Examen M2 Maths Fondas 2019
–
Combinatoire II

Lundi 16 décembre 2019

On attachera une grande importance à la concision, à la clarté, et à la précision de la rédaction. On prendra garde à remplir les entêtes de copies et à ne pas quitter la salle sans avoir signé la liste et vérifié que sa copie a été remise.
Les notes de cours manuscrites (de CE cours) sont autorisées, ainsi que les feuilles d'exercices.
You can write your answers in English.

Corrigé: Les corrections sont données à titre indicatif.

Exercice 1

Pour $n \geq 1$ note $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des suites $\vec{\lambda} = (\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(2n)})$ de partitions telles que

$$\emptyset = \lambda^{(0)} \prec \lambda^{(1)} \succ' \lambda^{(2)} \prec \lambda^{(3)} \succ' \lambda^{(4)} \dots \prec \lambda^{(2n-1)} \succ' \lambda^{(2n)} = \emptyset.$$

Le poids $w(\vec{\lambda})$ associé à $\vec{\lambda}$ est le produit des $\displaystyle\prod_{i=1}^{2n} q_i^{\left||\lambda^{(i+1)}|-|\lambda^{(i)}|\right|}$, pour des indéterminées q_i.

Question 1 Exprimer la fonction de partition $A_n(\mathbf{q}) = \sum_{\vec{\lambda} \in \mathcal{A}_n} w(\vec{\lambda})$ comme un produit scalaire de vide à vide faisant intervenir les opérateurs vus en cours.
Corrigé: On a, par définition des opérateurs de vertex :

$$A_n(\mathbf{q}) = \langle \emptyset | \Gamma'_-(q_{2n}) \Gamma_+(q_{2n-1}) \dots \Gamma'_-(q_2) \Gamma_+(q_1) | \emptyset \rangle.$$

Question 2 Calculer $A_n(\mathbf{q})$ et en déduire le cardinal de $\mathcal{A}_n$.
Corrigé: On envoie tous les $\Gamma_+(x)$ à gauche et tous les $\Gamma'_-(y)$ à droite, où ils agissent trivialement sur le vide. Par la relation de quasi commutation, chaque commutation donne un facteur $(1 + xy)$. On trouve donc directement :

$$A_n(\mathbf{q}) = \prod_{\substack{i \text{ impair} \\ j \text{ pair} \\ 1 \leq i < j \leq 2n}} (1 + q_i q_j).$$

En mettant $q_i \equiv 1$ on trouve 2^k où k compte le nombre de paires $1 \leq i < j < 2n$ avec i impair et j pair, donc $|\mathcal{A}_n| = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$. Au passage, on remarque que l'on regarde un processus de Schur très particulier dont la fonction de partition est polynomiale, autrement dit, $\mathcal{A}_n$ est fini.

Exercice 2

On rappelle l'identité de Jacobi-Trudi duale : si λ est une partition telle que $\lambda_1 \leq n$, alors

$$s_\lambda = \det \left(e_{\lambda'_j - j + i} \right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

où λ' est la conjuguée (la transposée) de λ, avec la convention $e_k = 0$ si $k < 0$. On se propose dans cet exercice de donner une démonstration combinatoire directe de cette identité, similaire à la démonstration de l'identité primale vue en cours.

Question 3 Proposer un ensemble de pas, et des poids, tels que $e_k(x_1, x_2, \dots)$ soit la fonction génératrice des chemins infinis dans le quart de plan supérieur allant de $(p, 0)$ à $(p+k, \infty)$, pour toute abscisse p.
Si l'on est mal à l'aise avec les chemins infinis, on pourra supposer qu'il n'y a qu'un nombre fini de variables non nulles $x_1, x_2, \dots, x_m$ et considérer des chemins qui terminent en $(p+k, m)$.
Corrigé: On autorise les pas Nord $(0, 1)$ et les pas Nord-Est $(1, 1)$. On met un poids 1 sur les pas Nord et un poids x_i sur les pas Nord-Est dont l'ordonnée supérieure est i. Parmi les chemins infinis partant de $(p, 0)$, ceux qui terminent en $(p+k, \infty)$ sont ceux qui ont exactement k pas Nord-Est. Un tel chemin est clairement déterminé par l'ensemble des ordonnées supérieures de ses pas Nord-Est, qui forment un ensemble à k éléments sans répétition. Le poids de tous ces chemins est donc $\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k} x_{i_1} \dots x_{i_k} = e_k$.

Question 4 Conclure (on pourra associer un chemin à chaque colonne de λ).
Corrigé: Vu l'hypothèse $\lambda_1 \leq n$, et vu que les fonctions élémentaires demandent une croissance stricte des indices, il est assez clair qu'on va devoir associer une chemin à chaque *colonne* du SSYT.
Précisément, on associe un système de n chemins non intersectants à un un tableau $T \in SSYT(\lambda)$. Pour i de 1 à n, on forme un chemin P_i qui part la position $(-i, 0)$. On l'obtient en lisant la i-ème colonne de λ, et en effectuant un pas Nord-Est entre les ordonnées $a-1$ et a pour chaque entrée égale à a dans la colonne (le reste étant des pas Nord). Puisque les entrées sont strictement croissantes sur chaque colonne, le chemin obtenu est bien du type considéré dans la question précédente. L'incrément de l'abscisse de P_i est le nombre de cases de la colonne, λ'_i. Ce chemin part donc du point $u_i := (-i, 0)$ et termine au point $v_i := (\lambda'_i - i, \infty)$.
Montrons que cela établit une bijection entre systèmes de chemins non-intersectants et tableaux semistandard. Le système de chemins est non-intersectant si le chemin P_i ne rencontre jamais le chemin P_{i+1}, ce qui revient à dire que pour toute ordonnée a, l'abscisse de P_{i+1} à l'ordonnée a est inférieure à celle de P_i. Si l'on note $l_i(a)$ la ligne contenant la première entrée supérieure à a dans la colonne i (ou ∞ si pas de telle entrée) cela équivaut par construction à $l_i(a) \geq l_{i+1}(a)$. Cela équivaut à la faible croissance sur les lignes.
Il suffit donc de compter les systèmes non-intersectants. Tout système de chemins non-intersectant allant des u_i aux v_j envoie u_i sur v_i par planarité, donc la permutation associée à tout système non intersectant est l'identité, de signe $+1$. On peut donc appliquer le lemme LGV (quitte à tronquer à l'ordonnée M pour M suffisamment grand, puis faire ensuite $M \to \infty$ ensuite). Puisque par la question précédente, la série génératrice des chemins allant de u_i à v_j est $e_{\lambda'_j - j + i}$, on obtient donc

$$s_\lambda = \det \left(e_{\lambda'_j - j + i} \right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

Exercice 2

On rappelle la définition des éléments de Jucys-Murphy $J_1, \dots, J_n$, dans l'algèbre $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ du groupe symétrique :

$$J_i = (1,i) + (2,i) + \dots + (i-1,i) = \sum_{j=1}^{i-1} (j,i).$$

Question 5 Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ une permutation et $\ell \geq 1$ un entier. Montrer que le coefficient de l'identité dans $\left(\sum_{i=1}^n J_i\right)^\ell \sigma$ est égal au nombre de factorisations de σ en ℓ transpositions.
Corrigé: Il suffit de remarquer que la somme des J_i est égale à la somme de toutes les transpositions. Le coefficient de l'identité est donc le nombre de $\tau_1 \dots \tau_\ell \sigma = 1$ avec les τ_i transposition, ce que demande l'énoncé quitte à remplacer σ par σ^{-1}

Question 6 (question indépendante). Un produit de transpositions $\tau_1 \dots \tau_\ell$ est dit *monotone* si en écrivant chaque τ_i comme $\tau_i = (a_i, b_i)$ avec $a_i < b_i$, alors on a $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_\ell$. Autrement dit, leurs plus grands éléments apparaissent en ordre croissant. Montrer que le coefficient de l'identité dans $\left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{1-uJ_i}\right) \sigma$ est la série génératrice des factorisations de σ en produit monotone de transpositions, où l'exposant de u marque le nombre de transpositions.
Corrigé: On développe $\prod_{i=1}^n \frac{1}{1-uJ_i} = \sum_k u^k h_k(J_1, \dots, J_n)$ où les h_k sont les fonctions complètes homogènes (on a le droit puisque les J-M commutent). Mais par définition

$$\begin{aligned} h_k(J_1, \dots, J_n) &= \sum_{i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k} J_{i_1} \dots j_{i_k} \\ &= \sum_{i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k} \sum_{j_1 < i_1} \sum_{i_2 < j_2} \dots \sum_{j_k < i_k} (j_1, i_1) \dots (j_k, i_k) \\ &= \sum_{\tau_1, \dots, \tau_k} \tau_1 \tau_2 \dots \tau_k, \end{aligned}$$

où la somme est prise sur tous les produits monotones de k transpositions.

Question 7 Exprimer le nombre de factorisations d'une permutation σ fixée en produit de ℓ transpositions à l'aide de caractères du groupe symétrique et de la quantité $S(\lambda)$ définie comme la somme des contenus des cases de la partition λ.
Corrigé: Par la décomposition de l'algèbre du groupe, le nombre cherché est

$$\begin{aligned} [1](\sum_i J_i)^\ell \sigma &= \frac{1}{n!} \sum_\lambda f^\lambda \chi^\lambda((\sum_i J_i)^\ell \sigma), \\ &= \frac{1}{n!} \sum_\lambda f^\lambda S(\lambda)^\ell \chi^\lambda(\sigma), \end{aligned}$$

où pour la deuxième égalité, l'élément $\sum J_i$ est central et agit donc comme un scalaire sur V^λ, et par un théorème du cours (une fonction symétrique des Jucys-Murphy agit comme la même fonction évaluée en les contenus) ce scalaire est $S(\lambda)$.

Question 8 On regarde la mesure de probabilité de Plancherel sur les partitions, où la partition λ reçoit la probabilité $\frac{(f^\lambda)^2}{n!}$. Montrer que sous cette loi, l'espérance de $S(\lambda)^2$ est égale à $\binom{n}{2}$.
Corrigé: Par définition $\mathbb{E}[S(\lambda)^2] = \frac{1}{n!} \sum_\lambda (f^\lambda)^2 S(\lambda)^2$. Par la question précédente (et le fait que $f^\lambda = \chi^\lambda(1)$) avec $\ell = 2$, ce n'est autre que le nombre de factorisations de l'identité en *deux* transpositions, qui est égal à $\binom{n}{2}$ (la première transposition est arbitraire, et fixe la seconde).

Question 9 On considère ℓ transpositions $\tau_1, \dots, \tau_\ell$ et une permutation σ dans $\mathfrak{S}_n$ telles que $\tau_\ell \tau_{\ell-1} \dots \tau_2 \tau_1 = \sigma$. À une telle donnée, on associe un multigraphe G, d'ensemble de sommets $\{1, 2, \dots, n\}$, avec une arête de i à j pour chaque k tel que $\tau_k = (i, j)$. On suppose que G est connexe. Les arêtes de G sont naturellement étiquetées de 1 à ℓ, et ses sommets de 1 à n. On munit ce graphe d'une structure de carte en décidant qu'autour de chaque sommet, l'ordre antihoraire des arêtes autour du sommet est donné par l'ordre croissant des étiquettes, en partant de l'étiquette minimale incidente à ce sommet. Décrire une règle combinatoire permettant de retrouver les cycles de σ directement à partir de la carte et de ses étiquettes. À quoi correspond la longueur d'un cycle dans cette correspondance ?

Corrigé: Par construction, autour d'un sommet il y a une unique coin qui forme une descente dans le sens antihoraire. On marque ce coin par une petite flèche, sur laquelle on inscrit l'étiquette du sommet, dans $\{1, 2, \dots, n\}$. Alors, les cycles de σ correspondent à la liste des étiquettes des flèches, lorsque l'on parcourt les faces de la carte en sens horaire – c'est similaire à la propriété vue en TD pour le cas des arbres. On a donc un cycle de σ par face de la carte, et ce cycle correspond à la liste des é†iquettes des sommets qui correspondent à des incréments croissants d'étiquette d'arête, en sens horaire autour de la face.

Question 10 On reprend hypothèses et notations de la question précédente. Quel est le genre de la carte obtenue ?

Corrigé: La carte a n sommets, $\ell(\sigma)$ faces, et ℓ arêtes, de plus on l'a supposée connexe. Par la formule d'Euler :

$$\ell(\sigma) + n = \ell + 2 - 2g,$$

donc $g = \frac{\ell+2-n-\ell(\sigma)}{2}$.

Exercice 4

Pour $k \geq 1$ et $\lambda \vdash k$, on note $2\lambda = (2\lambda_1, 2\lambda_2, \dots)$ la partition dont les parts sont le double de celles de λ. On considère la fonction symétrique

$$V_k := \sum_{\lambda \vdash k} s_{2\lambda}.$$

Question 11 Exprimer $\frac{\partial}{\partial p_1} V_k$ en fonction de V_{k-1}.

Corrigé: V_k est la somme de toutes (les fonctions de Schur des) partitions dont toutes les parts sont paires. $\frac{\partial}{\partial p_1}$ enlève une case, on obtient donc la somme de toutes les partitions dont exactement une part est impaire. On peut obtenir la même chose en sommant sur toutes les partitions de taille $2(k-1)$ dont toutes les parts sont paires, et en ajoutant une case, ce qui par Mrunaghan-Nakayama se fait en multipliant par p_1. Donc :

$$\frac{\partial}{\partial p_1} V_k = p_1 V_{k-1}.$$

Question 12 Pour une partition μ, on note f^μ le nombre de tableaux standard de forme μ. Exprimer f^μ comme une extraction de coefficient dans s_μ. Puis en utilisant la question précédente en déduire la valeur de la quantité c_k définie par

$$c_k := \sum_{\lambda \vdash k} f^{2\lambda}.$$

Corrigé: Par Murnaghan-nakayama, $\frac{1}{n!}f^{\mu}$ est le coefficient de p_1^n dans s_μ, pour $|\mu| = n$. On a donc

$$V_k = \frac{c_k}{(2k)!}p_1^{2k} + R,$$

où R est un polynôme en les p_i pour $i \geq 2$. On obtient par la question précédente $c_k = (2k-1)c_{k-1}$. Puisque $c_1 = 1$ on a donc $c_k = (2k-1)!!$, le produit de tous les impairs.

Exercice 5

On considère l'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ par conjugaison sur l'ensemble des permutations de type cyclique λ. C'est donc une représentation de dimension $|\mathcal{C}_\lambda|$. On note U_λ l'image de cette représentation par l'application caractéristique, c'est-à-dire la fonction symétrique définie par :

$$U_\alpha := \sum_{\alpha \vdash n} \chi(\alpha)\frac{p_\alpha}{z_\alpha},$$

où χ est le caractère de cette représentation.

Question 13 Montrer que $n!\langle U_\lambda | \frac{1}{z_\mu}p_\mu\rangle$ est égal au nombre $C_{\lambda,\mu}$ de paires de permutations qui commutent et sont type cyclique respectifs λ et μ, où $\langle , \rangle$ est le produit scalaire de Hall.

Corrigé: On a par orthogonalité des fonctions puissances $n!\langle U_\lambda | p_\mu/z_\mu\rangle = \chi(\mu)n!/z_\mu$. Or la représentation agit par permutation, donc $\chi(\mu)$ est le nombre de points fixes dans l'action par conjugaison sur $\mathcal{C}_\lambda$ d'une permutation ϕ fixée de type μ, donc le nombre de $\sigma \in \mathcal{C}_\lambda$ telles que $\sigma = \phi^{-1}\sigma\phi$. En multipliant par $n!/z_\mu = |\mathcal{C}_\mu|$, on obtient le nombre paires (σ, ϕ) dans $\mathcal{C}_\lambda \times \mathcal{C}_\mu$ telles que $\sigma = \phi^{-1}\sigma\phi$.

Question 14 On considère l'action adjointe de $\mathfrak{S}_n$, càd $\mathfrak{S}_\mathfrak{n}$ agit sur lui-même par conjugaison. Montrer que son image par l'application caractéristique est $\frac{1}{n!}\sum_\lambda p_\lambda$.

Corrigé: On somme les U_λ sur toutes les λ. Par la question précédente, $U_\lambda = \frac{1}{n!}\sum_\mu C_{\lambda,\mu}p_\mu$, on obtient donc $\sum_\lambda U_\lambda = \frac{1}{n!}\sum_\mu \left(\sum_\lambda C_{\lambda,\mu}\right)p_\mu$. Or $\sum_\lambda C_{\lambda,\mu}$ est le nombre de paires (σ, ϕ), qui commutent avec ϕ de type μ et σ quelconque. On a $n!/z_\mu$ choix pour ϕ puis z_μ choix pour σ, ce nombre vaut donc $n!$ (indépendamment de μ).

Question 15 Si λ et μ n'ont pas de parts communes, montrer que $U_\lambda U_\mu = U_{\lambda\cup\mu}$, où $\lambda \cup \mu$ est la partition formée de l'union des parts de λ et de μ (réordonnées en ordre décroissant pour former une partition).

Corrigé: Il faut remarquer que si λ et μ n'ont pas de parts communes, avec $|\lambda| = k$ et $|\mu| = n-k$, et ϕ une permutation de type cyclique $\lambda \cup \mu$, alors l'ensemble des permutations qui commutent avec ϕ vit dans un sous-groupe $S_k \times S_{n-k}$ (on écrit $\phi = (\phi_1, \phi_2) \in S_k \times S_{n-k}$ et $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$. Alors σ commute avec ϕ ssi ϕ_i commute avec σ_i pour $i = 1..2$ (notons que c'est faux en cas de parts communes). On a donc

$$C_{\lambda\cup\mu,\nu} = \sum_{\substack{\alpha\vdash k, \beta\vdash n-k \\ \alpha\cup\beta=\nu}} \binom{n}{k} C_{\lambda,\alpha}C_{\mu,\beta},$$

où le binomial décrit le choix du support de la permutation ϕ_1 (le choix d'un sous-group isomorphe à $S_k \times S_{n-k}$). Par la question précédente on a donc

$$\begin{aligned} U_{\lambda \cup \mu} &= \frac{1}{n!} \sum_{\nu} C_{\lambda \cup \mu, \nu} p_\nu \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\substack{\alpha \vdash k \\ \beta \vdash n-k}} \binom{n}{k} C_{\lambda, \alpha} C_{\mu, \beta} p_\alpha p_\beta = U_\lambda U_\mu. \end{aligned}$$

Question 16 **(*)** On note $[2^k]$ la partition de $2k$ dont toutes les parts sont égales à 2. Montrer que $U_{[2^k]}$ est égale à la quantité V_k de l'exercice précédent. On pourra relier la restriction $Res\big\downarrow_{\mathfrak{S}_{2k-1}}^{\mathfrak{S}_{2k}} U_{[2^k]}$ à l'induction $Ind\big\uparrow_{\mathfrak{S}_{2k-2}}^{\mathfrak{S}_{2k-1}} U_{[2^{k-1}]}$

Corrigé: (très rapide aperçu de la solution). On montre d'abord que

$$Res\big\downarrow_{\mathfrak{S}_{2k-1}}^{\mathfrak{S}_{2k}} U_{[2^k]} = U_{[2^{k-1},1]} = Ind\big\uparrow_{\mathfrak{S}_{2k-2}}^{\mathfrak{S}_{2k-1}} U_{[2^{k-1}]},$$

à l'aide de la question précédente. On en déduit que $U_{[2^k]}$ satisfait la même équation différentielle récursive que V_k. Cela ne suffit pas à montrer qu'ils sont égaux car ils dépendent aussi des p_i pour $i \geq 2$. On s'en sort en évaluant la contribution de la représentation triviale et en utilisant la triangularité de la relation ainsi obtenue.