

Automates Avancés

Travaux Dirigés n°6

Logique monadique du second ordre

► **Exercice 1.**

Donner les langages sur $\Sigma = \{a, b\}$ associés à chacune des formules suivantes :

1. $\exists X \exists Y (\forall x (X(x) \leftrightarrow \neg Y(x)) \wedge \forall z ((X(z) \rightarrow P_a(z)) \wedge (Y(z) \rightarrow P_b(z))))$,
2. $\exists X \forall x ((X(x) \leftrightarrow X(x+1)) \wedge (P_a(x) \leftrightarrow X(x)))$.

► **Exercice 2.**

Donner une formule MSO pour les langages suivants sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$:

1. $\{u \in \Sigma^* \mid u \text{ ne contient pas le facteur } aa\}$,
2. $(a^2)^*$,
3. $\{u \in \Sigma^* \mid \text{dans } u \text{ le nombre de } a \text{ entre deux } b \text{ est un multiple de } 3\}$

Logique du premier ordre

► **Exercice 3.**

Donner les langages sur $\Sigma = \{a, b\}$ associés à chacune des formules suivantes :

1. $\exists x (\forall z ((z < x \rightarrow P_a(z)) \wedge (z > x \rightarrow P_b(z))))$,
2. $\exists x \exists y (x < y \wedge \forall z ((z < x \rightarrow P_a(z)) \wedge (z > y \rightarrow P_b(z))))$,
3. $\forall x ((\exists y (y < x)) \rightarrow P_a(x))$.

► **Exercice 4.**

Soit un alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Donner des formules du premier ordre qui définissent les langages suivants sur Σ :

1. Σ^+
2. $a\Sigma^*b$
3. $\Sigma^*ab\Sigma^*$

► **Exercice 5.**

On note $FO(P)$, où P est un prédicat, la logique du première ordre à laquelle on a ajouté le prédicat P (en plus des prédicats unaires P_a , pour tout $a \in \Sigma$).

Soient les prédicats suivants :

- $<(x, y)$ interprété par $x < y$,
- $S(x, y)$ interprété par $y = x + 1$ (ie “ y est la position qui suit x ”),
- $+(x, y, z)$ interprété par $z = x + y$.

1. Montrer que

$$FO \subseteq FO(S) \subseteq FO(<) \subseteq FO(+).$$

2. Montrer qu'on peut exprimer $x = y$ dans $FO(S)$.

3. Montrer qu'on peut définir le langage des mots de longueur supérieure à 5 dans $FO(S)$.

4. Montrer qu'on peut définir le langage $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ dans $FO(+)$.