l'absurde.
- Si le séquent d'une *feuille* contient encore un connecteur logique, alors on peut toujours appliquer une règle du système, ce qui est en contradiction avec le fait que c'était une feuille.
- Si le séquent d'une feuille n'a plus de connecteur logique mais il n'est pas un axiome, il est de la forme $p_1, \ldots, p_m \vdash q_1, \ldots q_n$, avec $p_i \neq q_j$, pour tout i, j.
- L'interprétation qui donne **V** à toutes les lettres p_i et **F** à toutes les lettres q_j falsifie ce séquent. Contradiction avec le fait que ce séquent soit valide.

La résolution en calcul propositionnel

Résolution

John Alan Robinson: philosophe, mathématicien, informaticien anglais/américain (1930 -)

Résolution

Méthode par réfutation :

$$\Delta \models A \text{ ssi } A \text{ s'obtient à partir de } \Delta \text{ par résolution}$$

$$\Delta \models A \text{ ssi } \Delta \cup \{\neg A\} \text{ insatisfaisable ssi } \Delta \cup \{\neg A\} \text{ est réfutable}$$

Forme Normale Conjonctive (FNC)

Définition :

- Un littéral est une formule de la forme p ou $\neg p$, où p est une lettre propositionnelle quelconque.
- Une clause est une formule de la forme $l_1 \vee \ldots \vee l_n$, $n \geq 0$, où chaque l_i est un littéral. La clause vide ($n = 0$) s'écrit $\perp$.
- Une formule est en forme normal conjonctive ssi elle est de la forme $D_1 \wedge \ldots \wedge D_n$, $n \geq 0$, où chaque D_i est une clause.

Forme Normale Disjonctive (FND)

Définition :

- Une conjonction élémentaire est une formule de la forme $l_1 \wedge \ldots \wedge l_n$, $n \geq 0$, où chaque l_i est un littéral.La conjonction élémentaire vide ($n = 0$) s'écrit $\top$.
- Une formule est en forme normal disjonctive ssi elle est de la forme $C_1 \vee \ldots \vee C_n$, $n \geq 0$, où chaque C_i est une conjonction élémentaire.

Existence de la FND et de la FNC

Théorème : Soit A une formule.

- Il existe une formule A_1 en FND telle que $A_1 \equiv A$.
- Il existe une formule A_2 en FNC telle que $A_2 \equiv A$.

Lemme : Soit $\Delta = \{A_1, \ldots, A_n\}$ et $FNC_\Delta = \{E_1, \ldots, E_n\}$ où chaque E_i est une FNC de A_i. Pour chaque E_i de la forme $D_{i_1} \wedge \ldots \wedge D_{i_k}$ on construit $C_{E_i} = \{D_{i_1}, \ldots, D_{i_k}\}$. Soit $C_\Delta = \bigcup_{1 \leq i \leq n} C_{E_i}$. Alors Δ est satisfaisable ssi C_Δ est satisfaisable.

Formes normales et tables de vérité

p	q	r	A
V	**V**	**V**	**F**
V	**V**	**F**	**V**
V	**F**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**F**
F	**V**	**V**	**V**
F	**V**	**F**	**F**
F	**F**	**V**	**F**
F	**F**	**F**	**V**

$$\begin{aligned}
A \equiv \quad & (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee \\
& (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \\
\neg A \equiv \quad & (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee \\
& (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \\
A \equiv \quad & (\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge \\
& (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r)
\end{aligned}$$

Règles de la résolution

Axiomes : aucun
Règles d'inférence :
(D et C sont deux clauses)

$$\frac{D \vee p \qquad C \vee \neg p}{D \vee C} \ (coupure) \qquad \frac{p \qquad \neg p}{\perp} \ \text{(cas particulier)}$$

$$\frac{D \vee p \vee p}{D \vee p} \ (factorisation)$$

Dérivation par résolution

Exemple :

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{p \vee r \vee s \quad r \vee \neg s}{p \vee r \vee r}}{p \vee r} \quad \neg r}{p}$$

Notation : Une dérivation de la clause p à partir de l'ensemble $\{p \vee r \vee s, r \vee \neg s, \neg r\}$ s'écrit

$$\{p \vee r \vee s, r \vee \neg s, \neg r\} \vdash_R p$$

Réfutation

Définition : Un ensemble de clauses Δ est réfutable ssi $\Delta \vdash_R \bot$.

Exemple :

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{p \vee r \vee s \quad r \vee \neg s}{p \vee r \vee r}}{p \vee r} \quad \neg r}{p} \quad \neg p}{\bot}$$

$$\{p \vee r \vee s, r \vee \neg s, \neg r, \neg p\} \vdash_R \bot$$

Propriétés de la résolution

Théorème : La résolution est correcte, i.e., si $\Delta \vdash_R A$, alors $\Delta \models A$ et si $\Delta \vdash_R \bot$, alors Δ est insatisfaisable.

Théorème : La résolution est complète pour la refutation, i.e., si Δ est insatisfaisable, alors $\Delta \vdash_R \bot$.