

Automates Avancés

Travaux Dirigés n°1

► **Exercice 1.**

Donner un automate pour les langages suivants :

- $\{x \in \{0, 1\}^* \mid x \text{ représente un nombre positif codé en binaire divisible par } 2\}$
- $\{x \in \{0, 1\}^* \mid x \text{ représente un nombre positif codé en binaire divisible par } 3\}$
- $\{x \in \{0, 1\}^* \mid x \text{ représente un nombre positif codé en binaire divisible par } 6\}$ en utilisant les automates pour les langages précédents

► **Exercice 2. De l'automate à l'expression rationnelle**

Donner une expression rationnelle du langage reconnu par l'automate de la figure 1.

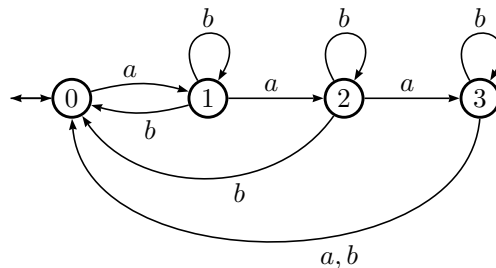


Figure 1: automate fini

► **Exercice 3. De l'expression rationnelle à l'automate**

Donner un automate reconnaissant le langage

$$a(b + (ba)^*)a(a + b)(ba + a).$$

► **Exercice 4. Manipulation d'automates**

Le *produit de shuffle* de deux mots u et v est l'ensemble

$$u \sqcup v = \{u_0v_0u_1v_1 \cdots u_nv_n \mid n \in \mathbb{N} \text{ et } \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \\ u_i \in \Sigma^*, v_i \in \Sigma^* \text{ et } u_0u_1 \cdots u_n = u, v_0v_1 \cdots v_n = v\}.$$

Le produit de shuffle de deux langages est l'ensemble des produits de shuffle de leurs mots :

$$L \sqcup M = \{u \sqcup v \mid u \in L \text{ et } v \in M\}.$$

- Donner le produit de shuffle de a^*b^* et c^*d^* .
- Soit deux langages L_1 et L_2 donnés par des automates déterministes. Donner un automate qui reconnaît $L_1 \sqcup L_2$. On pourra commencer par regarder ce qui se passe si L_1 et L_2 sont des singletons.

► **Exercice 5. Lemme de pompage (d'itération)**

1. Soit un automate fini quelconque \mathcal{A} et un mot u reconnu par \mathcal{A} . Montrer que si u est suffisamment long, alors tout chemin réussi de \mathcal{A} d'étiquette u passe deux fois par le même état. Cela reste vraie pour un mot xyz reconnu par \mathcal{A} et y suffisamment grand.
2. En déduire le lemme de pompage :

Lemme 1 (de pompage) *Soit L un langage régulier. Alors la propriété suivante est vraie: Il existe un entier N tel que pour tous mots x, y, z avec $xyz \in L$ et $|y| \geq N$, il existe une factorisation $y = uvw$, avec v non vide et pour tout $i \geq 0$, $xuv^i w \in L$.*

► **Exercice 6. Lemme de pompage**

1. Montrer que le langage $\{a^n b^n, n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas régulier.
2. Montrer que $\bigcup_{n \geq 0} (a^+ c)^n (b^+ c)^n + (a + b + c)^* c c (a + b + c)^*$ satisfait la condition du lemme de pompage. Est-ce que le langage est régulier pour autant ?

► **Exercice 7.**

Est-ce que le langage $\{xy \mid x, y \in \{a, b\}^* \text{ et } |x|_a = |y|_b\}$ est régulier ? Justifier.

► **Exercice 8. Transformation de langages**

1. Montrer que le carré d'un langage régulier n'est pas nécessairement un langage régulier. Le carré du langage L étant défini par

$$L^2 = \{uu \mid u \in L\}.$$

2. Montrer que la racine carrée d'un langage régulier est un langage régulier. La racine carrée du langage L étant définie par

$$\sqrt{L} = \{u \mid uu \in L\}.$$

On pourra exprimer \sqrt{L} comme combinaison régulier de langages obtenus à partir d'un automate reconnaissant L .