

- <http://www.gprolog.org>
- Prolog avec solveur de contraintes sur un domaine fini
- Solveur *incomplet* basé sur arc-consistance et bornes-consistance (au choix, voir plus tard).
- Il faut écrire explicitement dans le programme le prédicat pour énumérer les éléments des domaines des variables.
- Dans les contraintes toutes les variables sont des entiers entre 0 et `fd_max_integer`.

## Les domaines finis en GNU Prolog

- Attention : que de valeurs entre 0 et `fd_max_integer`.
- Deux représentations :
  - ▶ intervals
  - ▶ ensembles (Attention: marche uniquement jusqu'à `vector_max`, typiquement 127)  
Réalisé comme un vecteur de bits.
- Si pas de domaine spécifié : interval `[0..fd_max_integer]`.
- Par défaut représentation intervals, changé dynamiquement en représentation ensemble (attention: on risque de perdre des solutions).

- Lancer l'interprète par la commande `gprolog`
- Utiliser `consult` pour charger un programme, pas `reconsult` comme en Yap.
- Les contraintes s'écrivent avec des prédicats particuliers (voir les transparents suivants). Il n'y a pas d'accolades comme en Yap pour distinguer la partie contraintes des problèmes d'unification.
- Il n'y a pas de bibliothèques à spécifier, contrairement à Yap.

## Prédicats de base

- `fd_domain(?Vars, +Integer1, +Integer2)`  
définit le domaine d'une variable `Vars` ou d'une liste de variables d'être entre `Integer1` et `Integer2`.
- `fd_domain(?Vars, +ListeValeurs)`  
pareil avec une liste de valeurs
- `fd_all_different(?ListeVars)`  
Ce prédicat décrit la contrainte qui impose que toutes les variables de la liste `ListeVars` prennent des valeurs différentes.

## Contraintes arithmétiques

- Les contraintes arithmétiques s'écrivent en utilisant les fonctions habituelles et les prédicats : `#=`, `#\=`, `#<`, `#>`, `#<#`, `#=<`, `#>=`.  
Règles de propagation : bornes-consistance.
- On peut aussi utiliser `#=#`, `#\=#`, `#<#`, `#>#`, `#<#`, `#=<#`, `#>=#`.  
Règles de propagation : (hyper)-arc-consistance

## Intervalls et ensembles

```
| ?- X#=<512.  
X = _#2(0..512)  
yes
```

```
| ?- X#=<512, X#\=10.  
X = _#2(0..9:11..127@)  
yes
```

```
| ?- X#=<512, X#\=10, X#=<100.  
X = _#2(0..9:11..100)  
yes
```

Attention au @ qui indique une perte de valeurs.

## Exemple

```
| ?- fd_domain(X,1,8), fd_domain(Y,2,7), X #= 2*Y.  
  
X = _#3(4..8)  
Y = _#25(2..4)  
  
yes  
| ?- fd_domain(X,1,8), fd_domain(Y,2,7), X #=# 2*Y.  
  
X = _#3(4:6:8)  
Y = _#25(2..4)  
  
yes
```

## Labeling

- `fd_labeling(?Vars)`  
Ce prédicat est utilisé pour rechercher des solutions de contraintes sur les variables `Vars` avec des options par défaut.
- Peut être appliqué à une seule variable, ou une liste de variables.
- `fd_labeling(?Vars, ?Options)`  
Ce prédicat est utilisé pour rechercher des solutions des contraintes sur les variables `Vars` avec une liste d'options `Options`.
  - ▶ par exemple: `[variable_method(most_constrained)]` a comme effet que la variable choisie pendant la résolution est celle qui est la plus contrainte.
- plus de détails plus tard.

## Structure générale d'un programme simple

- Dans le cas le plus simple, un programme pour résoudre une contrainte s'écrit en trois parties :
  - ▶ définir les domaines des variables
  - ▶ décrire la contrainte
  - ▶ labeling

## Exemple

```
probleme([X,Y,Z]) :- fd_domain(X,0,5),
                    fd_domain([Y,Z],3,7),
                    X+Y #< 2*Z,
                    fd_labeling([X,Y,Z], []).
```

```
| ?- probleme(L).
L = [0,3,3] ? ;
L = [0,3,4] ? ;
L = [0,3,5] ? ;
etc.
```

## Labeling

- Prédicat extra-logique : `fd_min(?fd_variable,+integer)` : Donne la valeur minimale du domaine de la variable.
- On peut imaginer `fd_labeling` (pour une variable) défini comme :

```
fd_labelling(X) :- fd_min(X,N), X=N.
fd_labelling(X) :- fd_min(X,N), X #\= N,
                  fd_labelling(X).
```
- Utilise la stratégie de recherche de Prolog.

## Exemple: sac du contrebandier

- Contrebandier avec un sac de capacité 9.
- Il doit choisir des objets pour faire un profit d'au moins 30

objet	profit	poids
whisky	15	4
parfum	10	3
cigarettes	7	2

$$4W + 3P + 2C \leq 9 \wedge 15W + 10P + 7C \geq 30$$

## Le contrebandier en GNU Prolog

```
?- fd_domain([W,P,C],0,9),
    4*W + 3*P + 2*C #=< 9,
    15*W + 10*P + 7*C #>= 30,
    fd_labeling([W,P,C]).
C = 3
P = 1
W = 0 ? ;
C = 0
P = 3
W = 0 ? ;
C = 1
P = 1
W = 1 ? ;
C = 0
P = 0
W = 2
```

## Exemple : élimination de symétries

- Dans un magasin : le client veut payer quatre articles.
- Le caissier lui annonce un prix de 7.11 €.
- Quand le client lui demande les prix des articles séparés, le caissier lui répond simplement que le produit des prix est également 7.11 €.
- Quels sont les prix des quatre articles ?

## Éliminer des symétries

- Des symétries dans l'arbre de recherche peuvent faire un programme naïf très inefficace.
- On peut avoir beaucoup de façons symétriques d'écrire une partie de l'arbre de recherche.
- C'est un problème quand il s'agit d'une partie de l'arbre de recherche dont tous les nœuds sont des nœuds d'échec.
- Si on élimine des symétries : attention quand on essaye de trouver *toutes* les solutions.

## Exemple 7.11 € en Prolog

```
prix(A,B,C,D) :-
    fd_domain([A,B,C,D],1,708),
    A+B+C+D #= 711,
    A*B*C*D #= 711 * 100 * 100 * 100,
    fd_labeling([A,B,C,D]).
```

```
| ?- prix(A,B,C,D).
A = 120
B = 125
C = 150
D = 316 ?
(112 ms) yes
```

## Éliminer les symétries

Idée : on impose l'ordre sur les valeurs des variables.

```
prixa(A,B,C,D) :-  
    fd_domain([A,B,C,D],1,708),  
    A+B+C+D #= 711,  
    A*B*C*D #= 711 * 100 * 100 * 100,  
    A #=< B, B #=< C, C #=< D,  
    fd_labeling([A,B,C,D]).
```

Trouve la solution en 40 milli-secondes.

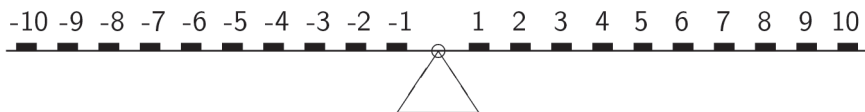
## Encore mieux

Idée : 79 est un facteur premier de 711. Choisir la variable qui contient ce facteur.

```
prixb(A,B,C,D) :-  
    fd_domain([A,B,C,D],1,708),  
    A+B+C+D #= 711,  
    A*B*C*D #= 711 * 100 * 100 * 100,  
    A #= 79*X,  
    B #=< C, C #=< D,  
    fd_labeling([A,B,C,D]).
```

Trouve la solution en 4 milli-secondes.

## Exemple: Programmer la génération des contraintes



- Donné : liste des poids des personnes.
- Exemple : [30, 40]
- Placer toutes les personnes de sorte que la balançoire est en équilibre.
- Pour l'exemple : [-4, 3].

## Solution balançoire

- Attention : en GNU Prolog, les domaines finis ne contiennent que des valeurs non négatives !
- Décaler toutes les places dans le positif : 0...20, le pivot est donc sur la position 10.

```
placement(Poids,Places) :-  
    length(Poids,N),  
    length(Places,N),  
    fd_domain(Places,0,20),  
    fd_all_different([10|Places]),  
    gauche(Poids,Places,M),  
    droite(Poids,Places,M),  
    fd_labeling(Places,[]).
```

## Solution balançoire

```
gauche([], [], 0).
gauche([_ | Poids], [Place | Places], M) :-
    Place #> 10, gauche(Poids, Places, M).
gauche([Poid | Poids], [Place | Places], M) :-
    Place #< 10,
    M #= MM + Poid*(10-Place),
    gauche(Poids, Places, MM).
droite([], [], 0).
droite([_ | Poids], [Place | Places], M) :-
    Place #< 10, droite(Poids, Places, M).
droite([Poid | Poids], [Place | Places], M) :-
    Place #> 10,
    M #= MM + Poid*(Place-10),
    droite(Poids, Places, MM).
```

## Exemple : pavage (1)

```
disjoint((_,_,X2,_), (X1,_,_,_)) :- X2 #=<= X1.
disjoint((X1,_,_,_), ( _,_,X2,_)) :- X1 #>= X2.
disjoint((_,_,_,Y2), ( _,Y1,_,_)) :- Y2 #=<= Y1.
disjoint((_,Y1,_,_), ( _,_,_,Y2)) :- Y1 #>= Y2.

alldisjoint(_, []).
alldisjoint(Q, [H|T]) :- disjoint(Q,H), alldisjoint(Q,T).
```

## Exemple: Pavage

- Donnée une liste de pavés (exemple: [(2,2), (3,4)]) et les dimensions du plan.
- Déterminer si on peut placer les pavés sur le plan sans recouvrement, et si oui donner le plan (les coordonnées des coins des pavés placés).
- Ici : utiliser une contrainte définie par l'utilisateur qui exprime que deux pavés ne se recouvrent pas.
- Ici pour simplifier : on ne n'autorise pas de tourner les pavés.
- La position du pavé est donnée par quatres valeurs (les coordonnées du point le plus à gauche et le plus bas et les coordonnées du coin opposé).

## Exemple : pavage (2)

```
p([],_,_, [], []).
p([(X,Y)|Rest], Width, Height, [(X1,Y1,X2,Y2)|Plan],
  [X1,Y1,X2,Y2|Vars]) :-
    fd_domain([X1,X2], 0, Width),
    fd_domain([Y1,Y2], 0, Height),
    X2 #= X1 + X,
    Y2 #= Y1 + Y,
    p(Rest, Width, Height, Plan, Vars),
    alldisjoint([(X1,Y1,X2,Y2)], Plan).

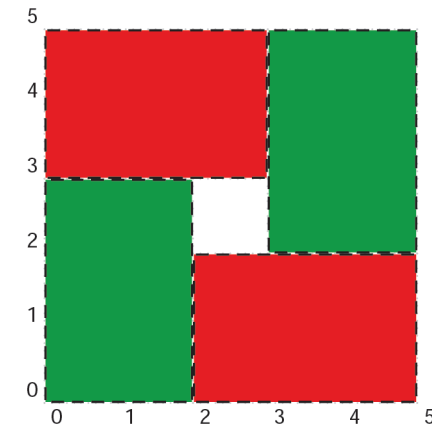
paving(In, Width, Height, Plan) :-
    p(In, Width, Height, Plan, Vars),
    fd_labeling(Vars).
```

## Exemple : le problème de la guillotine

- On veut couper une feuille de papier en plusieurs morceaux.
- On a seulement une guillotine pour découper la feuille.
- Étant donné les dimensions de la feuille et des morceaux, est-ce possible ?



## Différence avec le problème de pavage



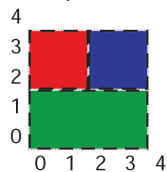
## Spécification du problème

Écrire un prédicat coupe(?Pieces, ?Hauteur, ?Largeur, +Plan) où

- Pieces est la liste des dimensions des morceaux souhaités,
- Largeur et Hauteur sont les dimensions du plan à découper
- Plan est le plan de découpage.

```
| ?- coupe([(2,2), (2,2), (2,4)], 4, 4, P).
```

```
P = horizontal(2, vertical(2, piece(2,2), piece(2,2)),  
              piece(4,2)) ? ;
```



## L'idée de l'algorithme

- Construction d'un arbre.
- Si on veut un seul morceau, et s'il tient dans les dimensions : créer une feuille de l'arbre.
- Si on veut plusieurs morceaux :
  - ▶ choisir la ligne de découpage.
  - ▶ choisir une partition des morceaux telle que les sommes de surfaces tiennent dans les deux moitiés du plan.
  - ▶ appeler coupe récursivement sur les deux sous-problèmes, combiner les plans obtenus pour construire le plan entier.

## Première solution naïve

```
coupe([(X,Y)],L,H,piece(X,Y)) :- X #=< L, Y #=< H.
coupe([(X,Y)],L,H,piece(Y,X)) :- Y #=< L, X #=< H.
coupe(Pieces,Largeur,Hauteur,vertical(Coupe,PlanA,PlanB)) :-
  fd_domain(Coupe,1,Largeur),
  RestLargeur #= Largeur-Coupe,
  SurfaceA #= Coupe*Hauteur,
  SurfaceB #= RestLargeur*Hauteur,
  partition(Pieces,ResultatA,ResultatB,SurfaceA,SurfaceB),
  fd_labeling(Coupe),
  coupe(ResultatA,Coupe,Hauteur,PlanA),
  coupe(ResultatB,RestLargeur,Hauteur,PlanB).
coupe(Pieces,Largeur,Hauteur,horizontal(Coupe,PlanA,PlanB)) :-
  ...
```

## Testons la solution naïve

```
| ?- coupe([(2,2),(2,2),(2,4)],4,3,P).
no
```

```
| ?- coupe([(2,2),(2,2),(2,4)],4,4,P).
Fatal Error: cstr stack overflow
```

## Solution naïve suite

```
partition([], [], [], _, _).
partition([(X,Y)|T], [(X,Y)|R], ResultatB, SurfaceA, SurfaceB) :-
  X*Y #=< SurfaceA,
  SurfaceA #= X*Y + NewSurfaceA,
  partition(T,R,ResultatB,NewSurfaceA,SurfaceB).
partition([(X,Y)|T], ResultatA, [(X,Y)|R], SurfaceA, SurfaceB) :-
  X*Y #=< SurfaceB,
  SurfaceB #= X*Y + NewSurfaceB,
  partition(T,ResultatA,R,SurfaceA,NewSurfaceB).
```

## L'erreur de la solution naïve

- La récurrence ne s'arrête pas :
  - ▶ On permet de couper tel qu'un plan a la surface 0.
  - ▶ On permet de partitionner la liste vide en deux listes vides.
- Deux solutions possibles :
  - ▶ Renforcer la contrainte sur la variable Coupe
  - ▶ Ne pas permettre des partitions triviales (une liste vide).



## Le programme corrigé

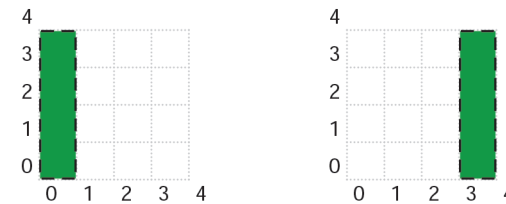
```

coupe([(X,Y)],L,H,piece(X,Y)) :- X #=< L, Y #=< H.
coupe([(X,Y)],L,H,piece(Y,X)) :- Y #=< L, X #=< H.
coupe(Pieces,Largeur,Hauteur,vertical(Coupe,PlanA,PlanB)) :-
fd_domain(Coupe,1,Largeur),
Coupe#<Largeur,
RestLargeur #= Largeur-Coupe,
SurfaceA #= Coupe*Hauteur,
SurfaceB #= RestLargeur*Hauteur,
partition(Pieces,ResultatA,ResultatB,SurfaceA,SurfaceB),
fd_labeling(Coupe),
coupe(ResultatA,Coupe,Hauteur,PlanA),
coupe(ResultatB,RestLargeur,Hauteur,PlanB).
coupe(Pieces,Largeur,Hauteur,horizontal(Coupe,PlanA,PlanB)) :-
...

```

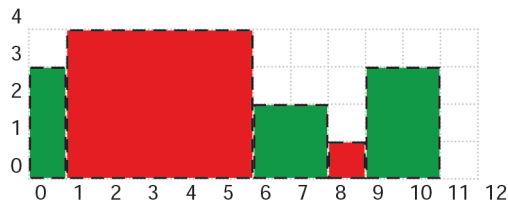
## Éviter des symétries

- On peut éviter la symétrie qui consiste en inverser la gauche et la droite, resp. le haut et le bas:
- Il suffit de renforcer la contrainte sur Coupe:
$$2 * \text{Coupe} \# \leq \text{Largeur},$$



## Une optimisation

- Idée : on peut avoir un cas de base plus général
- Nouveau cas de base : on essaye de placer tous les morceaux côte à côte (ou empilés).



## Le programme complet (1)

```

% calcule la surface totale d'une liste de morceaux
sommessurfaces([],0).
sommessurfaces([(X,Y)|R],Somme) :- sommessurfaces(R,RSomme),
Somme is (X*Y) + RSomme.

```

```

% ordonne les morceaux
ordonne([], []).
ordonne([(X,Y)|T],[X,Y]|RT) :- X=<Y, ordonne(T,RT).
ordonne([(X,Y)|T],[Y,X]|RT) :- X>Y, ordonne(T,RT).

```

```

coupe(Pieces,Largeur,Hauteur,Plan) :-
sommessurfaces(Pieces,S),
S #<= Hauteur*Largeur,
ordonne(Pieces,PiecesOnEnd),
c(PiecesOnEnd,Largeur,Hauteur,Plan).

```

## Le programme complet (2)

```
c(Pieces,Largeur,Hauteur,Plan) :-
    listcoupe(Pieces,Largeur,Hauteur,Plan),!.
c(Pieces,Largeur,Hauteur,vertical(Coupe,PlanA,PlanB)) :-
    fd_domain(Coupe,1,Largeur),
    2*Coupe #=< Largeur,
    RestLargeur #= Largeur-Coupe,
    SurfaceA #= Coupe*Hauteur,
    SurfaceB #= RestLargeur*Hauteur,
    partition(Pieces,ResultatA,ResultatB,SurfaceA,SurfaceB),
    nonempty(ResultatA), nonempty(ResultatE),
    fd_labeling(Coupe),
    c(ResultatA,Coupe,Hauteur,PlanA),
    c(ResultatB,RestLargeur,Hauteur,PlanB).
c(Pieces,Largeur,Hauteur,horizontal(Coupe,PlanA,PlanB)) :-
    ...
```

## Le programme complet (3)

```
listcoupe(Pieces, Largeur, Hauteur, list(Plan)) :-
    Largeur #>= Hauteur, listcoupe_1(Pieces, Largeur, Hauteur, Plan).
listcoupe(Pieces, Largeur, Hauteur, stack(Plan)) :-
    Largeur #< Hauteur, listcoupe_1(Pieces, Hauteur, Largeur, Plan1),
    renversepieces(Plan1,Plan).

renversepieces([], []).
renversepieces([(X,Y)|L],[[Y,X]|L1]) :- renversepieces(L,L1).

listcoupe_1([],_,_, []).
listcoupe_1([(X,Y)|R], Largeur, Hauteur, [(X,Y)|PlanR]) :-
    Y #=< Hauteur,
    RestLargeur #= Largeur - X, RestLargeur #>= 0,
    listcoupe_1(R,RestLargeur,Hauteur,PlanR).
listcoupe_1([(X,Y)|R], Largeur, Hauteur, [(Y,X)|PlanR]) :-
    Y #> Hauteur,
    X #=< Hauteur,
    RestLargeur #= Largeur - Y, RestLargeur #>= 0,
    listcoupe_1(R,RestLargeur,Hauteur,PlanR).
```

## Est-ce qu'on peut faire encore mieux?

- Il y a des symétries quand on a des morceaux identiques  
Exemple : `plan([(2,2),(2,2),(2,2)],4,4,Plan)`.
- Pour les éviter il faudrait changer la représentation du problème :  
Lister des morceaux différents, avec un entier qui donne le nombre de copies souhaitées.  
Exemple : `plan([(2,2):3],4,4,Plan)`.