
Les systèmes de preuves syntaxiques

Systèmes de preuves syntaxiques

- Systèmes "à la Hilbert"
- Calculs des séquents :
 - ▶ Dédution naturelle
 - ▶ Calcul de Gentzen
- Systèmes de réfutation :
 - ▶ Résolution
 - ▶ Tableaux

La méthode axiomatique de Hilbert



David Hilbert: mathématicien allemand (1862 - 1943)

Systèmes logiques axiomatiques

- Un ensemble de **formules**.
- Un sous-ensemble de formules distinguées appelées **axiomes**.
- Un ensemble de **règles d'inférence** de la forme:

$$\frac{\text{Hyp1} \quad \text{Hypn}}{\text{Concl}}$$

Exemple : système H_{\rightarrow}

- **Formules** : l'ensemble inductif construit à partir de toutes les lettres propositionnelles et du symbole binaire \rightarrow .
- **Axiome 1** : **toutes** les formules de la forme $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
- **Axiome 2** : **toutes** les formules de la forme $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
- **Règle de dérivation** :

$$\frac{A \rightarrow B \quad A}{B} \text{ (Modus Ponens)}$$

Dérivation sous forme de séquence (premier exemple)

- (a) **Axiome 2** : $(p \rightarrow ((p \rightarrow p) \rightarrow p)) \rightarrow ((p \rightarrow (p \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow p))$
- (b) **Axiome 1** : $(p \rightarrow ((p \rightarrow p) \rightarrow p))$
- (c) **Modus ponens sur a et b** : $(p \rightarrow (p \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow p)$
- (d) **Axiome 1** : $(p \rightarrow (p \rightarrow p))$
- (e) **Modus ponens sur c et d** : $(p \rightarrow p)$

Notation : $\emptyset \vdash_{H \rightarrow} (p \rightarrow p)$ ou $\vdash_{H \rightarrow} (p \rightarrow p)$

Dérivation sous forme de séquence (deuxième exemple)

On fixe un **ensemble d'hypothèses**. Par exemple $\Delta = \{p\}$.

- (a) **Axiome 1** : $(p \rightarrow (p \rightarrow p))$
- (b) **Formule dans Δ** : p
- (c) **Modus ponens sur a et b** : $(p \rightarrow p)$

Notation : $\{p\} \vdash_{H \rightarrow} (p \rightarrow p)$ ou $p \vdash_{H \rightarrow} (p \rightarrow p)$

Notion de dérivation sous forme de séquence

Une **dérivation** de la formule A à partir d'un ensemble d'hypothèses Δ est une **séquence** de formules F_1, \dots, F_n telle que pour chaque i :

- F_i est une **hypothèse** de Δ , ou
- F_i est une instance d'**axiome**, ou
- F_i est obtenue par une **règle d'inférence** à partir de F_{e_1}, \dots, F_{e_k} avec $e_1, \dots, e_k < i$ et
- la **dernière** formule de la séquence est A .

Notation : S'il y a une dérivation de A à partir de Δ , nous écrivons $\Delta \vdash_{H \rightarrow} A$. Nous écrivons $\Delta, B \vdash_{H \rightarrow} A$ pour $\Delta \cup \{B\} \vdash_{H \rightarrow} A$.

Dérivation sous forme d'arbre

$$\frac{\frac{(p \rightarrow (p \rightarrow p)) (ax1) \quad p \in \Delta}{(p \rightarrow p)} \quad p \in \Delta}{p}$$

Nous avons $p \vdash_{H \rightarrow} p$.

Notion de dérivation sous forme d'arbre

Définition : La **dérivation** de la formule A à partir d'un ensemble d'hypothèses Δ est un **arbre** fini de *formules* tel que

- chaque feuille est soit une **hypothèse** de Δ soit un **axiome**
- si B est le père des $B_1 \dots B_n$, alors B est obtenu par l'application d'une **règle d'inférence** sur les formules $B_1 \dots B_n$.
- la formule A est la **racine** de l'arbre.

La notion de *théorème*

La formule A est un **théorème** ssi il existe une **dérivation** de la formule A à partir d'un ensemble d'hypothèses **vide**.

Exemple : La formule $p \rightarrow p$ est un théorème dans le système H_{\rightarrow} .

Théorème de la déduction

Théorème : Soit H un système de Hilbert quelconque tel que

- l'ensemble d'axiomes de H contient au moins Axiome 1 + Axiome 2
- la seule règle d'inférence de H est le Modus Ponens.

Alors, $\Delta \vdash_H A \rightarrow B$ ssi $\Delta, A \vdash_H B$.

Preuve : au tableau

Exemple : Montrer que $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r))$ est un théorème : par la propriété précédente, on démontre que r est dérivable à partir de $\Delta = \{p \rightarrow (q \rightarrow r), q, p\}$.

Dérivation comme séquence

$$\Delta = \{p \rightarrow (q \rightarrow r), p, q\}$$

- (a) Élément dans Δ : $p \rightarrow (q \rightarrow r)$
- (b) Élément dans Δ : p
- (c) Modus Ponens sur a et b : $q \rightarrow r$
- (d) Élément dans Δ : q
- (e) Modus Ponens sur c et d : r

Dérivation comme arbre

$$\Delta = \{p \rightarrow (q \rightarrow r), p, q\}$$

$$\frac{\frac{p \rightarrow (q \rightarrow r) \in \Delta \quad p \in \Delta}{(q \rightarrow r)} \quad q \in \Delta}{r}$$

Un autre exemple : système H_{prop}

- **Axiome 1** : $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
- **Axiome 2** : $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
- **Axiome 3** : $A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$
- **Axiome 4** : $A \rightarrow (A \vee B)$
- **Axiome 5** : $B \rightarrow (A \vee B)$
- **Axiome 6** : $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$
- **Axiome 7** : $(A \wedge B) \rightarrow A$
- **Axiome 8** : $(A \wedge B) \rightarrow B$
- **Axiome 9** : $(A \rightarrow B) \rightarrow ((C \rightarrow B) \rightarrow ((A \vee C) \rightarrow B))$
- **Axiome 10** : $\neg\neg A \rightarrow A$
- **Règle de dérivation** : Modus Ponens

Exemple de dérivation

Soit $D = A \vee \neg A$ et $\Delta = \{\neg D\}$.

- (a) **Axiome 4** : $A \rightarrow (A \vee \neg A)$ (i.e. $A \rightarrow D$)
- (b) **Axiome 1** : $\neg D \rightarrow (A \rightarrow \neg D)$
- (c) Δ : $\neg D$
- (d) **Modus ponens b et c** : $A \rightarrow \neg D$
- (e) **Axiome 6** : $(A \rightarrow D) \rightarrow ((A \rightarrow \neg D) \rightarrow \neg A)$
- (f) **Modus ponens a,e** : $(A \rightarrow \neg D) \rightarrow \neg A$
- (g) **Modus ponens d,f** : $\neg A$
- (h) **Axiome 5** : $\neg A \rightarrow (A \vee \neg A)$
- (i) **Modus ponens g, h** : $(A \vee \neg A)$

Donc, $\neg D \vdash_{H_{prop}} D$

Exemple de dérivation

Par le théorème de la déduction nous avons une dérivation de $\neg D \rightarrow D$ à partir de l'ensemble vide. Pareil pour $\neg D \rightarrow \neg D$. On construit maintenant une nouvelle dérivation comme suit :

- (a) **Obs prec** : $\neg D \rightarrow D$
- (b) **Obs prec** : $\neg D \rightarrow \neg D$
- (c) **Axiome 6** : $(\neg D \rightarrow D) \rightarrow ((\neg D \rightarrow \neg D) \rightarrow \neg\neg D)$
- (d) **Modus ponens, c, a, b** : $\neg\neg D$
- (e) **Axiome 10** : $\neg\neg D \rightarrow D$
- (f) **Modus ponens e, d** : D

Enfin, nous avons une dérivation de D à partir de l'ensemble vide, donc $D = A \vee \neg A$ est un théorème dans H_{prop} .

Théorème de l'affaiblissement

Théorème : Si $\Delta \vdash A$ est dérivable dans le système H_{prop} , alors $\Delta, B \vdash A$ est aussi dérivable dans le système H_{prop} pour toute formule B .

Dit autrement,

Si $\Delta \vdash_{H_{prop}} A$, alors $\Delta, B \vdash_{H_{prop}} A$ pour toute formule B .

Propriétés du système H_{prop}

Théorème : Le système H_{prop} est **correct**, i.e., si $\Delta \vdash_{H_{prop}} A$, alors $\Delta \models A$.

Preuve : Par induction sur l'arbre de dérivation de $\Delta \vdash_{H_{prop}} A$.

Théorème : Le système H_{prop} est **complet**, i.e., si $\Delta \models A$, alors $\Delta \vdash_{H_{prop}} A$.

Preuve : Dans la suite du cours.

Les séquents en logique



Gerhard Gentzen: mathématicien allemand (1909 - 1945)

La notion de séquent

Définition : Un **séquent** est un couple de la forme $\Delta \vdash \Gamma$, où Δ et Γ sont des *multi-ensembles* de formules.

La **formule associée** à un séquent de la forme $A_1, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_k$ est donnée par :

$$A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow B_1 \vee \dots \vee B_k$$

Rappel : une **conjonction vide** est **vraie**, une **disjonction vide** est **fausse**.

Sémantique d'un séquent

Définition : Un séquent $A_1, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_k$ est **valide** ssi sa formule associée $(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow (B_1 \vee \dots \vee B_k)$ est valide.

Les ingrédients d'un calcul de séquents

Pour définir un calcul de séquents :

- On fixe des **séquents axiomes** (des séquents particuliers)
- On fixe des **règles d'inférence** de la forme
$$\frac{\Delta_1 \vdash \Gamma_1 \dots \Delta_n \vdash \Gamma_n}{\Delta \vdash \Gamma}$$

Systèmes avec séquents

Définition : La **dérivation** du séquent $\Delta \vdash \Gamma$ dans un système \mathcal{S} quelconque, ou **\mathcal{S} -dérivation** de $\Delta \vdash \Gamma$, est un **arbre** fini de *séquents* tel que

- chaque **feuille** est un axiome de \mathcal{S} .
- si $\Lambda \vdash \Phi$ est le **père** de n séquents $\Lambda_1 \vdash \Phi_1$ et \dots et $\Lambda_n \vdash \Phi_n$, alors $\Lambda \vdash \Phi$ est obtenu par l'application d'une règle d'inférence de \mathcal{S} sur ses **enfants** $\Lambda_1 \vdash \Phi_1$ et \dots et $\Lambda_n \vdash \Phi_n$.
- la **racine** de l'arbre est le séquent $\Delta \vdash \Gamma$.

Notation : On écrit $\Delta \vdash_{\mathcal{S}} \Gamma$ pour dire que le séquent $\Delta \vdash \Gamma$ est **\mathcal{S} -dérivable** et on écrit simplement $\Delta \vdash \Gamma$ pour parler du séquent en tant qu'objet.

Définition : Soit \mathcal{S} un système avec séquents. Une **preuve** d'un séquent $\Delta \vdash \Gamma$ dans \mathcal{S} est une dérivation de $\Delta \vdash \Gamma$ dans \mathcal{S} . Un **théorème** de \mathcal{S} est un séquent de la forme $\emptyset \vdash \Gamma$ ayant une preuve dans \mathcal{S} .

Remarque

Un système axiomatique peut aussi se voir comme un calcul avec séquents. Ainsi par exemple, pour H_{\rightarrow} :

- Les **séquents axiomes** sont de la forme

$$\Delta \vdash A \text{ (si } A \in \Delta)$$

$$\Delta \vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$\Delta \vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

- La **règle d'inférence** est de la forme

$$\frac{\Delta \vdash A \rightarrow B \quad \Delta \vdash A}{\Delta \vdash B}$$

Système DN_{\rightarrow} : déduction naturelle pour \rightarrow

Formules : l'ensemble inductif construit à partir de toutes les lettres propositionnelles et du symbole binaire \rightarrow .

Axiome : $\Delta, A \vdash A$

Règles d'inférence :

$$\frac{\Delta, A \vdash B}{\Delta \vdash A \rightarrow B} (\rightarrow i)$$

$$\frac{\Delta \vdash A \quad \Delta \vdash A \rightarrow B}{\Delta \vdash B} (\rightarrow e)$$

Exemple de dérivation dans DN_{\rightarrow}

$$\frac{\frac{A, B \vdash A \quad (\text{axiome})}{A \vdash B \rightarrow A} (\rightarrow i)}{\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)} (\rightarrow i)$$

Notation : $\emptyset \vdash_{DN_{\rightarrow}} A \rightarrow (B \rightarrow A)$ ou $\vdash_{DN_{\rightarrow}} A \rightarrow (B \rightarrow A)$

Nous avons démontré l'axiome 1 de H_{\rightarrow} dans le système DN_{\rightarrow} .

De manière similaire on peut démontrer

$\Delta \vdash_{DN_{\rightarrow}} A \rightarrow (B \rightarrow A)$ pour tout Δ .

Un autre exemple de dérivation dans DN_{\rightarrow}

Soit $\Gamma = A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A$.

$$\frac{\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow (B \rightarrow C) \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B \rightarrow C} (\rightarrow e) \quad \frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} (\rightarrow e)}{\frac{(A \rightarrow (B \rightarrow C)), (A \rightarrow B), A \vdash C}{(A \rightarrow (B \rightarrow C)), (A \rightarrow B) \vdash A \rightarrow C}}{\frac{(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)}{\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))}}$$

Nous avons démontré l'axiome 2 de H_{\rightarrow} dans DN_{\rightarrow} .

De manière similaire on peut démontrer

$\Delta \vdash_{DN_{\rightarrow}} (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ pour tout Δ .

Équivalence entre H_{\rightarrow} et DN_{\rightarrow} (i)

Théorème : Si $\Delta \vdash_{H_{\rightarrow}} A$, alors $\Delta \vdash_{DN_{\rightarrow}} A$.

Preuve : Par induction sur la dérivation de A à partir de Δ dans le système H_{\rightarrow} .

- $A \in \Delta$
- A est une instance d'axiome dans H_{\rightarrow}
- La dernière règle est le modus ponens.

Équivalence entre H_{\rightarrow} et DN_{\rightarrow} (ii)

Théorème : Si $\Delta \vdash_{DN_{\rightarrow}} A$, alors $\Delta \vdash_{H_{\rightarrow}} A$.

Preuve : Par induction sur la DN_{\rightarrow} -dérivation de $\Delta \vdash A$.

- Si A est axiome dans DN_{\rightarrow} , alors c'est trivial.
- Si l'arbre se termine par \rightarrow i, alors on utilise le théorème de la déduction.
- Si l'arbre se termine par \rightarrow e, alors on utilise modus ponens.

Système DN_{prop} : déduction naturelle pour $\rightarrow, \vee, \wedge, \neg$

Axiome : $\Delta, A \vdash A$

Règles d'inférence :

$$\frac{\Delta, A \vdash B}{\Delta \vdash A \rightarrow B} (\rightarrow i) \quad \frac{\Delta \vdash A \quad \Delta \vdash A \rightarrow B}{\Delta \vdash B} (\rightarrow e)$$

$$\frac{\Delta \vdash A \quad \Delta \vdash B}{\Delta \vdash A \wedge B} (\wedge i)$$

$$\frac{\Delta \vdash A \wedge B}{\Delta \vdash A} (\wedge e) \quad \frac{\Delta \vdash A \wedge B}{\Delta \vdash B} (\wedge e)$$

$$\frac{\Delta \vdash A}{\Delta \vdash A \vee B} (\vee i) \quad \frac{\Delta \vdash B}{\Delta \vdash A \vee B} (\vee i)$$

$$\frac{\Delta \vdash A \vee B \quad \Delta, A \vdash C \quad \Delta, B \vdash C}{\Delta \vdash C} (\vee e)$$

$$\frac{\Delta, A \vdash B \quad \Delta, A \vdash \neg B}{\Delta \vdash \neg A} (\neg i)$$

$$\frac{\Delta \vdash A \quad \Delta \vdash \neg A}{\Delta \vdash B} (\neg e) \quad \frac{\Delta \vdash \neg\neg A}{\Delta \vdash A} (\neg e)$$

La dernière règle $\neg e$ est connue sous le nom de **raisonnement par l'absurde**.

Exemple de dérivation dans DN_{prop}

Tiers exclu

$B = A \vee \neg A$

$$\frac{\frac{\frac{\neg B, A \vdash A}{\neg B, A \vdash B} (\vee i)}{\neg B \vdash \neg A} (\neg i)}{\neg B \vdash B} (\vee i) \quad \frac{\neg B \vdash \neg B}{\vdash \neg \neg B} (\neg i)}{\vdash B} (\neg e)$$

Un autre exemple de dérivation dans DN_{prop}

Loi de Peirce

$G = (H \rightarrow A) \rightarrow A$, $H = A \rightarrow B$

$$\frac{\frac{\frac{\neg G, H \rightarrow A \vdash H \rightarrow A \quad \neg G, H \rightarrow A \vdash H}{\neg G, H \rightarrow A \vdash A} (\rightarrow e)}{\neg G \vdash G} (\rightarrow i)}{\vdash \neg\neg G} (\neg e)}{\vdash G} (\neg e)$$

$G = (H \rightarrow A) \rightarrow A$, $H = A \rightarrow B$

$$\frac{\frac{\frac{\neg G, H \rightarrow A, A, H \rightarrow A \vdash A}{\neg G, H \rightarrow A, A \vdash G} (\rightarrow i)}{\neg G, H \rightarrow A, A \vdash B} (\neg e)}{\neg G, H \rightarrow A \vdash H} (\rightarrow i)$$

Comment transformer des dérivations dans DN_{prop}

Théorème : (Affaiblissement) Si $\Delta \vdash A$ est dérivable dans le système DN_{prop} , alors $\Delta, B \vdash A$ l'est aussi (et la hauteur de l'arbre de dérivation ne change pas).

Théorème : (Contraction) Si $\Delta, B, B \vdash A$ est dérivable dans le système DN_{prop} , alors $\Delta, B \vdash A$ l'est aussi.

Observations

Le raisonnement par l'absurde entraîne le tiers exclu et la loi de Peirce.
Mais, aussi

- Le tiers exclu entraîne la loi de Peirce.

Soit $F = (A \rightarrow B) \rightarrow A$.

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee \neg A \quad \frac{\Gamma, F, A \vdash A \quad \frac{\Gamma, \neg A, F, A \vdash A \quad \Gamma, \neg A, F, A \vdash \neg A}{\Gamma, \neg A, F, A \vdash B}}{\Gamma, \neg A, F \vdash A \rightarrow B}}{\Gamma, \neg A, F \vdash F}}{\Gamma, A \vdash F \rightarrow A}}{\Gamma \vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A}$$

Observations

- La loi de Peirce entraîne le raisonnement par l'absurde.

On considère $\neg A = A \rightarrow \perp$. ($I(\perp) = F$ pour toute interprétation I)

$$\frac{\frac{\frac{\Delta \vdash \neg\neg A}{\Delta, \neg A \vdash \neg\neg A} \text{ (Affaibl.)}}{\Delta, \neg A \vdash A}}{\Delta \vdash \neg A \rightarrow A}}{\Delta \vdash ((A \rightarrow \perp) \rightarrow A) \rightarrow A} \Delta \vdash A$$

Équivalence entre H_{prop} et DN_{prop} (i)

Théorème : Si $\Delta \vdash_{H_{prop}} A$, alors $\Delta \vdash_{DN_{prop}} A$.

Preuve : Par induction sur la dérivation de A à partir de Δ dans le système H_{prop} .

Équivalence H_{prop} et DN_{prop} (ii)

Théorème : Si $\Delta \vdash_{DN_{prop}} A$, alors $\Delta \vdash_{H_{prop}} A$.

Preuve : Par induction sur la DN_{prop} -dérivation de $\Delta \vdash A$.

- Si axiome dans DN_{prop} , alors c'est trivial.
- Si l'arbre se termine par $\rightarrow i$, alors on utilise le théorème de la déduction.
- Si l'arbre se termine par $\rightarrow e$, alors on utilise modus ponens.
- Si l'arbre se termine par $\wedge i$, alors on utilise l'axiome 3.
- Si l'arbre se termine par $\wedge e$, alors on utilise les axiomes 7 et 8.
- Si l'arbre se termine par $\vee i$, alors on utilise les axiomes 4 et 5.
- Si l'arbre se termine par $\vee e$, alors on utilise le théorème de la déduction et l'axiome 9.

Suite de la preuve

- Si l'arbre se termine par \neg i, alors on utilise le théorème de la déduction et l'axiome 6.
- Si l'arbre se termine par la seconde règle de \neg e, alors on utilise l'axiome 10.
- Si l'arbre se termine par la première règle de \neg e, alors on raisonne comme suit. Si on dérive A et $\neg A$, alors avec deux instances de l'axiome 1 ($A \rightarrow (\neg B \rightarrow A)$) et ($\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$) on obtient $\neg B \rightarrow A$ et $\neg B \rightarrow \neg A$. Avec l'axiome 6 ($(\neg B \rightarrow A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg\neg B)$), on obtient $\neg\neg B$, et avec l'axiome 10 $\neg\neg B \rightarrow B$ on obtient B .

Propriétés du système DN_{prop}

Théorème : Le système DN_{prop} est **correct**, i.e., si $\Delta \vdash_{DN_{prop}} A$, alors $\Delta \vdash A$ est valide.

Théorème : Le système DN_{prop} est **complet**, i.e., si $\Delta \vdash A$ est valide, alors $\Delta \vdash_{DN_{prop}} A$.

Calcul de Gentzen LK

Axiome : $A \vdash A$

Règles d'inférence structurelles :

$$\frac{\Delta, A, A \vdash \Gamma}{\Delta, A \vdash \Gamma} \text{ (contraction } g) \qquad \frac{\Delta \vdash \Gamma, A, A}{\Delta \vdash \Gamma, A} \text{ (contraction } d)$$

$$\frac{\Delta \vdash \Gamma}{\Delta, A \vdash \Gamma} \text{ (affaiblissement } g) \qquad \frac{\Delta \vdash \Gamma}{\Delta \vdash \Gamma, A} \text{ (affaiblissement } d)$$

Règles d'inférence logiques :

$$\frac{\Delta \vdash \Gamma, A}{\Delta, \neg A \vdash \Gamma} (\neg g) \quad \frac{\Delta, A \vdash \Gamma}{\Delta \vdash \Gamma, \neg A} (\neg d)$$

$$\frac{\Delta \vdash A, \Gamma \quad \Pi, B \vdash \Lambda}{\Delta, \Pi, A \rightarrow B \vdash \Gamma, \Lambda} (\rightarrow g) \quad \frac{\Delta, A \vdash B, \Gamma}{\Delta \vdash A \rightarrow B, \Gamma} (\rightarrow d)$$

$$\frac{\Delta, A, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \wedge B \vdash \Gamma} (\wedge g) \quad \frac{\Delta \vdash A, \Gamma \quad \Delta \vdash B, \Gamma}{\Delta \vdash A \wedge B, \Gamma} (\wedge d)$$

$$\frac{\Delta, A \vdash \Gamma \quad \Delta, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \vee B \vdash \Gamma} (\vee g) \quad \frac{\Delta \vdash A, \Gamma}{\Delta \vdash A \vee B, \Gamma} (\vee d) \quad \frac{\Delta \vdash B, \Gamma}{\Delta \vdash A \vee B, \Gamma} (\vee d)$$

Règles d'inférence coupure :

$$\frac{\Delta \vdash \Gamma, A \quad A, \Lambda \vdash \Pi}{\Delta, \Lambda \vdash \Gamma, \Pi}$$

Dérivation dans LK

On note $\Delta \vdash_{LK} \Gamma$ si le séquent $\Delta \vdash \Gamma$ est dérivable dans le système LK .

Premier exemple de dérivation dans LK

Modus Ponens

$$\frac{\frac{\frac{p \vdash p \text{ (ax)} \quad q \vdash q \text{ (ax)}}{p, (p \rightarrow q) \vdash q} (\rightarrow g)}}{p \wedge (p \rightarrow q) \vdash q} (\wedge g)}{\vdash (p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q} (\rightarrow d)$$

Deuxième exemple de dérivation dans LK

Tiers exclu

$$\frac{\frac{\frac{p \vdash p \text{ (ax)}}{\vdash p, \neg p} (\neg d)}{\vdash p, p \vee \neg p} (\vee d)}{\vdash p \vee \neg p, p \vee \neg p} (\vee d)}{\vdash p \vee \neg p} (\text{cont } d)$$

Troisième exemple de dérivation dans LK

Loi de Peirce

$$\frac{\frac{\frac{A \vdash A \text{ (ax)}}{A \vdash B, A} \text{ (aff } d)}{\vdash A \rightarrow B, A} \text{ (}\rightarrow d)}{\frac{\frac{(A \rightarrow B) \rightarrow A \vdash A, A}{(A \rightarrow B) \rightarrow A \vdash A} \text{ (cont } d)}{\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A} \text{ (}\rightarrow d)}{A \vdash A \text{ (ax)}} \text{ (}\rightarrow g)$$

Propriétés du système LK

Théorème : (Élimination de coupures) Si $\Delta \vdash \Gamma$ est dérivable dans le système LK , alors il existe une dérivation de $\Delta \vdash \Gamma$ dans LK qui n'utilise pas la règle de coupure.

Équivalence entre la Dédution naturelle et LK

Remarque : Si $\Delta \vdash_{LK} \Gamma$, alors soit Δ soit Γ n'est pas vide.

Théorème : Si $\Delta \vdash_{LK} \Gamma$, alors

- Si $\Delta = \emptyset$, alors $\vdash_{DN_{prop}} \bigvee \Gamma$.
- Si $\Gamma = \emptyset$, alors $\vdash_{DN_{prop}} \bigvee \neg \Delta$.
- Sinon, $\vdash_{DN_{prop}} \bigvee \neg \Delta \vee \bigvee \Gamma$

Théorème : Si $\Delta \vdash_{DN_{prop}} A$, alors $\Delta \vdash_{LK} A$.

Propriétés du système de Gentzen LK

Théorème : Le système LK est **correct**, i.e., si $\Delta \vdash_{LK} \Gamma$, alors $\Delta \vdash \Gamma$ est valide.

Théorème : Le système LK est **complet**, i.e., si $\Delta \vdash \Gamma$ est valide, alors $\Delta \vdash_{LK} \Gamma$.

Automatisation : le système \mathcal{G}

Axiome : $\Delta, A \vdash \Gamma, A$

Règles d'inférence logiques :

$$\frac{\Delta \vdash \Gamma, A}{\Delta, \neg A \vdash \Gamma} (\neg g) \quad \frac{\Delta, A \vdash \Gamma}{\Delta \vdash \Gamma, \neg A} (\neg d)$$

$$\frac{\Delta \vdash A, \Gamma \quad \Delta, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \rightarrow B \vdash \Gamma} (\rightarrow g) \quad \frac{\Delta, A \vdash B, \Gamma}{\Delta \vdash A \rightarrow B, \Gamma} (\rightarrow d)$$

$$\frac{\Delta, A, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \wedge B \vdash \Gamma} (\wedge g) \quad \frac{\Delta \vdash A, \Gamma \quad \Delta \vdash B, \Gamma}{\Delta \vdash A \wedge B, \Gamma} (\wedge d)$$

$$\frac{\Delta, A \vdash \Gamma \quad \Delta, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \vee B \vdash \Gamma} (\vee g) \quad \frac{\Delta \vdash A, B, \Gamma}{\Delta \vdash A \vee B, \Gamma} (\vee d)$$

Règles de coupure :

$$\frac{\Delta \vdash \Gamma, A \quad A, \Lambda \vdash \Pi}{\Delta, \Lambda \vdash \Gamma, \Pi}$$

Dérivation dans \mathcal{G}

On note $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$ si le séquent $\Delta \vdash \Gamma$ est dérivable dans le système \mathcal{G} .

Premier exemple de dérivation dans \mathcal{G}

Tiers exclu

$$\frac{\frac{p \vdash p \ (ax)}{\vdash p, \neg p} \ (\neg d)}{\vdash p \vee \neg p} \ (\vee d)$$

Deuxième exemple de dérivation dans \mathcal{G}

Loi de Peirce

$$\frac{\frac{p \vdash q, p(ax)}{\vdash p \rightarrow q, p} (\rightarrow d) \quad p \vdash p(ax)}{\frac{(p \rightarrow q) \rightarrow p \vdash p}{\vdash ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p} (\rightarrow d)} (\rightarrow g)$$

Comment transformer quelques dérivations dans \mathcal{G}

Théorème : (Affaiblissement) Si $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$, alors $\Delta, A \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$ et $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} A, \Gamma$.

Théorème : (Contraction) Si $\Delta, A, A \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$, alors $\Delta, A \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$. Si $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma, A, A$, alors $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma, A$ l'est aussi.

Théorème : (Élimination de coupures) Si $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$, alors il existe une dérivation de $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$ qui n'utilise pas la règle de coupure.

Équivalence entre LK et \mathcal{G}

Théorème : Si $\Delta \vdash \Gamma$ est dérivable en LK , alors $\Delta \vdash \Gamma$ est dérivable en \mathcal{G} .

Théorème : Si $\Delta \vdash \Gamma$ est dérivable en \mathcal{G} , alors $\Delta \vdash \Gamma$ est dérivable en LK .

Équivalence entre DN et \mathcal{G}

Théorème : Si $\Delta \vdash_{DN_{prop}} A$, alors $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} A$.

Remarque : Si $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$, alors soit Δ soit Γ n'est pas vide.

Théorème : Si $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$, alors

- Si $\Delta = \emptyset$, alors $\vdash_{DN_{prop}} \bigvee \Gamma$.
- Si $\Gamma = \emptyset$, alors $\vdash_{DN_{prop}} \bigvee \neg \Delta$.
- Sinon, $\vdash_{DN_{prop}} \bigvee \neg \Delta \vee \bigvee \Gamma$

Propriétés du système \mathcal{G}

Théorème : Toute règle de \mathcal{G} de la forme $\frac{S_1 \dots S_n}{S}$ est **réversible**, i.e., $S_1 \wedge \dots \wedge S_n$ est valide ssi S est valide.

Théorème : Le système \mathcal{G} est **correct**, i.e., si $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$, alors $\Delta \vdash \Gamma$ est valide.

Preuve : Par induction sur la dérivation du séquent $\Delta \vdash \Gamma$ dans le système \mathcal{G} à l'aide de la réversibilité et du fait que les axiomes sont des séquents valides.

Propriétés du système \mathcal{G}

Théorème : Le système \mathcal{G} est **complet**, i.e., si $\Delta \vdash \Gamma$ est valide, alors $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$.

Preuve :

- On construit un arbre de dérivation pour le séquent $\Delta \vdash \Gamma$ dans le système \mathcal{G} sans coupures, en appliquant les règles du système “du bas vers le haut” aussi longtemps que possible.
- Ce processus s’arrête nécessairement car tout séquent “hypothèse” est plus petit que le séquent “conclusion” (propriété de sous-formule).
- Puisque le séquent de la racine est valide, tous les séquents introduits par cette construction sont valides d’après le théorème de réversibilité.

Suite de la preuve

- Pour conclure il faut montrer que la construction s'arrête sur des séquents axiomes, c'est à dire, que toute feuille de l'arbre de dérivation est un axiome.
- On raisonne par l'absurde.
- Si le séquent d'une *feuille* contient encore un connecteur logique, alors on peut toujours appliquer une règle du système, ce qui est en contradiction avec le fait que c'était une feuille.
- Si le séquent d'une feuille n'a plus de connecteur logique mais il n'est pas un axiome, il est de la forme $p_1, \dots, p_m \vdash q_1, \dots, q_n$, avec $p_i \neq q_j$, pour tout i, j .
- L'interprétation qui donne **V** à toutes les lettres p_i et **F** à toutes les lettres q_j falsifie ce séquent. Contradiction avec le fait que ce séquent soit valide.

La résolution en calcul propositionnel



John Alan Robinson: philosophe, mathématicien, informaticien anglais/américain (1930 -)

Méthode par réfutation :

$\Delta \models A$ ssi A s'obtient à partir de Δ par résolution

$\Delta \models A$ ssi $\Delta \cup \{\neg A\}$ insatisfaisable ssi $\Delta \cup \{\neg A\}$ est réfutable

Forme Normale Conjonctive (FNC)

Définition :

- Un **littéral** est une formule de la forme p ou $\neg p$, où p est une lettre propositionnelle quelconque.
- Une **clause** est une formule de la forme $l_1 \vee \dots \vee l_n$, $n \geq 0$, où chaque l_i est un littéral. La **clause vide** ($n = 0$) s'écrit \perp .
- Une formule est en **forme normale conjonctive** ssi elle est de la forme $D_1 \wedge \dots \wedge D_n$, $n \geq 0$, où chaque D_i est une clause.

Forme Normale Disjonctive (FND)

Définition :

- Une **conjonction élémentaire** est une formule de la forme $l_1 \wedge \dots \wedge l_n$, $n \geq 0$, où chaque l_i est un littéral. La **conjonction élémentaire vide** ($n = 0$) s'écrit \top .
- Une formule est en **forme normal disjonctive** ssi elle est de la forme $C_1 \vee \dots \vee C_n$, $n \geq 0$, où chaque C_i est une conjonction élémentaire.

Existence de la FND et de la FNC

Théorème : Soit A une formule.

- Il existe une formule A_1 en FND telle que $A_1 \equiv A$.
- Il existe une formule A_2 en FNC telle que $A_2 \equiv A$.

Lemme : Soit $\Delta = \{A_1, \dots, A_n\}$ et $FNC_{\Delta} = \{E_1, \dots, E_n\}$ où chaque E_i est une FNC de A_i . Pour chaque E_i de la forme $D_{i_1} \wedge \dots \wedge D_{i_k}$ on construit $C_{E_i} = \{D_{i_1}, \dots, D_{i_k}\}$. Soit $C_{\Delta} = \bigcup_{1 \leq i \leq n} C_{E_i}$. Alors Δ est satisfaisable ssi C_{Δ} est satisfaisable.

Formes normales et tables de vérité

p	q	r	A
V	V	V	F
V	V	F	V
V	F	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	V

$$A \equiv (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee$$
$$(\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$

$$\neg A \equiv (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee$$
$$(\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$$

$$A \equiv (\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge$$
$$(p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r)$$

Règles de la résolution

Axiomes : aucun

Règles d'inférence :

(D et C sont deux clauses)

$$\frac{D \vee p \quad C \vee \neg p}{D \vee C} \text{ (coupure)} \quad \frac{p \quad \neg p}{\perp} \text{ (cas particulier)}$$

$$\frac{D \vee p \vee p}{D \vee p} \text{ (factorisation)}$$

Dérivation par résolution

Exemple :

$$\frac{\frac{\frac{p \vee r \vee s \quad r \vee \neg s}{p \vee r \vee r}}{p \vee r} \quad \neg r}{p}$$

Notation : Une dérivation de la clause p à partir de l'ensemble $\{p \vee r \vee s, r \vee \neg s, \neg r\}$ s'écrit

$$\{p \vee r \vee s, r \vee \neg s, \neg r\} \vdash_R p$$

Réfutation

Définition : Un ensemble de clauses Δ est **réfutable** ssi $\Delta \vdash_R \perp$.

Exemple :

$$\frac{\frac{\frac{p \vee r \vee s \quad r \vee \neg s}{p \vee r \vee r}}{p \vee r} \quad \neg r}{p} \quad \neg p}{\perp}$$

$\{p \vee r \vee s, r \vee \neg s, \neg r, \neg p\} \vdash_R \perp$

Propriétés de la résolution

Théorème : La résolution est **correcte**, i.e., si $\Delta \vdash_R A$, alors $\Delta \models A$ et si $\Delta \vdash_R \perp$, alors Δ est insatisfaisable.

Théorème : La résolution est **complète** pour la refutation, i.e., si Δ est insatisfaisable, alors $\Delta \vdash_R \perp$.