

Automates Avancés

Travaux Dirigés n°4

► **Exercice 1. Échauffement: construction d'un ROBDD**

Construire le BDD ordonné réduit associé à la fonction $f(b_1, b_2, b_3, b_4) = b_2(b_3 + \bar{b}_4) + \bar{b}_1\bar{b}_2b_4 + b_1\bar{b}_2\bar{b}_4$ vis-à-vis de l'ordre naturel des variables. On procédera des deux façons suivantes :

- en construisant l'arbre de décision de la formule puis en le réduisant;
- en appliquant les constructions correspondant aux opérateurs de la formule.

► **Exercice 2.**

Soit MMM la fonction booléenne de n arguments définie par :

$$MMM(b_1, \dots, b_n) \iff \exists i \in [0, n], \forall j. 1 \leq j \leq i, b_j = 0 \wedge \forall k. i < k \leq n, b_k = 1.$$

(Autrement dit, la fonction vaut 1 si le mot $b_1 \dots b_n$ est une suite de 0 suivie d'une suite de 1.)

1. Faites un dessin détaillé du ROBDD représentant MMM . Combien de noeuds possède-t-il ?
2. Expliquez pourquoi ce BDD calcule bien la fonction souhaitée.
3. Expliquez pourquoi il est minimal.

► **Exercice 3. Ordre des variables et taille d'un ROBDD**

Soit f_n la fonction d'arité $2n$ définie par $f_n(b_1, \dots, b_{2n}) = \sum_{1 \leq i \leq n} b_{2i-1} b_{2i}$.

1. Construisez le ROBDD représentant f_3 puis la forme générale du ROBDD représentant f_n , vis-à-vis de l'ordre $b_1 < b_2 < \dots < b_{2n}$. Combien de noeuds ces ROBDD possèdent-ils ?
2. Construisez le ROBDD représentant f_3 puis la forme générale des n premiers niveaux du ROBDD représentant f_n , vis-à-vis de l'ordre $b_1 < b_3 < \dots < b_{2n-1} < b_2 < b_4 < \dots < b_{2n}$. Combien de noeuds ces ROBDD possèdent-ils ?

► **Exercice 4. ROBDD et fonctions symétriques**

1. Soit P_n la fonction de parité, dont la valeur vaut 1 si un nombre pair de ses n arguments vaut 1, et 0 sinon. Construisez le ROBDD représentant P_3 puis la forme générale du ROBDD représentant P_n , vis-à-vis de l'ordre $b_1 < b_2 < \dots < b_n$. Combien de noeuds ces ROBDD possèdent-ils ?
2. Soit T_n^k la fonction dite de seuil, dont la valeur vaut 1 si au moins k parmi ses n arguments valent 1, et 0 sinon. Construisez le ROBDD représentant T_3^6 (fonction de majorité parmi 6) puis la forme générale du ROBDD représentant T_n^k , vis-à-vis de l'ordre $b_1 < b_2 < \dots < b_n$. Combien de noeuds ces ROBDD possèdent-ils ?
3. Que se passe-t-il si l'on change l'ordre des variables dans les questions précédentes ? Combien de noeuds au maximum peut contenir le niveau i du ROBDD d'une fonction symétrique ? En déduire une borne supérieure au nombre de noeuds d'un tel ROBDD.