Université Paris Diderot - Licence 3 Année 2013-2014

Devoir Maison de Logique n° 1

Induction et logique propositionnelle

Le devoir est à rendre à vos encadrants de TD la semaine du 17 février 2014.

Exercice 1 On rappelle la grammaire des formules de la logique propositionnelle :

$$\phi \ ::= \ p \ \mid \ \phi \wedge \phi \ \mid \ \phi \vee \phi \ \mid \ \phi \to \phi \ \mid \ \neg \phi$$

où p est une lettre propositionnelle. De plus pour une formule ϕ, on rappelle que les sous-formules de $\mathcal{SF}(\phi)$ sont définies par induction sur la forme de ϕ de la façon suivante :

- $\mathcal{SF}(p) = \{p\}$ pour toute lettre propositionnelle p ;
- $\mathcal{SF}(\neg\phi) = \{\neg\phi\} \cup \mathcal{SF}(\phi)$;
- $\mathcal{SF}(\phi_1 \# \phi_2) = \{\phi_1 \# \phi_2\} \cup \mathcal{SF}(\phi_1) \cup \mathcal{SF}(\phi_2)$ pour $\# \in \{\wedge, \vee, \to\}$

Finalement, pour une formule propositionnelle ϕ, on dénote $nb_{op}(\phi)$ le nombre d'occurrences des opérateurs $\wedge, \vee, \to$ et $\neg$ qui paraissent dans ϕ.

1. Montrez par induction que toute formule de la logique propositionnelle dans laquelle n'apparaît pas le symbole $\neg$ est satisfaisable.
2. On considère la formule $\phi := (p \wedge (q \vee r)) \wedge (\neg(r \to q))$. Donnez l'ensemble $\mathcal{SF}(\phi)$ ainsi que la valeur de $nb_{op}(\phi)$.
3. Montrez par induction que pour toute formule de la logique propositionnelle ϕ, on a $|\mathcal{SF}(\phi)| \leqslant 2 \cdot nb_{op}(\phi) + 1$ (où $|\mathcal{SF}(\phi)|$ représente le cardinal de l'ensemble $\mathcal{SF}(\phi)$).

Exercice 2

1. Dîtes pour les deux formules suivantes si elle sont valides ou non. Justifiez votre réponse soit à l'aide de la table de vérité (dans le cas où la formule est valide), soit en donnant une interprétation qui ne satisfait pas la formule.
   (a) $(p \wedge q \wedge r \wedge s) \vee ((p \to \neg q) \vee \neg r \vee \neg s)$
   (b) $(p \vee (p \to q))$
2. Verifiez (par exemple en utilisant une table de vérité) si l'on a $\{p, p \to r\} \models r$ et $\{p \to (p \wedge q), \neg p\} \models \neg q$.