Examen M2 Maths Fondas 2019
–
Combinatoire I

Jeudi 24 Octobre 2019

On attachera une grande importance à la concision, à la clarté, et à la précision de la rédaction. On prendra garde à remplir les entêtes de copies et à ne pas quitter la salle sans avoir signé la liste et vérifié que sa copie a été remise.
Les notes de cours manuscrites (de CE cours) sont autorisées, ainsi que les feuilles d'exercices.
You can write your answers in English.

Corrigé: Les corrections sont données à titre indicatif.

Exercice 1

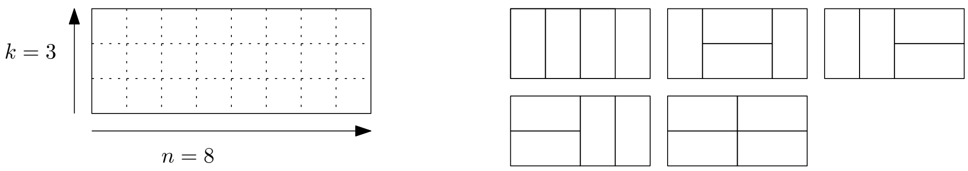


FIGURE 1 – Gauche : le rectangle considéré pour $(n, k) = (8, 3)$.
Droite : les 5 pavages de taille 4 pour $k = 2$.

Pour $n \geq 0$ et $k \geq 1$, on considère un rectangle de dimensions $n \times k$ (Figure 1) dont le coin inférieur gauche est l'origine. Un *pavage* de ce rectangle est une manière de le recouvrir entièrement par des *dominos* (rectangles de dimensions 2×1 ou 1×2 à coordonnées entières), de sorte que les dominos ne se chevauchent pas (voir Figure 1). On appelle k la *hauteur* et n la *taille* du pavage.

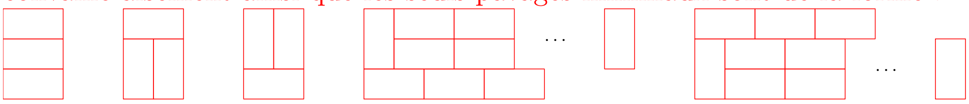
Pour $k \geq 1$ fixé, on note $\mathcal{P}^{(k)}$ la classe combinatoire dont les éléments sont tous les pavages de hauteur k, munis de cette notion de taille.

Question 1 Calculer la série génératrice $P^{(k)}$ de $\mathcal{P}^{(k)}$, pour $k = 1$. Puis faire de même pour $k = 2$, par exemple à l'aide d'une récurrence de type Fibonacci.

Corrigé: Clairement $P^{(1)}(t) = 1/(1-t^2)$. Pour $P^{(2)}$, on raisonne par récurrence sur le domino le plus à gauche, qui est soit vertical, soit horizontal et forcément superposé à un autre domino horizontal. On trouve alors la récurrence (de Fibonacci) : $p_n^{(2)} = p_{n-1}^{(2)} + p_{n-2}^{(2)}$ avec $p_0^{(2)} = p_1^{(2)} = 1$ et donc finalement $P^{(2)}(t) = \frac{1}{1-t-t^2}$. Alternativement, on aurait pu voir directement qu'un pavage de hauteur 2 est une suite dont les éléments sont soit des dominos verticaux (t), soit des paires de dominos horizontaux superposés (t^2).

Question 2 On considère le cas $k = 3$. Un pavage du rectangle $n \times 3$ est *minimal* s'il ne contient pas une ligne verticale de hauteur 3 qui le sépare en deux pavages par dominos plus petits (chacun de taille non nulle). Décrire les pavages minimaux, puis calculer à la main la série $P^{(3)}$.

Corrigé: On distingue les cas suivant la position des dominos dans la première colonne. On se convainc aisément ainsi que les seuls pavages minimaux sont de la forme :



(par exemple, pour le 4ème cas, une fois que l'on a inséré les deux dominos les plus à gauche, on a le choix entre compléter la colonne de droite avec une domino vertical -ce qui termine le pavage et redonne ici le cas numéro 3- ou alors insérer trois dominos horizontaux ; on se retrouve alors dans une situation similaire, et on itère jusqu'à décider d'insérer un domino vertical à une étape quelconque pour terminer le pavage). Un pavage de $\mathcal{P}^{(3)}$ est une succession de tels objets, et on a donc

$$P_3 = \frac{1}{1 - \left(3t^2 + 2\frac{t^4}{1-t^2}\right)}$$

(chacun des deux derniers types minimaux est formé de $3m$ dominos pour $m \geq 2$, correspondant à une taille $2m$, d'où une contribution $\sum_{m \geq 2} t^{2m} = \frac{t^4}{1-t^2}$).

Question 3 Montrer, sans forcément s'inspirer des questions précédentes, que pour tout $k \geq 1$ fixé, la série génératrice $P^{(k)}$ de $\mathcal{P}^{(k)}$ est rationnelle.

Corrigé: La bonne manière de comprendre la rationalité est de dire que l'on peut construire tous les pavages en balayant le rectangle «de gauche à droite» en ne conservant à chaque instant qu'une quantité d'information *finie*.

Par exemple, étant donné un pavage π, on peut le coder par une suite de $n+1$ mots binaires de longueur k, en regardant les droites verticales (d'abscisses entières...) traversant le rectangle, et en notant, de bas en haut : 0 si la droite suit la frontière d'un domino, 1 si elle traverse un domino. Sur le deuxième exemple de la figure gauche, cela donne donne $00, 00, 11, 00, 00$. Étant donné un mot $w \in \{0,1\}^k$, il existe un nombre fini de mots $w' \in \{0,1\}^k$ qui peuvent suivre w à l'abscisse suivante (les 1 de w deviennent 0 dans w', et pour une suite de 0 consécutifs on peut soit les grouper deux par deux qui restent des 0 (domino vertical), soit les transformer en 1 (domino horizontal). On construit maintenant un graphe dirigé dont l'ensemble de sommets est $\{0,1\}^k$ avec une arête $w \to w'$ pour chaque telle transition. La discussion précédente montre que $\mathcal{P}_k$ est en bijection avec les marches de 0^k à 0^k sur ce graphe. Par le théorème du cours, la série génératrice est rationnelle.

Exercice 2

Dans cette exercice toutes les cartes sont planaires et enracinées. Une carte (planaire, enracinée) est *précubique* si elle n'a que des sommets de degré 1 ou 3, et si elle est enracinée sur un sommet de degré 1. On rappelle que *l'excès* d'un graphe à m arêtes et p sommets est défini comme $m - p + 1$.

Question 4 Soit M une carte précubique ayant n sommets de degré 3 et excès k. Exprimer son nombre d'arêtes, son nombre de sommets de degré 1, et son nombre de faces en fonction de n et k.

Corrigé: Par la formule Euler on a $f = k+1$. Par double comptage des arêtes on a $v_1 + 3n = 2a$, et par définition de l'excès on a $a - v_1 - n + 1 = k$. En éliminant on trouve $a = 2n + 1 - k$ et $v_1 = n + 2 - 2k$.

Question 5 On considère des cartes précubiques d'excès 0 (arbres). Montrer que leur série génératrice en fonction du nombre de sommets de degré 3 satisfait $T = 1 + tT^2$. Montrer (au moyen d'une décomposition combinatoire directe) que la série génératrice des cartes précubiques d'excès 0 ayant un sommet de degré 1 marqué (différent de la racine) est donnée par $\frac{1}{1-2tT(t)}$

Corrigé: En enlevant la feuille racine on a juste un arbre binaire habituel, donc $T = 1 + tT^2$ est clair.
En regardant la branche dans l'arbre qui va de la racine au sommet marqué, on voit une succession de sommets de degrés 3 dont chacun a une arête qui pend à droite ou à gauche (2 choix), et de chacun pend un arbre enraciné, on trouve donc $\frac{1}{1-2tT(t)}$, où le facteur t prend en compte la contribution du sommet situé sur la branche.

Question 6 Pour $k \geq 1$, montrer à l'aide d'une décomposition de type «noyau» que la série génératrice C_k des cartes précubiques d'excès k est une fraction rationnelle en T, dont on précisera le dénominateur.
Corrigé: On effeuille la carte en enlevant récursivement toutes les feuilles sauf la racine, puis on lisse les sommets de degré 2. On obtient une carte enracinée sur une feuille et qui n'a que des sommets de degré 3 (sauf la racine de degré 1). Réciproquement on part d'une telle carte et on remplace chaque arête par une branche telle qu'à la question précédente.
Clairement cette décomposition est unique. Elle ne change pas l'excès. De plus il n'y a qu'un nombre fini de cartes d'excès fixé avec au plus un sommet de degré 1 et sans sommet de degré 2 (adapter l'argument vu en TD : on appelle d_i le nombre de sommets de degré i, et par double comptage des arêtes, et définition de l'excès, on obtient une borne sur $\sum_i (i-2)d_i$ qui montre que les d_i doivent être bornés). La série cherchée est donc égale à :

$$\sum_M \frac{t^{v(M)}}{(1 - 2tT(t))^{a(M)}}$$

où la somme, finie, est prise sur toutes les cartes M d'excès k, n'ayant que des sommets de degré 3 sauf la racine qui est de degré 1, et où $a(M)$ est le nombre d'arêtes et $v(M)$ de sommets de degré 3. C'est bien une fraction rationnelle en T (noter $t = (T-1)/T^2$) dont le dénominateur est une puissance de $1 - 2tT$.

Question 7 Analyser la singularité dominante de la série C_k, et en déduire que pour k fixé et $n \to \infty$ le nombre de cartes précubiques d'excès k est équivalent à $c\rho^n n^{\alpha_k}$ pour des constantes ρ et α_k que l'on précisera.

Corrigé: La singularité est en $1/4$ et $1 - tT^2$ y tend vers 1 comme une racine carrée. Par la question 1 (avec $v_1 = 1$) les noyaux M sont tels que $a(M) = 3k - 1$ et donc la singularité est de type $(cte)(\frac{1}{1-4z})^{\frac{3k-1}{2}}(1 + o(1))$ dans un Delta-domaine. Par le théorème de transfert, on a donc $\rho = 4$ et $\alpha_k = \frac{3k-1}{2} - 1 = \frac{3(k-1)}{2}$. On pourrait aller plus loin et exprimer directement la constante c en fonction du nombre de cartes d'excès k dont tous les sommets sauf la racine de degré 1 ont degré 3.

Exercice 3

On note $\mathcal{S}_n^{(k)}$ l'ensemble des partitions de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ en k parties disjointes non vides, et $\mathcal{S}^{(k)} = \cup_{n \geq 1} \mathcal{S}_n^{(k)}$ la classe combinatoire correspondante, à k fixé. Les k parties ne sont pas numérotées. On note $S(n,k)$ le cardinal de $\mathcal{S}_n^{(k)}$. Par exemple $S(3,2)=3$ correspondant aux trois partitions $\{1,2,3\}=\{1\}\cup\{2,3\}=\{1,2\}\cup\{3\}=\{1,3\}\cup\{2\}$.

Question 8 Donner une expression de $\mathcal{S}^{(k)}$ avec les constructeurs usuels, et en déduire une formule sous forme de somme pour $S(n,k)$.

Corrigé: Au sens des classes étiquetées, $\mathcal{S}^{(k)}$ représente un ensemble de k ensembles non vides, $\mathcal{S}^{(k)} = SET_k(SET_{>0}(\{\bullet\}))$, donc $S^{(k)}(t)=\frac{1}{k!}(e^t-1)^k$. En extrayant le coefficient de t^n il vient :

$$S(n,k)=\frac{n!}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\frac{i^n}{n!}(-1)^{k-i}=\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}i^n.$$

Question 9 Montrer, indépendamment, que $S(n,k)=S(n-1,k-1)+kS(n-1,k)$.

Corrigé: Soit n est tout seul dans sa part (premier terme), soit il ne l'est pas, ce qui revient à choisir une partition en k parts de taille $n-1$ et à choisir dans laquelle des k parts on ajoute n.

Question 10 En déduire que l'on peut interpréter $S(n,k)$ comme le nombre de chemins à n pas sur $\mathbb{Z}^2$ faisant des pas $(1,0)$ ou des pas $(1,1)$, où les pas reçoivent un poids en fonction de leur hauteur.

Corrigé: On considère de tels chemins partant de l'origine (ou d'un sommet fixé d'ordonnée 0) et on met un poids 1 sur les pas diagonaux, et un poids k sur les pas horizontaux à hauteur k. Si $T(n,k)$ compte les chemins de longueur n finissant à hauteur k, la récurrence $T(n,k)=T(n-1,k-1)+kT(n-1,k)$ est alors claire, on a donc $T(n,k)=S(n,k)$.

Question 11 On fixe $n,m\geq 1$. On considère dans cette question des n-uplets de chemins $(P_1,P_2,\ldots,P_n)$, où pour $1\leq i\leq n$, P_i est un chemin de longueur $m+i$, partant du point de $\mathbb{Z}^2$ de position $(-i,0)$. Les pas de ces chemins reçoivent les poids introduits à la question précédente. Un n-uplet de chemins est non-intersectant si aucune paire de chemins ne partagent de sommet.

Montrer *combinatoirement* que

$$(\det S(m+i,j))_{1\leq i,j\leq n}=(n!)^m.$$

On pourra montrer que seules les configurations non-intersectantes contribuent au déterminant.

Corrigé: On développe le déterminant

$$(\det S(m+i,j))_{1\leq i,j\leq n}=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\epsilon(\sigma)\prod_i S(m+i,\sigma(i)).$$

On peut interpréter cette somme comme la somme des poids de tous les n-uplets de chemins partant des points considérés dans l'énoncé et dont les hauteurs finales sont $\{1,2,\ldots,n\}$, avec un signe ±1 donné par la permutation qui apparie les points de départ avec les hauteurs d'arrivée. Si deux chemins P_i et P_j se touchent, on peut définir deux nouveaux chemins P'_i et P'_j obtenus en échangeant P_i et P_j après leur premier contact. Cette opération multiplie la permutation σ correspondante par une transposition et change donc son signe. De plus, on peut effectuer cette opération pour la plus petite paire (i,j) telle que P_i et P_j se touchent, au sens de l'ordre lexicographique, et le n-uplet de chemins obtenu sera toujours tel que (i,j) est la paire minimale pour cette propriété. L'application obtenue est donc une involution (un appariement deux par deux) des n-uplets de chemins dont au moins deux chemins se touchent, qui inverse le signe de σ.

Cela montre que dans le déterminant, seules contribuent les configurations non-intersectantes. Or clairement (induction sur n, faire un dessin) la seule configuration non-intersectante est telle que $P_i = D^i H^m$, où D est un pas diagonal et où les pas horizontaux H sont fait à hauteur i. Le poids de P_i est donc i^m et le poids total $\prod_{i=1}^n i^m = (n!)^m$. Enfin, la permutation sous-jacente est l'identité et le signe est donc $+1$.
Pour les amateurs·trices, ce qu'on vient de voir est un cas particulier du lemme de Linström-Gessel-Viennot que l'on reverra en CombiII.

Exercice 4

Un arbre de Cayley est un graphe acyclique connexe sur l'ensemble de sommets $\{1, 2, \ldots, n\}$. On note respectivement $T_u(t), T(t), T_a(t)$ les séries génératrices exponentielles (par le nombre de sommets) des arbres de Cayley, des arbres de Cayley avec un sommet marqué, des arbres de Cayley avec une arête marquée. On a vu en cours que $T(t) = te^{T(t)}$.

Question 12 Écrire la relation entre nombre de sommets et d'arêtes dans un arbre, puis en déduire une relation entre T_u, T, et T_a.

Corrigé: On a $s = a + 1$ et en sommant sur tous les arbres de Cayley, fois $t^n/n!$, on trouve $T = T_u + T_a$.

Question 13 Exprimer T_a en fonction de T. En déduire T_u en fonction de T.
Corrigé: L'arête marquée coupe l'arbre en deux arbres, chacun avec un sommet marqué. Ces deux arbres ne sont pas ordonnés car l'arête n'est pas dirigée. C'est donc la construction «ensemble à deux éléments» (SET_2) et $T_a = \frac{1}{2!}T^2$. Il vient donc $T_u = T - \frac{1}{2}T^2$.

Question 14 Une forêt de Cayley de taille n est un graphe acyclique sur $\{1, 2, \ldots, n\}$. On note $F(t)$ la série génératrice correspondante, calculer F en fonction de T.
Corrigé: Une forêt est une ensemble d'arbres (non enracinés), donc la série exponentielle correspondante est $F(t) = \exp(T_u(t)) = e^{T - \frac{1}{2}T^2}$.

Question 15 Quand n tend vers l'infini, estimer la probabilité qu'une forêt de Cayley à n sommets, choisie uniformément au hasard, soit un arbre.

Corrigé: La série génératrice des forêts est $F(t) = \exp(T_u(t))$ car une forêt est un ensemble d'arbres (non enracinés). On a vu en TD que $T(t) = 1 + c\sqrt{1 - ez} + O(1 - ez)$ dans un Delta-domaine en e^{-1}, et que c'est son unique singularité dominante. On en déduit, dans un Delta-domaine :

$$T_u(t) = T(t) - T(t)^2/2 = \frac{1}{2} + O(1 - ez)$$

ce qui n'est pas suffisant pour décrire la singularité dominante (la singularité en racine s'annule au premier ordre). On se rappelle alors du fait (démontré par la technique des séries majorantes) que la série $T(t)$ a en fait un développement analytique (convergent) en puissances de $\sqrt{1 - ez}$ en sa singularité

$$T(t) = 1 + a_1\sqrt{1 - ez} + \sum_{k \geq 2} a_k(\sqrt{1 - ez})^k,$$

dans un Delta-domaine. Puisque $T_u = T - T^2/2$ cela implique l'existence d'un développement similaire pour T_u :

$$T_u(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k \geq 2} b_k(\sqrt{1 - ez})^k.$$

Soit k le premier nombre impair tel que b_k est non nul (les puissances paires ne donnent pas de singularité). En appliquant le théorème de transfert on voit que $[t^n]T_u(t)$ croît comme une constante fois $e^n n^{-k/2-1}$, et puisque $[t^n]T_u(t) = 1/n[t^n]T(t) \sim (cte)n^{-5/2}$ on doit avoir $k = 3$ (note : on pourrait bien-sûr le vérifier en calculant le développement à la main à partir de l'équation $T = te^T$). Donc :

$$T_u(t) = \frac{1}{2} + b_2(1-ez) + b_3(1-ez)^{-3/2} + O((1-ez)^2), \quad b_3 \neq 0.$$

Alors, dans un Delta-domaine, on a en développant :

$$F(t) = e^{\frac{1}{2}+b_2(1-ez)+b_3(1-ez)^{-3/2}+O((1-ez)^2)} = e^{\frac{1}{2}} + b_2 e^{\frac{1}{2}}(1-ez) + b_3 e^{\frac{1}{2}}(1-ez)^{-3/2} + O((1-ez)^2).$$

Les séries T_u et F ont donc une singularité principale en $(1-ez)^{-3/2}$ dans un Delta-domaine autour de e^{-1}. En appliquant le théorème de transfert à T_u puis à F, on trouve des asymptotiques similaires, seule la constante multiplicative diffère. On peut donc estimer la probabilité cherchée

$$\mathbf{P}(\text{la forêt est un arbre}) = \frac{[t^n]T_u}{[t^n]F} \to \frac{b_3}{b_3 e^{1/2}} = e^{-1/2}.$$

On conclut donc que la probabilité que notre forêt soit un arbre tend vers $e^{-1/2}$. Note : on n'a fait aucun calcul pour trouver cela, si ce n'est dire que $T - \frac{1}{2}T^2$ vaut $\frac{1}{2}$ quand $T = 1$...
Note : La probabilité d'avoir k composantes connexes est $\frac{[t^n](T_u)^k/k!}{[t^n]F}$. On trouve par le même calcul que cette quantité tend vers $\frac{e^{-1/2}}{(k-1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ (pour les connaisseu·rs·ses, la loi limite du nombre de composantes connexes s'appelle «1 plus une Poisson de paramètre 1/2»).

Question 16 (*) Soit F_n une forêt de Cayley à n sommets, choisie uniformément au hasard. Pour $k \geq 1$ fixé, donner la loi limite du nombre de sommets de degré k de F_n.

Corrigé: Soit $X_{n,k}$ le nombre de sommets de degré k dans F_n. Pour estimer $\mathbb{E}X_{n,k}$ on compte les configurations avec un sommet de degré k marqué, que l'on peut voir comme un SET_k d'arbres (autour du sommet marqué) puis une forêt pour les autres composantes connexes. L'espérance de $X_{n,k}$ vaut donc

$$\frac{[t^n]\left(t\frac{T^k}{k!}F\right)}{\cdot[t^n]F}.$$

En haut, c'est la singularité en racine venant de T (on a vu que F ne contribue pas à cet ordre) qui domine et cela est équivalent à

$$[t^n]\left(t\frac{T(t)^k}{k!}F\right) \sim e^{-1}1e^{1/2}k/k![t^n](1+a_1\sqrt{1-t}) \sim e^{-1/2}/(k-1)![t^n]T(t),$$

et en bas

$$n \cdot [t^n]F \sim e^{1/2}[t^n]T(t)$$

par la question précédente. Donc $\mathbb{E}X_{n,k}$ est équivalente à $n \cdot \frac{e^{-1}}{(k-1)!}$. On peut calculer le second moment en comptant des configurations avec deux sommets de degré k marqués. Il y a essentiellement deux cas (même composante connexe ou pas), que l'on peut écrire explicitement. On se convainc ensuite que seul le premier cas donne la singularité maximale, puis si l'on fait l'analyse de singularité jusqu'au bout (je ne le fais pas ici) on trouve que $\mathbb{E}X_{n,k} \sim n^2\left(\frac{e^{-1}}{(k-1)!}\right)^2$. On est donc dans le domaine d'application de la méthode du second moment, et on trouve que $\frac{1}{n}X_{n,k}$, pour k fixé, converge en probabilité vers $\frac{e^{-1}}{(k-1)!}$.

Exercice 5

Soit $k \geq 1$ et $\leq_P$ un ordre (partiel) sur $\{1, 2, \ldots, k\}$ tel que $i \leq_P j \Rightarrow i \leq j$. Une *$P$-partition* de taille n est une suite $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ d'entiers positifs ou nuls, de somme n, telle que $i \leq_P j \Rightarrow \lambda_i \leq \lambda_j$.

Question 17 Montrer que pour k et P fixés, la série génératrice des P-partitions est rationnelles et préciser son dénominateur (on n'utilisera pas le théorème général, non démontré en cours, sur les séries génératrices de comptage de points dans les polyhèdres – ou alors on le démontrera !).

Corrigé: La méthode standard consiste à introduire la notion d'extension linéaire compatible, voir Stanley, EC1, chapitre 4, section 4.5, ou le résumé qu'en fait Bousquet-Mélou dans son article à l'ICM.
Sinon, une méthode concrète procède comme suit. Étant donnée une suite $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$, on note $p+1$ le cardinal de l'ensemble $\{0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ et on définit la normalisée de λ en remplaçant les λ_i non nuls par les nombres de 1 à p en préservant leur ordre naturel relatif (par exemple la normalisée de $(14, 2, 5, 0, 14)$ est $(3, 1, 2, 0, 3)$. Clairement, la normalisée suffit à voir si λ est bien une P-partition, et pour P donné, il y a un nombre fini de normalisées possibles. Étant fixée une normalisée π correspondant à une valeur de p donnée, il suffit pour reconstruire une P-partition de choisir la valeur des λ_i correspondant à chacun des indices entre 1 et p, ce qui revient à choisir l'incrément entre chacune de ces valeurs (et 0). On doit donc choisir p nombres strictement positifs, appelons les $n_1, \ldots, n_p$, et alors la $j$ème valeur sera $n_1 + n_2 + \cdots + n_j$. Pour $1 \leq j \leq p$, soit m_j le nombre de fois que l'index j apparaît dans π, la taille totale de notre partition finale sera

$$\sum_{j=1}^{p} m_j(n_1 + \cdots + n_j) = \sum_{j=1}^{p} n_j(m_j + \cdots + m_p).$$

La série génératrice des P-partitions de normalisée π sera donc

$$\prod_{j=1}^{p} \frac{t^{m_j+\cdots+m_p}}{1 - t^{m_j+\cdots+m_p}}.$$

En sommant sur tous les π possibles (en nombre fini), on trouve que la série génératrice des P-partitions est rationnelle, de dénominateur au plus $(1-t)(1-t^2)\ldots(1-t^k)$.