

## Contraintes sur un domaine fini

- On a pour toute variable un *choix fini* de ses valeurs.
- Une classe importante de domaine de contraintes.
- Utilisée pour modéliser des problèmes avec des choix.
- Ordonnancement, Emploi du temps, routage, etc.
- Beaucoup d'applications industrielles.

## Plan de ce cours

Contraintes sur un domaine fini.

- Solutionneur "génère et teste"
- Solutionneur par retour en arrière
- Consistance d'arc et de nœuds
- Heuristiques
- Consistance de bornes
- Consistance généralisée

Dans ce cours on parle seulement du *solutionneur*.

## Problème de satisfaction de contraintes

- Une contrainte  $C$  sur des variables  $x_1, \dots, x_n$
- Un domaine  $D(x_i)$  pour chaque variable
- Une contrainte  $C$  est implicitement donnée par

$$C \wedge x_1 \in D(x_1) \wedge \dots \wedge x_n \in D(x_n)$$

- Contrainte *binnaire* : Ses contraintes simples contiennent au plus deux variables. Donne lieu à un *graphe de contraintes*.
- On écrit «  $D(x) = \{c_1, \dots, c_n\}$  » au lieu de «  $x \in \{c_1, \dots, c_n\}$  ».

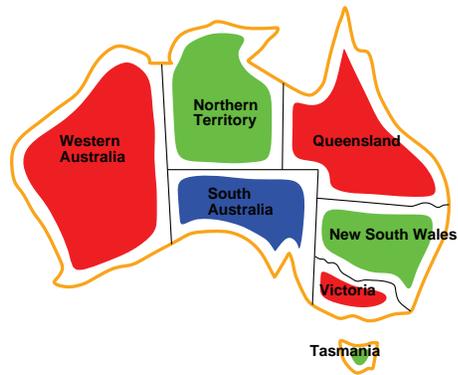
## Exemple: Colorer une carte

Trois couleurs, des régions adjacentes doivent avoir de couleurs différentes.

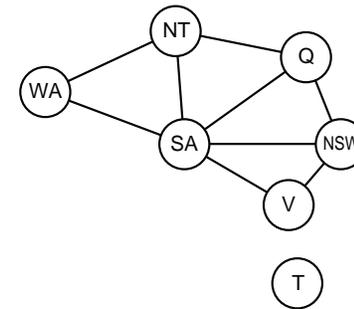


$$\begin{aligned} &WA \neq NT \wedge WA \neq SA \wedge NT \neq SA \wedge NT \neq Q \wedge SA \neq Q \wedge SA \neq V \\ &\wedge Q \neq NSW \wedge NSW \neq V \\ &D(WA) = D(NT) = D(SA) = D(Q) = D(V) = D(NSW) = D(T) = \\ &\{rouge, jaune, bleu\} \end{aligned}$$

## Exemple: Colorer une carte



## Graphe de contraintes



## Exemple: Les 4 reines

- Placer 4 reines sur un échiquier de taille 4x4 de sorte qu'aucune reine est en prise
- Quatre variables  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$  qui représentent la ligne de la reine dans chaque colonne. Domaine de chaque variable:  $\{1, 2, 3, 4\}$
- Les contraintes:  $Q_1 \neq Q_2 \wedge Q_1 \neq Q_3 \wedge Q_1 \neq Q_4 \wedge Q_2 \neq Q_3 \wedge Q_2 \neq Q_4 \wedge Q_3 \neq Q_4$
- $Q_1 \neq Q_2 + 1 \wedge Q_1 \neq Q_3 + 2 \wedge Q_1 \neq Q_4 + 3 \wedge Q_2 \neq Q_3 + 1 \wedge Q_2 \neq Q_4 + 2 \wedge Q_3 \neq Q_4 + 1$
- $Q_1 \neq Q_2 - 1 \wedge Q_1 \neq Q_3 - 2 \wedge Q_1 \neq Q_4 - 3 \wedge Q_2 \neq Q_3 - 1 \wedge Q_2 \neq Q_4 - 2 \wedge Q_3 \neq Q_4 - 1$

## Exemple: sac du contrebandier

- Contrebandier avec un sac de capacité 9.
- Il doit choisir des objets pour faire un profit d'au moins 30

objet	profit	poids
whisky	15	4
parfum	10	3
cigarettes	7	2

$$4W + 3P + 2C \leq 9 \wedge 15W + 10P + 7C \geq 30$$

- Domaines des variables ?

## Solutionneur génère et teste

- Le plus simple est d'énumérer les affectations possibles.
- Le solutionneur **génère et teste** :
  - ▶ Énumère une par une les valeurs des variables une par une
  - ▶ Quand *chaque* variable a une valeur, on teste si la contrainte est satisfaite ou pas.
- Très inefficace !
- On peut améliorer cette technique en testant à chaque fois, si l'affectation partielle entraîne déjà la non-satisfaisabilité : voir le transparent suivant.

## Solutionneur simple par retour en arrière

- Le solutionneur simple par retour en arrière:
  - ▶ énumère une par une les valeurs des variables une par une
  - ▶ vérifie qu'aucune contrainte simple est faussée à chaque étape
  - ▶ On peut facilement tester la satisfaisabilité d'une contrainte simple sans variables.
  - ▶  $partsat(C)$  retourne faux, si  $C$  n'est pas satisfaisable à cause d'une contrainte simple sans variables (close) qui n'est pas satisfaisable. Sinon  $partsat(C)$  retourne vrai.

## Solutionneur par retour en arrière

$partsat(C) = vrai$  ssi toute contrainte simple et close de  $C$  est vraie

$backsolve(C, D)$

- Si  $variables(C)$  est vide, alors retourne  $partsat(C)$
- Choisir  $x$  dans  $variables(C)$
- Pour chaque valeur  $d$  dans  $D(x)$ 
  - ▶ Soit  $C_1$  la contrainte  $C$  où  $x$  est remplacé par  $d$
  - ▶ Si  $partsat(C_1)$  alors  
si  $backsolve(C_1, D)$  alors retourne vraie
- Retourne faux

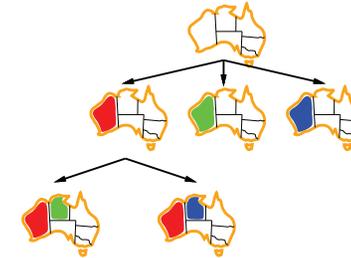
## Exemple retour en arrière



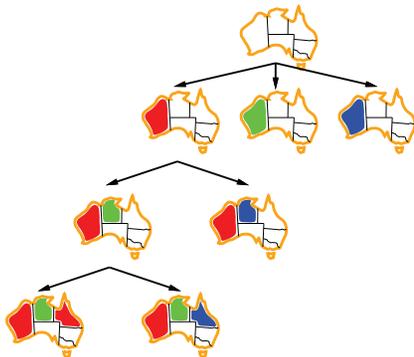
## Exemple retour en arrière



## Exemple retour en arrière



## Exemple retour en arrière



## Complexité des contraintes sur un domaine fini

- Satisfaisabilité de contraintes sur un domaine fini est NP-complet (même si on se restreint à des domaines de cardinalité 2).
- C'est-à-dire :
  - ▶ On ne connaît que des algorithmes avec complexité exponentielle au pire des cas.
  - ▶ Il est fort probable qu'il n'y a pas d'algorithme avec une meilleure complexité.
- Voir un cours de *calculabilité et complexité*.

## Consistance de nœud et d'arc

- Idée: Trouver un CSP équivalent au CSP d'origine qui a des domaines de variables plus petits.
- C'est le principe de la *simplification de contraintes*, appliqué aux domaines des variables.
- On considère les contraintes simples une par une.
- Consistance de nœud : ( $variables(c) = \{x\}$ ): enlever chaque valeur du domaine de  $x$  qui rend la contrainte simple  $c$  insatisfaisable.
- Consistance d'arc : ( $variables(c) = \{x, y\}$ ): enlever chaque valeur de  $D(x)$  pour laquelle il n'y a pas de valeur dans  $D(y)$  qui satisfait la contrainte simple  $c$  et vice-versa.

## Consistance de nœud

- Une contrainte simple  $c$  est nœud-consistante avec domaine  $D$ , si
  - ▶ soit  $|variables(c)| \neq 1$ ;
  - ▶ soit  $variables(c) = \{x\}$ , et pour chaque  $d$  dans  $D(x)$ ,  $\{x \leftarrow d\}$  est une solution de  $c$ .
- Un CSP est nœud-consistant, si chaque contrainte simple est nœud-consistante.

## Comment obtenir un CSP nœud-consistant ?

$nœudcons(C, D)$

- Pour chaque contrainte simple  $c$  dans  $C$ 
  - ▶  $D := nœudconssimple(c, D)$
- retourne  $D$

$nœudconssimple(c, D)$

- Si  $|variables(c)| = 1$  alors
  - ▶ Soit  $\{x\} = variables(c)$   
 $D(x) := \{d \in D(x) | \{x \leftarrow d\} \text{ est une solution de } c\}$
- retourne  $D$

## Arc-consistance

- Une contrainte simple est arc-consistante avec domaine  $D$ , si
  - ▶ soit  $|variables(c)| \neq 2$ ;
  - ▶ soit  $variables(c) = \{x, y\}$  et
    - ★ pour chaque  $d$  dans  $D(x)$ , il y a  $e \in D(y)$  tel que  $\{x \leftarrow d, y \leftarrow e\}$  est une solution de  $c$
    - ★ et analogue pour  $y$ .
- Un CSP est arc-consistant, si chaque contrainte simple est arc-consistante.

## Comment obtenir un CSP arc-consistant ?

$arcconssimple(c, D)$

- si  $|variables(c)| = 2$  alors
  - ▶  $D(x) := \{d \in D(x) | \exists e \in D(y) \text{ t.q. } \{x \leftarrow d, y \leftarrow e\}$   
est une solution de  $c\}$
  - ▶  $D(y) := \{e \in D(y) | \exists d \in D(x) \text{ t.q. } \{x \leftarrow d, y \leftarrow e\}$   
est une solution de  $c\}$
- retourne  $D$

Enlève des valeurs non arc-consistantes avec  $c$

## Comment obtenir un CSP arc-consistant ?

$arccons(C, D)$

- Répète
  - ▶  $W := D$
  - ▶ Pour chaque contrainte simple  $c$  de  $C$ 
    - ★  $D := arcconssimple(c, D)$
- jusqu'à  $W = D$
- retourne  $D$

## Arc-consistance : calcul d'un point fixe

- Remarquer la boucle : le traitement d'une contrainte simple peut déclencher qu'une autre contrainte simple est à traiter de nouveau.
- Exemple:

$$X_1 < X_2 \wedge X_2 < X_3 \wedge X_3 < X_4$$
$$X_1, X_2, X_3, X_4 \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

(sera fait au tableau)

## Utiliser nœud et arc-consistance

- On peut définir des solveurs.
- Deux types de domaines importants :
  - ▶ domaine *faux* : une variable a un domaine vide
  - ▶ domaine *simple* : toutes les variables ont un domaine singleton (de taille un)
- Étendre satisfaisabilité sur des CSPs avec des domaines simples.

## Solutionneur nœud et arc-consistance

Solutionneur **incomplet**

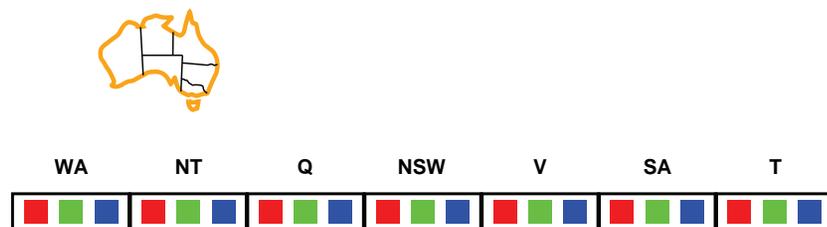
- $D := \text{nœudcons}(C, D)$
- $D := \text{arccons}(C, D)$
- Si  $D$  est un domaine faux, alors retourne *faux*
- Si  $D$  est un domaine simple, alors retourne *satisfaisable*( $C, D$ )
- sinon retourne *inconnu*

Comment définir un solutionneur **complet** en utilisant arc et nœud-consistance ?

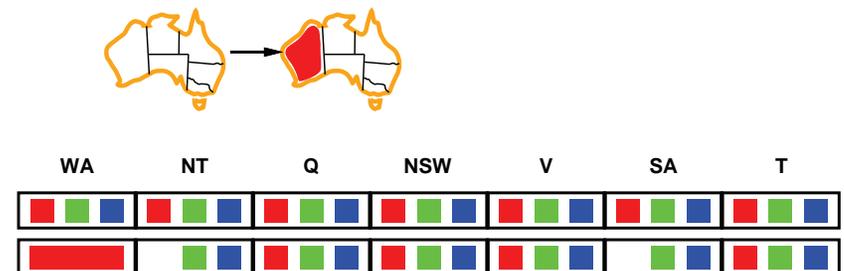
## Retour en arrière avec consistance

- Combiner le solutionneur par retour en arrière avec consistance.
- Appliquer nœud (et/ou) arc-consistance avant de lancer le solutionneur par retour en arrière **et** après chaque fois qu'une variable est affectée par le solutionneur.

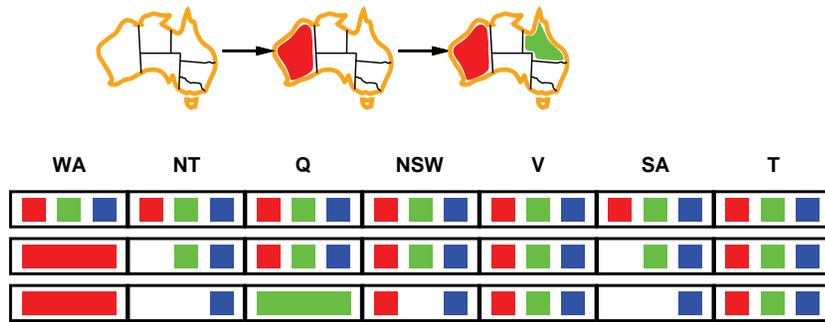
## Exemple avec nœud-consistance uniquement



## Exemple avec nœud-consistance

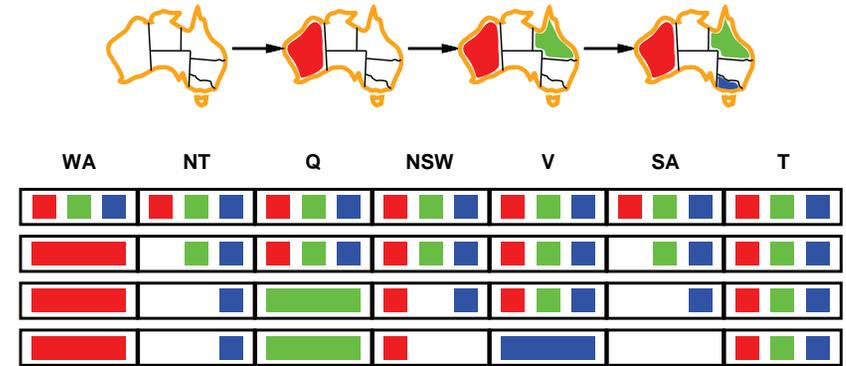


## Exemple avec nœud-consistance



Ce problème est-il arc-consistant ?

## Exemple avec nœud-consistance

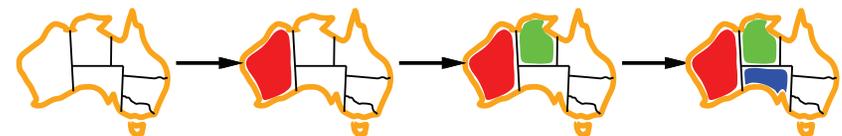


## Heuristiques

- On peut utiliser des heuristiques pour choisir la variable à affecter et la valeur affectée.
- statique/dynamique

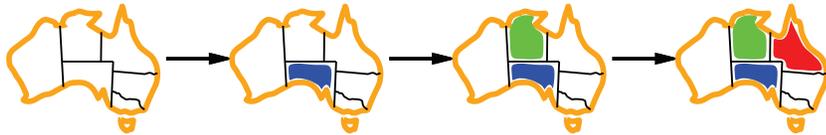
## La variable la plus contrainte

- Choisir la variable avec le plus petit nombre de valeurs légales



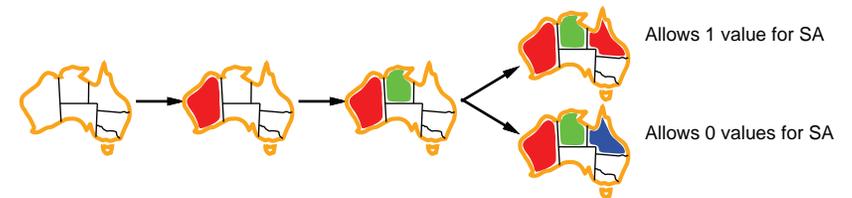
## La variable la plus contraignante

- En cas d'égalité pour la variable la plus contrainte
- Choisir la variable qui a le plus de contraintes avec les variables qui restent



## La valeur la moins contraignante

- Pour une variable, choisir la valeur qui contraint le moins possible les variables qui restent



## Consistance pour des contraintes avec plus de 2 variables

- Quoi faire avec des contraintes avec plus de 2 variables ?
- Consistance d'hyper-arc: étendre l'arc-consistance à un nombre arbitraire de variables
- Déterminer la hyper-arc-consistance est NP-difficile

## Consistance de bornes

- CSP arithmétique: les contraintes sont sur des entiers
- intervals:  $[l..u]$  représente l'ensemble  $\{l, l + 1, \dots, u\}$
- Idée: Utiliser la consistance sur les réels et examiner seulement les bornes (inférieurs et supérieurs) du domaine de chaque variable
- Définir  $\min(D, x)$  comme l'élément minimum dans le domaine de  $x$ , pareil  $\max(D, x)$

## Consistance de bornes

- Une contrainte simple  $c$  est bornes-consistante avec domaine  $D$ , si pour chaque variable  $x$  dans  $variables(c)$ 
  - ▶ ils existent des réels  $d_1, \dots, d_k$  pour les autres variables  $x_1, \dots, x_k$  tel que
    - ★  $min(D, x_j) \leq d_j \leq max(D, x_j)$  pour tout  $j$  et
    - ★  $\{x \leftarrow min(D, x), x_1 \leftarrow d_1, \dots, x_k \leftarrow d_k\}$  est une solution de  $c$
  - ▶ ils existent des réels  $d'_1, \dots, d'_k$  pour les autres variables  $x_1, \dots, x_k$  tel que
    - ★  $min(D, x_j) \leq d'_j \leq max(D, x_j)$  pour tout  $j$  et
    - ★  $\{x \leftarrow max(D, x), x_1 \leftarrow d'_1, \dots, x_k \leftarrow d'_k\}$  est une solution de  $c$
- Un CSP arithmétique est bornes-consistant, si toutes ses contraintes simples le sont

## Comment obtenir un CSP bornes-consistant ?

- Étant donné un domaine  $D$ , on doit modifier les bornes, de sorte que le résultat est bornes-consistant
- Utilisation de règles de propagation
- Exemple:
  - ▶  $X = Y + Z$  équivalent à  $Y = X - Z$  et  $Z = X - Y$
  - ▶ Raisonner avec  $max$  et  $min$
  - ▶  $X \geq min(D, Y) + min(D, Z)$ ,  $X \leq max(D, Y) + max(D, Z)$
  - ▶  $Y \geq min(D, X) - max(D, Z)$ ,  $Y \leq max(D, X) - min(D, Z)$
  - ▶  $Z \geq min(D, X) - max(D, Y)$ ,  $Z \leq max(D, X) - min(D, Y)$
  - ▶ cela donne des **règles de propagation**

## Exemple

- $X = Y + Z$ ,  $D(X) = [4..8]$ ,  $D(Y) = [0..3]$ ,  $D(Z) = [2..2]$
- Les règles de propagation donnent:
  - ▶  $(0 + 2) \leq X \leq 5 (= 3 + 2)$
  - ▶  $(4 - 2) \leq Y \leq 6 (= 8 - 2)$
  - ▶  $(4 - 3) \leq Z \leq 8 (= 8 - 0)$
- Les domaines peuvent être réduits:  
 $D(X) = [4..5]$ ,  $D(Y) = [2..3]$ ,  $D(Z) = [2..2]$

## D'autres règles de propagation

- $4W + 3P + 2C \leq 9$
- $W \leq \frac{9}{4} - \frac{3}{4}min(D, P) - \frac{2}{4}min(D, C)$
- $P \leq \frac{9}{3} - \frac{4}{3}min(D, W) - \frac{2}{3}min(D, C)$
- $C \leq \frac{9}{2} - \frac{4}{2}min(D, W) - \frac{3}{2}min(D, P)$
- Étant donné un domaine initial  
 $D(W) = [0..9]$ ,  $D(P) = [0..9]$ ,  $D(C) = [0..9]$  on détermine que  
 $W \leq \frac{9}{4}$ ,  $P \leq \frac{9}{3}$ ,  $C \leq \frac{9}{2}$ ,
- nouveau domaine:  $D(W) = [0..2]$ ,  $D(P) = [0..3]$ ,  $D(C) = [0..4]$

## Inégalités $Y \neq Z$

- Les inégalités donnent des règles de propagation très faibles
- Seulement si une de deux côtés prend une valeur fixe qui est égale au minimum ou maximum de l'autre il y a propagation
- $D(Y) = [2..4], D(Z) = [2..3]$  pas de propagation
- $D(Y) = [2..4], D(Z) = [3..3]$  pas de propagation
- $D(Y) = [2..4], D(Z) = [2..2]$  propagation  
 $D(Y) = [3..4], D(Z) = [2..2]$

## Multiplication $X = Y * Z$

- Si toutes les variables sont positives  
 $X \geq \min(D, Y) * \min(D, Z), X \leq \max(D, Y) * \max(D, Z)$  etc. pour  $Y, Z$
- sinon  $X \geq \text{minimum}\{\min(D, Y) * \min(D, Z), \min(D, Y) * \max(D, Z), \max(D, Y) * \min(D, Z), \max(D, Y) * \max(D, Z)\}$
- similaire pour borne supérieure pour  $X$  en utilisant *maximum*

## Multiplication $X = Y * Z$

- Règles de propagation pour  $Y$  et  $Z$ ?
- si  $\min(D, Z) < 0$  et  $\max(D, Z) > 0$  il n'y a pas de restriction pour  $Y$
- On "attend" jusqu'à-ce que le domaine de  $Z$  devienne non négatif ou non positif et ensuite en utilise des règles de la forme

$$Y \geq \text{minimum}\{\min(D, X)/\min(D, Z), \min(D, X)/\max(D, Z), \max(D, X)/\min(D, Z), \max(D, X)/\max(D, Z)\}$$

Attention à la division par 0

## Algorithme de bornes consistance

- *bornescons*( $C, D$ ): Appliquer les règles de propagation pour chaque contrainte simple de  $C$ , jusqu'à-ce qu'il n'y a plus de changement dans les domaines  $D$ .
- On ne réexamine pas une contrainte simple, si les domaines de ses variables n'ont pas changé.

## Solutionneur bornes consistance

- $D := \text{bornescons}(C, D)$
- Si  $D$  est un domaine faux, alors retourne *false*
- Si  $D$  est un domaine simple, alors retourne *satisfaisable*( $C, D$ )
- sinon retourne *inconnu*

## Solutionneur par retour en arrière avec bornes consistance

- Appliquer bornes consistance avant de lancer le solutionneur par retour en arrière **et** à chaque fois qu'une variable est affectée par le solutionneur retour en arrière.

## Exemple retour en arrière avec bornes consistance

- Problème du sac du contrebandier
- $4W + 3P + 2C \leq 9 \wedge 15W + 10P + 7C \geq 30$
- Domaines initiaux :  $D(W) = [0..9]$ ,  $D(P) = [0..9]$ ,  $D(C) = [0..9]$
- Bornes consistance sur la première contrainte donne:  
 $D(W) = [0..2]$ ,  $D(P) = [0..3]$ ,  $D(C) = [0..4]$
- On essaie  $W = 0$ . Ça donne :  $D(W) = [0..0]$ ,  $D(P) = [1..3]$ ,  
 $D(C) = [0..3]$
- On essaie  $P = 1$ . Ça donne :  $D(W) = [0..0]$ ,  $D(P) = [1..1]$ ,  
 $D(C) = [3..3]$  et on a trouvé une solution.
- On peut aussi chercher les autres solutions

## Consistance généralisée

- On peut combiner les trois consistances (nœud, arc, bornes) vues jusqu'à présent.
- Toutes ses méthodes utilisent les contraintes simples une par une.
- On peut considérer des contraintes simples "complexes" qui sont une conjonction de contraintes simples avec un mécanisme de propagation spécial.
- Exemple:  $\text{alldifferent}(\{V_1, \dots, V_n\})$
- $\text{alldifferent}(\{X, Y, Z\})$  signifie  $X \neq Y \wedge Y \neq Z \wedge X \neq Z$
- Arc-consistant avec  $D(X) = \{1, 2\}$ ,  $D(Y) = \{1, 2\}$ ,  $D(Z) = \{1, 2\}$
- Mais il n'y a pas de solution.

## Consistance pour alldifferent

- Soit  $c$  de la forme  $alldifferent(V)$
- Tant qu'il existe  $v \in V$  avec  $D(V) = \{d\}$ 
  - ▶  $V := V - \{v\}$
  - ▶ Pour chaque  $v' \in V$ 
    - ★  $D(v') := D(v') - \{d\}$
- $DV := \bigcup_{v \in V} D(v)$
- Si  $|V| > |DV|$  alors retourne *domaine faux*
- retourne  $D$

## Exemples alldifferent

- $alldifferent(\{X, Y, Z\})$  avec  $D(X) = \{1, 2\}$ ,  $D(Y) = \{1, 2\}$ ,  $D(Z) = \{1, 2\}$
- Algorithme retourne *faux*
- $alldifferent(\{X, Y, Z, T\})$  avec  $D(X) = \{1, 2\}$ ,  $D(Y) = \{1, 2\}$ ,  $D(Z) = \{1, 2\}$ ,  $D(T) = \{2, 3, 4, 5\}$
- Algorithme ne détecte pas le problème
- On peut utiliser des algorithmes plus compliqués pour cela.

## Exemple d'utilisation de alldifferent

		9			1	6	2	
5	7			2	8		3	
3			7					4
8	9			7		4		
	6		5		3		9	
		1		9			7	6
6					7			8
	4		1	3			6	5
	2	7	6			9		

## Sudoku

- Le problème du Sudoku consiste à remplir une grille de sorte que chaque ligne, chaque colonne et chaque carré contiennent les chiffres 1 à 9.
- Pour modéliser ce problème on peut utiliser alldifferent. Comment ?