Les systèmes de preuves syntaxiques

Systèmes de preuves syntaxiques

- Calculs des séquents :
  - Déduction naturelle
  - Calcul de Gentzen
- Systèmes de réfutation :
  - Résolution

Systèmes de preuves syntaxiques

- Un ensemble de formules.
- Un sous-ensemble de formules distinguées appelées axiomes.
- Un ensemble de règles d'inférence de la forme:

$$\frac{\texttt{Hyp1} \quad \dots \quad \texttt{Hypn}}{\texttt{Concl}}$$

Typiquement une règle est en fait un schéma de règles. Example:

$$\frac{A \to B \qquad A}{B} \text{ (Modus Ponens)}$$

Propriétés importantes:

- Les règles devraient être correctes.
- Un ensemble de règles devraient être complet.

Les séquents en logique

Gerhard Gentzen: mathématicien allemand (1909 - 1945)

La notion de séquent

Définition : Un séquent est un couple de la forme $\Delta \vdash \Gamma$, où Δ et Γ sont des *multi-ensembles* de formules.

La formule associée à un séquent de la forme $A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_k$ est donnée par :

$$A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B_1 \vee \ldots \vee B_k$$

Rappel : une conjonction vide est vraie, une disjonction vide est fausse.

Sémantique d'un séquent

Définition : Un séquent $A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_k$ est valide ssi sa formule associée $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \to (B_1 \vee \ldots \vee B_k)$ est valide.

Les ingrédients d'un calcul de séquents

Pour définir un calcul de séquents :

- On fixe des séquents axiomes (des séquents particuliers)
- On fixe des règles d'inférence de la forme $\dfrac{\Delta_1 \vdash \Gamma_1 \ldots \Delta_n \vdash \Gamma_n}{\Delta \vdash \Gamma}$

Systèmes avec séquents

Définition : La dérivation du séquent $\Delta \vdash \Gamma$ dans un système $\mathcal{S}$ quelconque, ou $\mathcal{S}$-dérivation de $\Delta \vdash \Gamma$, est un arbre fini de *séquents* tel que

- chaque feuille est un axiome de $\mathcal{S}$.
- si $\Lambda \vdash \Phi$ est le père de n séquents $\Lambda_1 \vdash \Phi_1$ et $\ldots$ et $\Lambda_n \vdash \Phi_n$, alors $\Lambda \vdash \Phi$ est obtenu par l'application d'une règle d'inférence de $\mathcal{S}$ sur ses enfants $\Lambda_1 \vdash \Phi_1$ et $\ldots$ et $\Lambda_n \vdash \Phi_n$.
- la racine de l'arbre est le séquent $\Delta \vdash \Gamma$.

Notation : On écrit $\Delta \vdash_{\mathcal{S}} \Gamma$ pour dire que le séquent $\Delta \vdash \Gamma$ est $\mathcal{S}$-dérivable et on écrit simplement $\Delta \vdash \Gamma$ pour parler du séquent en tant qu'objet.

Preuves et théorèmes

Définition : Soit $\mathcal{S}$ un système avec séquents. Une preuve d'un séquent $\Delta \vdash \Gamma$ dans $\mathcal{S}$ est une dérivation de $\Delta \vdash \Gamma$ dans $\mathcal{S}$. Un théorème de $\mathcal{S}$ est un séquent de la forme $\emptyset \vdash \Gamma$ ayant une preuve dans $\mathcal{S}$.

Système DN_{prop} : déduction naturelle pour le calcul propositionnel

Axiome : $\Delta, A \vdash A$

Règles d'inférence :

$$\frac{\Delta, A \vdash B}{\Delta \vdash A \to B}\ (\to\ i) \qquad \frac{\Delta \vdash A \qquad \Delta \vdash A \to B}{\Delta \vdash B}\ (\to\ e)$$

$$\frac{\Delta \vdash A \qquad \Delta \vdash B}{\Delta \vdash A \wedge B}\ (\wedge\ i)$$

$$\frac{\Delta \vdash A \wedge B}{\Delta \vdash A}\ (\wedge\, e) \qquad \frac{\Delta \vdash A \wedge B}{\Delta \vdash B}\ (\wedge\, e)$$

$$\frac{\Delta \vdash A}{\Delta \vdash A \vee B}\ (\vee i) \qquad \frac{\Delta \vdash B}{\Delta \vdash A \vee B}\ (\vee i)$$

$$\frac{\Delta \vdash A \vee B \qquad \Delta, A \vdash C \qquad \Delta, B \vdash C}{\Delta \vdash C}\ (\vee e)$$

$$\frac{\Delta, A \vdash B \qquad \Delta, A \vdash \neg B}{\Delta \vdash \neg A}\ (\neg i)$$

$$\frac{\Delta \vdash A \quad \Delta \vdash \neg A}{\Delta \vdash B}\ (\neg e) \quad \frac{\Delta \vdash \neg\neg A}{\Delta \vdash A}\ (\neg e)$$

La dernière règle $\neg e$ est connue sous le nom de raisonnement par l'absurde.

Exemples de dérivation dans DN_{prop}

Au tableau.

Tiers exclu

$B = A \vee \neg A$

$$
\cfrac{
  \cfrac{
    \cfrac{
      \cfrac{\neg B, A \vdash A}{\neg B, A \vdash B}\,(\vee i)
      \qquad
      \neg B, A \vdash \neg B
    }{\neg B \vdash \neg A}\,(\neg i)
  }{\neg B \vdash B}\,(\vee i)
  \qquad
  \neg B \vdash \neg B
}{
  \cfrac{\vdash \neg\neg B}{\vdash B}\,(\neg e)
}\,(\neg i)
$$

Un autre exemple de dérivation dans DN_{prop}

Loi de Peirce

$G = (H \to A) \to A,\ H = A \to B$

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{\neg G, H \to A \vdash H \to A \qquad \neg G, H \to A \vdash H}{\neg G, H \to A \vdash A}\ (\to\ e)
  }{\neg G \vdash G}\ (\to\ i)
  \qquad \neg G \vdash \neg G
}{
  \dfrac{\vdash \neg\neg G}{\vdash G}\ (\neg e)
}\ (\neg e)
$$

$G = (H \to A) \to A$, $H = A \to B$

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{\neg G, H \to A, A, H \to A \vdash A}{\neg G, H \to A, A \vdash G}\,(\to\ i)
    \qquad
    \neg G, H \to A, A \vdash \neg G
  }{\neg G, H \to A, A \vdash B}\,(\neg e)
}{\neg G, H \to A \vdash H}\,(\to\ i)
$$

Comment transformer des dérivations dans DN_{prop}

Théorème : (Affaiblissement) Si $\Delta \vdash A$ est dérivable dans le système DN_{prop}, alors $\Delta, B \vdash A$ l'est aussi (et la hauteur de l'arbre de dérivation ne change pas).

Théorème : (Contraction) Si $\Delta, B, B \vdash A$ est dérivable dans le système DN_{prop}, alors $\Delta, B \vdash A$ l'est aussi.

Observations

Le raisonnement par l'absurde entraîne le tiers exclu et la loi de Peirce.
Mais, aussi

- Le tiers exclu entraîne la loi de Peirce.
  Soit $F = (A \to B) \to A$.

$$
\dfrac{\Gamma \vdash A \vee \neg A \qquad \dfrac{\Gamma, F, A \vdash A}{\Gamma, A \vdash F \to A} \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma, \neg A, F \vdash F \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma, \neg A, F, A \vdash A \qquad \Gamma, \neg A, F, A \vdash \neg A}{\Gamma, \neg A, F, A \vdash B}}{\Gamma, \neg A, F \vdash A \to B}}{\Gamma, \neg A, F \vdash A}}{\Gamma, \neg A \vdash F \to A}}{\Gamma \vdash ((A \to B) \to A) \to A}
$$

Observations

- La loi de Peirce entraîne le raisonnement par l'absurde.
  On considère $\neg A = A \to \bot$. ($I(\bot) = F$ pour toute interprétation I)

$$\dfrac{\Delta \vdash ((A \to \bot) \to A) \to A \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Delta \vdash \neg\neg A}{\Delta, \neg A \vdash \neg\neg A}\,(\text{Affaibl.}) \qquad \Delta, \neg A \vdash \neg A}{\Delta, \neg A \vdash A}}{\Delta \vdash \neg A \to A}}{\Delta \vdash A}$$

Propriétés du système DN_{prop}

Théorème : Le système DN_{prop} est correct, i.e., si $\Delta \vdash_{DN_{prop}} A$, alors $\Delta \vdash A$ est valide.

Théorème : Le système DN_{prop} est complet, i.e, si $\Delta \vdash A$ est valide, alors $\Delta \vdash_{DN_{prop}} A$.

Calcul de Gentzen LK

Axiome : $A \vdash A$

Règles d'inférence structurelles :

$$\frac{\Delta, A, A \vdash \Gamma}{\Delta, A \vdash \Gamma}\ (\textit{contraction g}) \qquad \frac{\Delta \vdash \Gamma, A, A}{\Delta \vdash \Gamma, A}\ (\textit{contraction d})$$

$$\frac{\Delta \vdash \Gamma}{\Delta, A \vdash \Gamma}\ (\textit{affaiblissement g}) \qquad \frac{\Delta \vdash \Gamma}{\Delta \vdash \Gamma, A}\ (\textit{affaiblissement d})$$

Règles d'inférence logiques :

$$\frac{\Delta \vdash \Gamma, A}{\Delta, \neg A \vdash \Gamma}\ (\neg\ g) \qquad \frac{\Delta, A \vdash \Gamma}{\Delta \vdash \Gamma, \neg A}\ (\neg\ d)$$

$$\frac{\Delta \vdash A, \Gamma \qquad \Pi, B \vdash \Lambda}{\Delta, \Pi, A \to B \vdash \Gamma, \Lambda}\ (\to\ g) \qquad \frac{\Delta, A \vdash B, \Gamma}{\Delta \vdash A \to B, \Gamma}\ (\to\ d)$$

$$\frac{\Delta, A, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \wedge B \vdash \Gamma}\ (\wedge\ g) \qquad \frac{\Delta \vdash A, \Gamma \qquad \Delta \vdash B, \Gamma}{\Delta \vdash A \wedge B, \Gamma}\ (\wedge\ d)$$

$$\frac{\Delta, A \vdash \Gamma \qquad \Delta, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \vee B \vdash \Gamma}\ (\vee g) \qquad \frac{\Delta \vdash A, \Gamma}{\Delta \vdash A \vee B, \Gamma}\ (\vee d) \qquad \frac{\Delta \vdash B, \Gamma}{\Delta \vdash A \vee B, \Gamma}\ (\vee d)$$

Règles d'inférence coupure :

$$\frac{\Delta \vdash \Gamma, A \quad A, \Lambda \vdash \Pi}{\Delta, \Lambda \vdash \Gamma, \Pi}$$

Dérivation dans LK

On note $\Delta \vdash_{LK} \Gamma$ si le séquent $\Delta \vdash \Gamma$ est dérivable dans le système LK.

Premier exemple de dérivation dans LK

Modus Ponens

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \vdash p\ (ax) \qquad q \vdash q\ (ax)}{p, (p \rightarrow q) \vdash q}\,(\rightarrow\ g)}{p \wedge (p \rightarrow q) \vdash q}\,(\wedge\ g)}{\vdash (p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q}\,(\rightarrow\ d)$$

Deuxième exemple de dérivation dans LK

Tiers exclu

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{p \vdash p \ (ax)}{\vdash p, \neg p}\,(\neg\ d)}{\vdash p, p \vee \neg p}\,(\vee\ d)}{\vdash p \vee \neg p, p \vee \neg p}\,(\vee\ d)}{\vdash p \vee \neg p}\,(cont\ d)$$

Troisième exemple de dérivation dans LK

Loi de Peirce

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A \ (ax)}{A \vdash B, A}\,(aff\, d)}{\vdash A \to B, A}\,(\to\ d) \qquad A \vdash A \ (ax)}{\dfrac{(A \to B) \to A \vdash A, A}{(A \to B) \to A \vdash A}\,(cont\ d)}\,(\to\ g)}{\vdash ((A \to B) \to A) \to A}\,(\to\ d)$$

Propriétés du système LK

Théorème : (Élimination de coupures) Si $\Delta \vdash \Gamma$ est dérivable dans le système LK, alors il existe une dérivation de $\Delta \vdash \Gamma$ dans LK qui n'utilise pas la règle de coupure.

Équivalence entre la Déduction naturelle et LK

Remarque : Si $\Delta \vdash_{LK} \Gamma$, alors soit Δ soit Γ n'est pas vide.

Théorème : Si $\Delta \vdash_{LK} \Gamma$, alors

- Si $\Delta = \emptyset$, alors $\vdash_{DN_{prop}} \bigvee \Gamma$.
- Si $\Gamma = \emptyset$, alors $\vdash_{DN_{prop}} \bigvee \neg\Delta$.
- Sinon, $\vdash_{DN_{prop}} \bigvee \neg\Delta \vee \bigvee \Gamma$

Théorème : Si $\Delta \vdash_{DN_{prop}} A$, alors $\Delta \vdash_{LK} A$.

Propriétés du système de Gentzen LK

Théorème : Le système LK est correct, i.e., si $\Delta \vdash_{LK} \Gamma$, alors $\Delta \vdash \Gamma$ est valide.

Théorème : Le système LK est complet, i.e., si $\Delta \vdash \Gamma$ est valide, alors $\Delta \vdash_{LK} \Gamma$.

Automatisation : le système $\mathcal{G}$

Axiome : $\Delta, A \vdash \Gamma, A$

Règles d'inférence logiques :

$$\frac{\Delta \vdash \Gamma, A}{\Delta, \neg A \vdash \Gamma}\ (\neg\ g) \qquad \frac{\Delta, A \vdash \Gamma}{\Delta \vdash \Gamma, \neg A}\ (\neg\ d)$$

$$\frac{\Delta \vdash A, \Gamma \quad \Delta, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \to B \vdash \Gamma}\ (\to\ g) \qquad \frac{\Delta, A \vdash B, \Gamma}{\Delta \vdash A \to B, \Gamma}\ (\to\ d)$$

$$\frac{\Delta, A, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \wedge B \vdash \Gamma}\ (\wedge\ g) \qquad \frac{\Delta \vdash A, \Gamma \quad \Delta \vdash B, \Gamma}{\Delta \vdash A \wedge B, \Gamma}\ (\wedge\ d)$$

$$\frac{\Delta, A \vdash \Gamma \quad \Delta, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \vee B \vdash \Gamma}\ (\vee g) \qquad \frac{\Delta \vdash A, B, \Gamma}{\Delta \vdash A \vee B, \Gamma}\ (\vee d)$$

Règles de coupure :

$$\frac{\Delta \vdash \Gamma, A \quad A, \Lambda \vdash \Pi}{\Delta, \Lambda \vdash \Gamma, \Pi}$$

Dérivation dans $\mathcal{G}$

On note $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$ si le séquent $\Delta \vdash \Gamma$ est dérivable dans le système $\mathcal{G}$.

Premier exemple de dérivation dans $\mathcal{G}$

Tiers exclu

$$\dfrac{\dfrac{p \vdash p \; (ax)}{\vdash p, \neg p}\,(\neg\, d)}{\vdash p \vee \neg p}\,(\vee\, d)$$

Deuxième exemple de dérivation dans $\mathcal{G}$

Loi de Peirce

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \vdash q, p \ (ax)}{\vdash p \rightarrow q, p}\,(\rightarrow\ d) \qquad p \vdash p\ (ax)}{(p \rightarrow q) \rightarrow p \vdash p}\,(\rightarrow\ g)}{\vdash ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p}\,(\rightarrow\ d)$$

Comment transformer quelques dérivations dans $\mathcal{G}$

Théorème : (Affaiblissement) Si $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$, alors $\Delta, A \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$ et $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} A, \Gamma$.

Théorème : (Contraction) Si $\Delta, A, A \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$, alors $\Delta, A \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$. Si $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma, A, A$, alors $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma, A$ l'est aussi.

Théorème : (Élimination de coupures) Si $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$, alors il existe une dérivation de $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$ qui n'utilise pas la règle de coupure.

Équivalence entre LK et $\mathcal{G}$

Théorème : Si $\Delta \vdash \Gamma$ est dérivable en LK, alors $\Delta \vdash \Gamma$ est dérivable en $\mathcal{G}$.

Théorème : Si $\Delta \vdash \Gamma$ est dérivable en $\mathcal{G}$, alors $\Delta \vdash \Gamma$ est dérivable en LK.

Équivalence entre DN et $\mathcal{G}$

Théorème : Si $\Delta \vdash_{DN_{prop}} A$, alors $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} A$.

Remarque : Si $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$, alors soit Δ soit Γ n'est pas vide.

Théorème : Si $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$, alors

- Si $\Delta = \emptyset$, alors $\vdash_{DN_{prop}} \bigvee \Gamma$.
- Si $\Gamma = \emptyset$, alors $\vdash_{DN_{prop}} \bigvee \neg\Delta$.
- Sinon, $\vdash_{DN_{prop}} \bigvee \neg\Delta \vee \bigvee \Gamma$

Propriétés du système $\mathcal{G}$

Théorème : Toute règle de $\mathcal{G}$ de la forme $\dfrac{S_1 \ldots S_n}{S}$ est réversible, i.e., $S_1 \wedge \ldots \wedge S_n$ est valide ssi S est valide.

Théorème : Le système $\mathcal{G}$ est correct, i.e., si $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$, alors $\Delta \vdash \Gamma$ est valide.

Preuve : Par induction sur la dérivation du séquent $\Delta \vdash \Gamma$ dans le système $\mathcal{G}$ à l'aide de la réversibilité et du fait que les axiomes sont des séquents valides.

Propriétés du système $\mathcal{G}$

Théorème : Le système $\mathcal{G}$ est complet, i.e., si $\Delta \vdash \Gamma$ est valide, alors $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$.

Preuve :

- On construit un arbre de dérivation pour le séquent $\Delta \vdash \Gamma$ dans le système $\mathcal{G}$ sans coupures, en appliquant les règles du système "du bas vers le haut" aussi longtemps que possible.
- Ce processus s'arrête nécessairement car tout séquent "hypothèse" est plus petit que le séquent "conclusion" (propriété de sous-formule).
- Puisque le séquent de la racine est valide, tous les séquents introduits par cette construction sont valides d'après le théorème de réversibilité.

Suite de la preuve

- Pour conclure il faut montrer que la construction s'arrête sur des séquents axiomes, c'est à dire, que toute feuille de l'arbre de dérivation est un axiome.
- On raisonne par l'absurde.
- Si le séquent d'une *feuille* contient encore un connecteur logique, alors on peut toujours appliquer une règle du système, ce qui est en contradiction avec le fait que c'était une feuille.
- Si le séquent d'une feuille n'a plus de connecteur logique mais il n'est pas un axiome, il est de la forme $p_1, \ldots, p_m \vdash q_1, \ldots q_n$, avec $p_i \neq q_j$, pour tout i, j.
- L'interprétation qui donne **V** à toutes les lettres p_i et **F** à toutes les lettres q_j falsifie ce séquent. Contradiction avec le fait que ce séquent soit valide.

La résolution en calcul propositionnel

Résolution

John Alan Robinson: philosophe, mathématicien, informaticien anglais/américain (1930 -)

Résolution

Méthode par réfutation :

$\Delta \models A$ ssi A s'obtient à partir de Δ par résolution

$\Delta \models A$ ssi $\Delta \cup \{\neg A\}$ insatisfaisable ssi $\Delta \cup \{\neg A\}$ est réfutable

Forme Normale Conjonctive (FNC)

Définition :

- Un littéral est une formule de la forme p ou $\neg p$, où p est une lettre propositionnelle quelconque.
- Une clause est une formule de la forme $l_1 \vee \ldots \vee l_n$, $n \geq 0$, où chaque l_i est un littéral. La clause vide ($n = 0$) s'écrit $\perp$.
- Une formule est en forme normal conjonctive ssi elle est de la forme $D_1 \wedge \ldots \wedge D_n$, $n \geq 0$, où chaque D_i est une clause.

Forme Normale Disjonctive (FND)

Définition :

- Une conjonction élémentaire est une formule de la forme $l_1 \wedge \ldots \wedge l_n$, $n \geq 0$, où chaque l_i est un littéral.La conjonction élémentaire vide ($n = 0$) s'écrit $\top$.
- Une formule est en forme normal disjonctive ssi elle est de la forme $C_1 \vee \ldots \vee C_n$, $n \geq 0$, où chaque C_i est une conjonction élémentaire.

Existence de la FND et de la FNC

Théorème : Soit A une formule.

- Il existe une formule A_1 en FND telle que $A_1 \equiv A$.
- Il existe une formule A_2 en FNC telle que $A_2 \equiv A$.

Lemme : Soit $\Delta = \{A_1, \ldots, A_n\}$ et $FNC_\Delta = \{E_1, \ldots, E_n\}$ où chaque E_i est une FNC de A_i. Pour chaque E_i de la forme $D_{i_1} \wedge \ldots \wedge D_{i_k}$ on construit $C_{E_i} = \{D_{i_1}, \ldots, D_{i_k}\}$. Soit $C_\Delta = \bigcup_{1 \leq i \leq n} C_{E_i}$. Alors Δ est satisfaisable ssi C_Δ est satisfaisable.

Formes normales et tables de vérité

p	q	r	A
V	**V**	**V**	**F**
V	**V**	**F**	**V**
V	**F**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**F**
F	**V**	**V**	**V**
F	**V**	**F**	**F**
F	**F**	**V**	**F**
F	**F**	**F**	**V**

$$\begin{aligned}
A \equiv\ & (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee \\
& (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \\
\neg A \equiv\ & (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee \\
& (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \\
A \equiv\ & (\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge \\
& (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r)
\end{aligned}$$

Règles de la résolution

Axiomes : aucun

Règles d'inférence :

(D et C sont deux clauses)

$$\frac{D \vee p \qquad C \vee \neg p}{D \vee C} \ (\textit{coupure}) \qquad \frac{p \qquad \neg p}{\perp} \ (\text{cas particulier})$$

$$\frac{D \vee p \vee p}{D \vee p} \ (\textit{factorisation})$$

Dérivation par résolution

Exemple :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \vee r \vee s \qquad r \vee \neg s}{p \vee r \vee r}}{p \vee r} \qquad \neg r}{p}$$

Notation : On écrit $\Delta \vdash_R A$ si A s'obtient de Δ par résolution. Par exemple, ici on a une dérivation de la clause p à partir de l'ensemble $\{p \vee r \vee s, r \vee \neg s, \neg r\}$:

$$\{p \vee r \vee s, r \vee \neg s, \neg r\} \vdash_R p$$

Réfutation

Définition : Un ensemble de clauses Δ est réfutable ssi $\Delta \vdash_R \bot$.

Exemple :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \vee r \vee s \qquad r \vee \neg s}{p \vee r \vee r}}{p \vee r} \qquad \neg r}{p} \qquad \neg p}{\bot}$$

$$\{p \vee r \vee s, r \vee \neg s, \neg r, \neg p\} \vdash_R \bot$$

Propriétés de la résolution

Théorème : La résolution est correcte, i.e., si $\Delta \vdash_R A$, alors $\Delta \models A$ et si $\Delta \vdash_R \perp$, alors Δ est insatisfaisable.

Théorème : La résolution est complète pour la refutation, i.e., si Δ est insatisfaisable, alors $\Delta \vdash_R \perp$.