M1/2009-2010 **Peter Habermehl** <Peter.Habermehl@liafa.jussieu.fr>

Automates Avancés
Travaux Dirigés n°1

▸ **Exercice 1.**
Donner un automate pour le langage

$$\{x \in \{0,1\}^* \mid x \text{ représente un nombre codé en binaire divisible par } 3\}$$

▸ **Exercice 2.** ***De l'automate à l'expression rationnelle***

Donner une expression rationnelle du langage reconnu par l'automate de la figure 1.

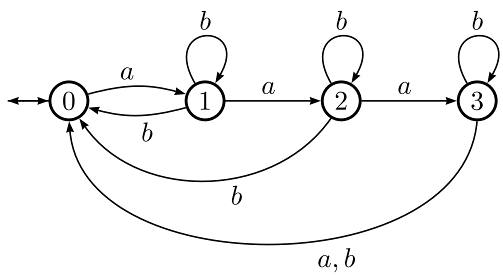

Figure 1: automate fini

▸ **Exercice 3.** ***De l'expression rationnelle à l'automate***

Donner un automate reconnaissant le langage

$$a\,(b+(ba)^*)\,a(a+b)(ba+a).$$

▸ **Exercice 4.** ***Manipulation d'automates***

Le *produit de shuffle* de deux mots u et v est l'ensemble

$$u \sqcup\!\sqcup v = \{u_0v_0u_1v_1\cdots u_nv_n \mid n \in \mathbb{N} \text{ et } \forall i \in \{1,2\ldots,n\},$$
$$u_i \in \Sigma^*, v_i \in \Sigma^* \text{ et } u_0u_1\cdots u_n = u, v_0v_1\cdots v_n = v\}.$$

Le produit de shuffle de deux langages est l'ensemble des produits de shuffle de leurs mots :

$$L \sqcup\!\sqcup M = \{u \sqcup\!\sqcup v \mid u \in L \text{ et } v \in M\}.$$

- Donner le produit de shuffle de a^*b^* et c^*d^*.
- Soit deux langages L_1 et L_2 donnés par des automates déterministes. Donner un automate qui reconnaît $L_1 \sqcup\!\sqcup L_2$. On pourra commencer par regarder ce qui se passe si L_1 et L_2 sont des singletons.

▸ **Exercice 5.** ***Lemme de pompage (d'itération)***

1. Soit un automate fini quelconque $\mathcal{A}$ et un mot u reconnu par $\mathcal{A}$. Montrer que si u est suffisamment long, alors tout chemin réussi de $\mathcal{A}$ d'étiquette u passe deux fois par le même état. Cela reste vraie pour un mot xyz reconnu par $\mathcal{A}$ et y suffisamment grand.

2. En déduire le lemme de pompage :

   Lemme 1 (de pompage) *Soit L un langage régulier. Alors la propriété suivante est vraie: Il existe un entier N tel que pour tous mots x, y, z avec $xyz \in L$ et $|y| \geq N$, il existe une factorisation $y = uvw$, avec v non vide et pour tout $i \geq 0$, $xuv^iwz \in L$.*

▸ **Exercice 6.** ***Lemme de pompage***

1. Montrer que le langage $\{a^n b^n, n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas régulier.

2. Montrer que $\bigcup_{n\geq 0}(a^+c)^n(b^+c)^n + (a+b+c)^*cc(a+b+c)^*$ satisfait la condition du lemme de pompage. Est-ce que le langage est régulier pour autant ?

▸ **Exercice 7.**
Est-ce que le langage $\{xy \mid x, y \in \{a,b\}^* \text{ et } |x|_a = |y|_b\}$ est régulier ? Justifier.

▸ **Exercice 8.** ***Transformation de langages***

1. Montrer que le carré d'un langage régulier n'est pas nécessairement un langage régulier. Le carré du langage L étant défini par
$$L^2 = \{uu \mid u \in L\}.$$

2. Montrer que la racine carrée d'un langage régulier est un langage régulier. La racine carrée du langage L étant définie par
$$\sqrt{L} = \{u \mid uu \in L\}.$$
   On pourra exprimer $\sqrt{L}$ comme combinaison régulier de langages obtenus à partir d'un automate reconnaissant L.