Université de Paris - Master 1 Informatique - Programmation logique par contraintes

Examen du 8 janvier 2021 - Durée : 2 heures

Correction

Informations : Tous les documents non-électroniques sont autorisés. Le barème est donné à titre indicatif et peut être modifié.

Exercice 1 *Programmation puzzle* (**4 points**)
On considère le puzzle suivant:

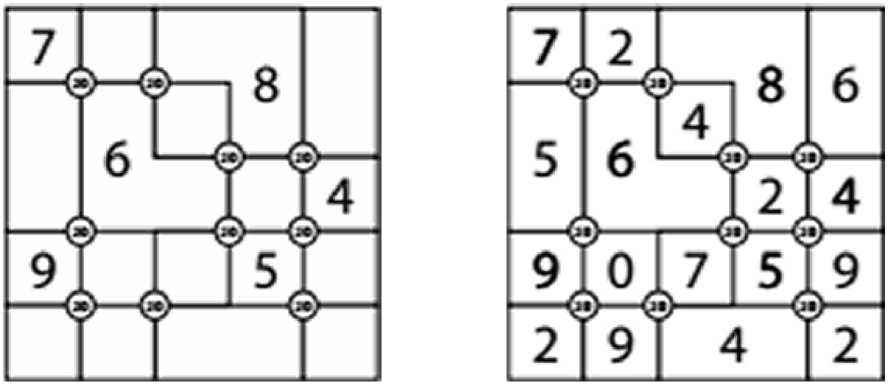


Figure 1: Une grille et sa solution

Chaque région de la grille doit être remplie par un nombre entre 0 et 9 de sorte que

- les nombres dans deux régions adjacentes (verticalement ou horizontalement) soient différents
- à chaque fois qu'il y a quatre régions qui se rencontrent en un point (indiqué par un petit rond), la somme de leurs nombres soient égale à 20.

Donnez un programme en ECLiPSeCLP qui résout la grille de l'exemple.

CORRECTION:

```
:- lib(ic).

exo1(L) :-
    L = [A,B,C,D,E,F,G,H,I,J,K,M],
    L :: [0..9],
    A #\= 7, A #\= 8, A #\= 6,
    B #\= 8, B #\= 4,
    C #\= 7, C #\= 6, C #\= 9,
```

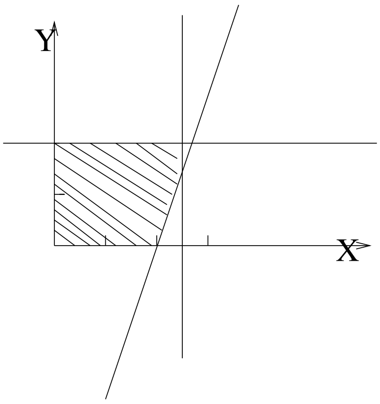
```
D #\= 6, D #\= 8,
E #\= 6, E #\= 8, E #\= 4, E #\= 5,
F #\= 9, F #\= 6, F #\= G, F #\= J,
G #\= 6, G #\= 5, G #\= K,
H #\= 5, H #\= 4, H #\= M,
I #\= 9, I #\= J, J #\= K,
K #\= 5, K #\= M,
7+6+A+C #= 20, A+6+8+D #= 20, 6+8+D+E #= 20, 4+8+B+E #= 20,
9+6+C+F #= 20, 5+6+E+G #= 20, 4+5+E+H #= 20,
9+F+I+J #= 20, F+G+J+K #= 20, 5+H+K+M #= 20,
labeling(L).
```

Exercice 2 *Simplex* (**7 points**)
On considère le problème suivant :
Minimiser $-Y - X$ par rapport à $X \geq 0, Y \geq 0$ et

$$\begin{aligned} 6 &\geq 3 * X - Y \\ X &\leq \frac{5}{2} \\ Y &\leq 2 \end{aligned}$$

- Visualisez le problème en dessinant un plan (axes: X et Y) avec les contraintes. Les contraintes définissent une zone dans le plan. Soyez précis.
- Appliquez l'algorithme simplex (Il est simple d'obtenir une forme simplex de base).
- Pour quelles valeurs de X et Y le minimum est-il atteint ?
- Donnez une requête en ECLiPSeCLP permettant d'obtenir le minimum.
- Donnez une fonction objective (à la place de $-Y - X$) à minimiser de sorte que le minimum soit atteint à plusieurs endroits.
- Est-ce que pour n'importe quelle fonction objective à minimiser le problème a toujours une solution ? Justifiez.
- Dans le problème original on impose en plus que X et Y doivent être des entiers. Quel est le minimum dans ce cas ? Donnez la réponse à partir du dessin (sans calcul).

CORRECTION:

- 

- On obtient une forme simplex: Minimiser $-Y - X$ par rapport à à $X \geq 0, Y \geq 0$ et

$$\begin{aligned} 6 &= S + 3 * X - Y \\ X + T &= \frac{5}{2} \\ Y + U &= 2 \end{aligned}$$

  On transforme on forme simplex de base: Minimiser $-Y - X$ par rapport à (toutes les variables sont ≥ 0)

$$\begin{aligned} S &= 6 - 3 * X + Y \\ T &= \frac{5}{2} - X \\ U &= 2 - Y \end{aligned}$$

On choisit Y et la troisième équation: Minimiser $-X - 2 + U$ p.r. à

$$\begin{aligned} S &= 8 - 3 * X - U \\ T &= \frac{5}{2} - X \\ Y &= 2 - U \end{aligned}$$

On choisit X et la deuxième équation (car $\frac{8}{3} \leq \frac{5}{2}$). On obtient: Minimiser $-\frac{9}{2} + U + S$ p.r. à

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} + 3 * T - U \\ X &= \frac{5}{2} - T \\ Y &= 2 - U \end{aligned}$$

Donc, minimum $-\frac{9}{2}$ atteint pour $X = \frac{5}{2}$ et $Y = 2$.

Requête ECLiPSeCLP (avec `lib(clpr)` ou `lib(clpq)`)

```
{6 >= 3*X-Y, X >= 0, Y >= 0, X =< 5/2, Y =< 2}, inf(-X-Y,Min).
```

Par exemple, si on minimise $-X$ le minimum 0 est atteint pour tous les Y entre 0 et 2.

Si la fonction objective est linéaire et ne contient que X et Y, alors il y a toujours une solution, car les contraintes définissent un polyhèdre fermé. Par contre, si la fonction objective contient une variable différente de X et de Y, alors il n'y a pas toujours une solution (par exemple, minimiser $-Z$)

Exercice 3 *Consistance* (**5 points**)
On considère la contrainte suivante sur les entiers : $X \geq 2 * Y \ \wedge\ 3 * X + 4 = 2 * Z \ \wedge\ Y + 12 \leq X + Z$ avec les domaines (intervalles) $X \in [2 \ldots 8]$, $Y \in [1 \ldots 8]$ et $Z \in [4 \ldots 11]$.

- Est-ce que la contrainte est **nœud-consistante** ?
- Rendez la contrainte **arc-consistante**. Donnez uniquement les nouveaux domaines (qui ne sont plus forcément des intervalles).
- Rendez la contrainte **borne-consistante** en partant des domaines d'origine. Donnez les nouveaux domaines (qui sont des intervalles). Justifiez.
- Est-ce qu'en général l'arc-consistance d'une contrainte implique sa satisfaisabilité ?

CORRECTION:

- La contrainte est nœud-consistante car toutes les contraintes simples ont plus qu'une variable.
- Arc-consistance: On considère uniquement les deux contraintes simples avec 2 variables. Avec $X \geq 2 * Y$ on obtient $X \in \{2, \ldots, 8\}$ et $Y \in \{1, \ldots, 4\}$. Ensuite avec $3 * X + 4 = 2 * Z$ on obtient $X \in \{2, 4, 6\}$ et $Z \in \{5, 8, 11\}$ (Par exemple pour $X = 3$ il n'y a pas de valeur pour Z qui rend la contrainte $3 * X + 4 = 2 * Z$ vraie). Ensuite on reconsidère $X \geq 2 * Y$ et on obtient $Y \in \{1, 2, 3\}$.
- Borne consistance:
  - Contrainte (1) $X \geq 2 * Y$: On a $X \geq 2 * min(Y)$ et $Y \leq max(X)/2$
  - Contrainte (2) $3 * X + 4 = 2 * Z$: On a $(2 * min(Z) - 4)/3 \leq X \leq (2 * max(Z) - 4)/3$ et $(3 * min(X) + 4)/2 \leq Z \leq (3 * max(X) + 4)/2$
  - Contrainte (3) $Y + 12 \leq X + Z$: On a $Y \leq max(X) + max(Z) - 12$ et $X \geq 12 + min(Y) - max(Z)$ et $Z \geq 12 + min(Y) - max(X)$

  En considérant Contrainte 1 on obtient: $X \in [2 \ldots 8]$ et $Y \in [1 \ldots 4]$. En considérant Contrainte 2 on obtient: $X \in [2 \ldots 6]$ et $Z \in [5 \ldots 11]$. En considérant Contrainte 3 on obtient: $X \in [2 \ldots 6]$, $Y \in [1 \ldots 4]$ et $Z \in [7 \ldots 11]$. Il faut reconsidérer les contraintes. En considérant Contrainte 1 on obtient: $X \in [2 \ldots 6]$ et $Y \in [1 \ldots 3]$. En considérant Contrainte 2 on obtient: $X \in [4 \ldots 6]$ et $Z \in [8 \ldots 11]$. En considérant Contrainte 3 on obtient: $X \in [4 \ldots 6]$, $Y \in [1 \ldots 3]$ et $Z \in [8 \ldots 11]$. En reconsidérant les contraintes, les domaines ne changent plus.

- L'arc-consistance d'une contrainte n'implique pas sa satisfaisabilité. Par exemple la contrainte $X + Y = Z$ avec $X \in \{1\}$, $Y \in \{2\}$ et $Z \in \{2\}$ est arc-consistant (n'importe quelle contrainte simple avec 3 variables et arc-consistante par définition) mais elle n'est pas satisfaisable. Un autre exemple avec des contraintes simple à 2 variables: $X \neq Y$ et $Y \neq Z$ et $Z \neq X$ et $X, Y, Z \in \{1, 2\}$.

Exercice 4 *Programmation* (**4 points**)
En utilisant la librairie `clpq` écrivez un prédicat `listecalcul` en ECLiPSeCLP qui étant donné une liste de taille au moins 3 de la forme `[0,_,_,...,_,_,_,10]` donne une liste, où chaque élément (à partir du troisième) de la liste est la moyenne de ses deux prédécesseurs.
Par exemple, `L=[0,_,_,_,_,10],listecalcul(L)` donne `L = [0,160/11,80/11,120/11,100/11,10]`.

CORRECTION:

```
:- lib(clpq).

listecalcul([_,_]).
listecalcul([A,B,C|L]) :- {(A+B)/2=C},listecalcul([B,C|L]).
```