Journées de l'AS CNRS/STIC

SYSTÈMES DYNAMIQUES ET MODÉLISATION EN ALGORITHMIQUE (SYDYMODA)

28 – 29 novembre 2002

Représentation des nombres et systèmes dynamiques

Christiane Frougny

LIAFA et Université Paris 8

http://www.liafa.jussieu.fr/~cf/

Système de numération

Système de numération de position

Base β: nombre entier, réel ou complexe de module > 1

Chiffres: entiers, réels ou complexes

Mots

A alphabet de lettres (ou de chiffres)

Mot fini = suite finie de lettres de A
A^* = ensemble des mots finis.
Mot vide = ε.

Mot infini = suite infinie de lettres de A
$A^{\mathbb{N}}$ = ensemble des mots infinis.

Mot ultimement périodique $w = uvvv \cdots = uv^\omega$
avec u et v dans A^*.

Base entière

Représentation des nombres

Base $\beta > 1$ entier

Alphabet canonique $A = \{0, \ldots, \beta - 1\}$

β-représentation de N entier ≥ 0: mot $d_k \cdots d_0$ de A^* tel que

$$N = \sum_{i=0}^{k} d_i \beta^i$$

Unique si $d_k \neq 0$ (dite canonique) et notée $\langle N \rangle_\beta$

β-représentation d'un réel x dans [0,1]: mot infini $(x_i)_{i\geq 1}$ de $A^{\mathbb{N}}$ tel que

$$x = \sum_{i\geq 1} x_i \beta^{-i}$$

Unique si ne se termine pas par $(\beta - 1)^\omega$ (dite canonique).

Algorithme glouton

$$\begin{array}{l} r_0 \leftarrow x \\ \textit{pour } i \geq 1 \\ \qquad x_i \leftarrow \lfloor \beta r_{i-1} \rfloor;\ r_i \leftarrow \{\beta r_{i-1}\} \end{array}$$

Exemples

$\beta = 2$ et $A = \{0,1\}$

- $1A^*$

  Les représentations canoniques des entiers
- $A^{\mathbb{N}}$

  Tous les réels de $[0,1]$
- $1A^{\mathbb{N}}$

  L'intervalle $]0,1]$
- A^*1^ω

  Nombre fini de 0 = écritures interdites (impropres) des réels
- $(1^*0)^\omega$

  Infinité de 0 = écritures canoniques des réels

Automate fini

A alphabet

Automate fini $= \mathcal{A} = (Q,A,E,I,F)$

Q fini = états

$E \subset Q \times A \times Q$ = transitions (flèches) étiquetées par A

I = états initiaux

F = états finaux

$H \subseteq A^*$ est reconnu par $\mathcal{A}$ si c'est l'ensemble des étiquettes des chemins finis commençant dans un état de I et finissant dans un état de F.

$X \subseteq A^{\mathbb{N}}$ est reconnu par $\mathcal{A}$ si c'est l'ensemble des étiquettes des chemins infinis commençant dans un état de I et passant infiniment souvent dans F (comportement à la Büchi).

Fonctions de mots finis réalisables par automate fini

A alphabet d'entrée, B alphabet de sortie.

Automate fini à 2 bandes = transducteur = $\mathcal{A} = (Q, A^* \times B^*, E, I, F)$ avec E et Q finis.

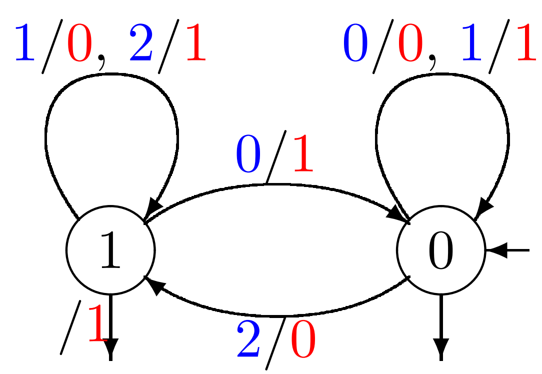
Relation de mots finis $R \subseteq A^* \times B^*$ est réalisée par $\mathcal{A}$ si R est l'ensemble des étiquettes des chemins finis commençant dans un état de I et se terminant dans F

Fonction $\varphi : A^* \longrightarrow B^*$ est réalisable par un automate fini si son graphe est réalisé par automate fini.

Addition des entiers

Addition des entiers en base 2 (de droite à gauche)

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & 1 & 1 & 1 & 1 \\
+ & & 0 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
 & & {\color{blue}1} & {\color{blue}2} & {\color{blue}2} & {\color{blue}2} \\
\hline\hline
 & {\color{red}1} & {\color{red}0} & {\color{red}1} & {\color{red}1} & {\color{red}0}
\end{array}
$$



Séquentialité

Automate fini séquentiel (gauche):

$\mathcal{A} = (Q, A \times B^*, E, i, Q)$

- déterministe en entrée
- tout état est terminal.

Automate fini sous-séquentiel (gauche) :

$\mathcal{A} = (Q, A \times B^*, E, i, \omega)$

- déterministe en entrée
- fonction terminale $\omega : Q \longrightarrow B^*$

$(f, g) \in A^* \times B^*$ est reconnu par $\mathcal{A}$ s'il existe un chemin

$$i \xrightarrow{f/g'} q$$

tel que $g = g'g''$ et $\omega(q) = g''$

Même notion droite: l'addition en base 2 est sous-séquentielle droite.

Conversion de chiffres

C alphabet de chiffres (positifs ou négatifs) contenant $A = \{0, \ldots, \beta - 1\}$

Valeur numérique $\pi_\beta : C^* \to \mathbb{Z}$ telle que $\pi_\beta(c_k \cdots c_0) = \sum_{i=0}^{k} c_i \beta^i$.

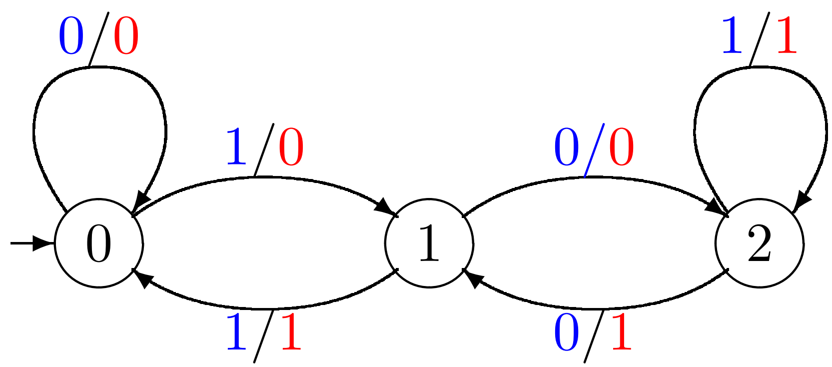
Conversion sur C : $\chi : C^* \to A^*$ telle que $\pi_\beta(c_k \cdots c_0) = \pi_\beta(a_n \cdots a_0)$.

Addition = conversion sur $\{0, \ldots, 2(\beta - 1)\}$
Soustraction = conversion sur $\{-(\beta - 1), \ldots, (\beta - 1)\}$
Multiplication par un entier $m > 0$ fixé = conversion sur $\{0, \ldots, m(\beta - 1)\}$

PROPOSITION 1 *La conversion en base entière β sur C^* est sous-séquentielle droite pour tout C.*

Proposition **2** *La division par un entier positif fixé est sous-séquentielle gauche en base entière β.*

Exemple Division par 3 en base 2



Fonctions de mots infinis réalisables par automate fini

A alphabet d'entrée, B alphabet de sortie.

Automate fini à 2 bandes = transducteur = $\mathcal{A} = (Q, A^* \times B^*, E, I, F)$ avec E et Q finis.

Relation de mots infinis $R \subseteq A^{\mathbb{N}} \times B^{\mathbb{N}}$ est réalisée par $\mathcal{A}$ si R est l'ensemble des étiquettes des chemins infinis commençant dans un état de I et passant infiniment souvent dans F (comportement à la Büchi).

Fonction $\varphi : A^{\mathbb{N}} \longrightarrow B^{\mathbb{N}}$ est réalisable par un automate fini si son graphe est réalisé par automate fini.

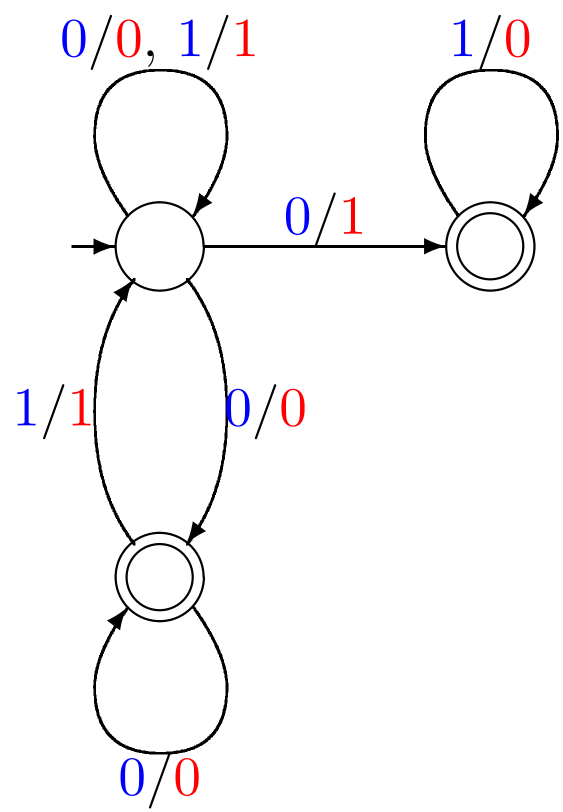
N.B. Pas de boucles terminales d'étiquette u/ε ou ε/u

Redondance : pour $0 \leq a \leq \beta - 2$

$a(\beta - 1)^\omega =_\beta (a+1)0^\omega$

Proposition **3** *La normalisation* $\nu : A^{\mathbb{N}} \longrightarrow A^{\mathbb{N}}$ *qui transforme les développements impropres se terminant par* $(\beta - 1)^\omega$ *en développements se terminant par* 0^ω *est calculable par automate fini.*

Base $\beta = 2$ $\qquad u01^\omega \mapsto u10^\omega$



Séquentialité sur les mots infinis

$\varphi : A^{\mathbb{N}} \longrightarrow B^{\mathbb{N}}$ est séquentielle si elle est réalisée par un automate fini $\mathcal{A} = (Q, A \times B^*, E, i, Q)$ déterministe sur la bande d'entrée.

La division par un entier positif fixé des réels représentés en base entière β est séquentielle.

Base non entière

Beta-développements

Rényi et Parry

Base β nombre réel > 1.

x dans [0,1]

Algorithme glouton

$$r_0 \leftarrow x$$

$$\textit{pour } i \geq 1$$

$$x_i \leftarrow \lfloor \beta r_{i-1} \rfloor ;\ r_i \leftarrow \{\beta r_{i-1}\}$$

$d_\beta(x) = (x_i)_{i\geq 1}$ = beta-développement de x

$x_i \in A_\beta = \{0, \ldots, \lfloor \beta \rfloor\}$ si β non entier

$A_\beta = \{0, \ldots, \beta - 1\}$ si β entier

A_β = alphabet canonique

Beta-transformation sur [0,1]

$T_\beta : x \mapsto \beta x \pmod 1$

$d_\beta(x) = (x_i)_{i\geq 1}$ si et seulement si $x_i = \lfloor \beta T_\beta^{i-1}(x) \rfloor$

Redondance Un nombre peut avoir plusieurs représentations en base β

Exemple $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ nombre d'or, $A_\varphi = \{0,1\}$
$x = 3-\sqrt{5}$, $d_\varphi(x) = 10010^\omega$.

Le facteur 11 est interdit dans $d_\varphi(x)$.

D'autres φ-représentations de x sont
01110^ω, $100(01)^\omega$, $011(01)^\omega$, ...

Le beta-développement d'un nombre x est la plus grande dans l'ordre lexicographique des beta-représentations de x.

Beta-shift

$A_\beta^{\mathbb{N}}$ est muni de la topologie produit, de l'ordre lexicographique, et du décalage σ

$\sigma((x_i)_{i\geq 1}) = (x_{i+1})_{i\geq 1}$.

$D_\beta = \{d_\beta(x) \mid x \in [0{,}1[\,\}$ est un sous-ensemble de $A_\beta^{\mathbb{N}}$ invariant par décalage.

β-shift S_β = fermeture de D_β.

Note Si une représentation se termine par une infinité de 0, on dit qu'elle est finie et les 0 ne sont pas écrits.

Beta-développement de 1

Si $d_\beta(1) = t_1 \cdots t_m$ est fini, on pose
$d^*_\beta(1) = (t_1 \cdots t_{m-1}(t_m - 1))^\omega$
Si $d_\beta(1)$ est infini, on pose $d^*_\beta(1) = d_\beta(1)$.

Exemple $\beta = 2$, alors $d_\beta(1) = 2$ et $d^*_\beta(1) = 1^\omega$
(développements impropres).

$\varphi = (1+\sqrt{5})/2$, alors $d_\varphi(1) = 11$ et
$d^*_\varphi(1) = (10)^\omega$.

Théorème **1** [Parry] *Soit s une suite d'entiers positifs. Alors s est dans D_β ssi pour tout $p \geq 0$*

$$\sigma^p(s) < d^*_\beta(1)$$

et s est dans S_β ssi pour tout $p \geq 0$

$$\sigma^p(s) \leq d^*_\beta(1).$$

Corollaire **1** *Une suite s est le β-développement de 1 ssi pour tout $p \geq 1$*

$$\sigma^p(s) < s.$$

Systèmes dynamiques symboliques ou sous-shifts

A un alphabet, $S \subseteq A^{\mathbb{N}}$ système dynamique symbolique = fermé invariant par décalage

$F(S)$ = ensemble des facteurs finis de S
$I(S) = A^+ \setminus F(S)$ = ensemble des facteurs évités par S
$X(S)$ ensemble des mots interdits minimaux = ensemble des mots de $I(S)$ sans facteur propre dans $I(S)$.

S est de type fini si $X(S)$ est fini. Equivalent à $F(S)$ reconnaissable par automate fini local.

S est sofique si $X(S)$ est reconnaissable par automate fini. Equivalent à $F(S)$ reconnaissable par automate fini.

S est codé s'il existe un code préfixe $Y \subset A^*$ tel que $F(S) = F(Y^*)$. Equivalent à $S = \overline{Y^\omega}$.

PROPOSITION **4** [Blanchard et Hansel] *Le β-shift S_β est un système codé.*

Y = ensemble des mots qui pour chaque longueur sont $<$ le préfixe de $d_\beta(1)$ de même longueur :
Si $d_\beta(1) = (t_i)_{i\geq 1}$ est infini,
$Y = \{t_1 \cdots t_{n-1}a \mid 0 \leq a < t_n, n \geq 1\}$
Si $d_\beta(1) = t_1 \cdots t_m$,
$Y = \{t_1 \cdots t_{n-1}a \mid 0 \leq a < t_n, 1 \leq n \leq m\}$.
Alors S_β est codé par le code Y.

Entropie

Entropie topologique de S_β

$$h(S_\beta) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log B(n)$$

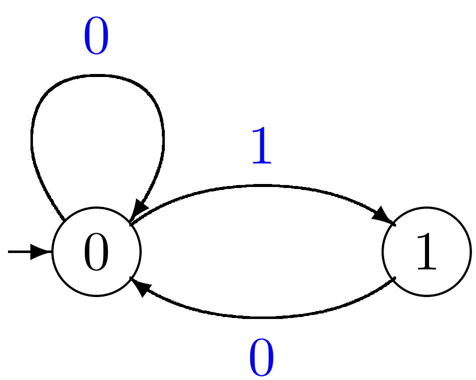
où $B(n)$ = nombre de mots de S_β de longueur n.

Proposition 5 *L'entropie du β-shift S_β est égale à* $\log \beta$.

Caractérisation

Théorème **2** [Ito et Takahashi] *Le β-shift S_β est un système de type fini ssi $d_\beta(1)$ est fini.*

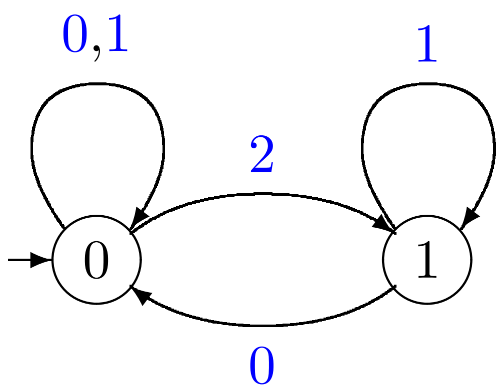
Exemple $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$, alors $d_\varphi(1) = 11$.
L'ensemble des mots interdits minimaux est $\{11\}$.



Automate local pour $F(S_\varphi)$

THÉORÈME **3** [Bertrand] *Le β-shift S_β est un système sofique ssi $d_\beta(1)$ est ultimement périodique.*

Exemple $\gamma = (3+\sqrt{5})/2$, alors $d_\gamma(1) = 21^\omega$.
L'ensemble des mots interdits minimaux est 21^*2.



Automate pour $F(S_\gamma)$

Classes de nombres

Un entier algébrique $\beta > 1$ est un nombre de Pisot si tous ses conjugués algébriques sont en module < 1.

Un entier algébrique $\beta > 1$ est un nombre de Perron si tous ses conjugués algébriques sont en module $< \beta$.

Exemple Les entiers, le nombre d'or, et $\gamma = (3 + \sqrt{5})/2$ sont des nombres de Pisot.

Théorème 4 [Bertrand] *Si β est un nombre de Pisot le β-shift S_β est un système sofique.*

Proposition **6** *Si le β-shift S_β est sofique alors β est un nombre de Perron.*

β est la valeur propre dominante de la matrice d'adjacence du graphe de l'automate fini reconnaissant $F(S_\beta)$.

Problème ouvert : Caractériser les β tels que le β-shift est sofique ou de type fini.

Il existe des nombres de Perron non Pisot tels que le β-shift soit de type fini.

Quand la base est un entier un réel est rationnel ssi son développement est ultimement périodique.

En base non entière, on a

Proposition 7 [Schmidt] *Si β est un nombre de Pisot alors tout nombre de $\mathbb{Q}(\beta) \cap [0,1]$ a un β-développement ultimement périodique.*

Normalisation

C alphabet d'entiers

Normalisation sur C

$$\nu_C : C^{\mathbb{N}} \longrightarrow {A_\beta}^{\mathbb{N}}$$

envoie $s \in C^{\mathbb{N}}$ tel que $x = \sum_{i \geq 1} s_i \beta^{-i} \in [0,1]$ sur $d_\beta(x)$.

Théorème **5** [Berend et Frougny] ν_C *est calculable par automate fini pour tout* C *si et seulement si* β *est un nombre de Pisot.*

Cet automate n'est pas séquentiel.

Conversion de chiffres

C alphabet d'entiers

Conversion sur C

$$\chi_C : C^{\mathbb{N}} \to {A_\beta}^{\mathbb{N}}$$

envoie $s \in C^{\mathbb{N}}$ tel que $x = \sum_{i \geq 1} s_i \beta^{-i} \in [0,1]$ sur une représentation de x sur A_β, non nécéssairement $d_\beta(x)$.

Proposition 8 *Si β est un nombre de Pisot, χ_C est calculable par automate fini séquentiel pour tout C.*

Continuité

Distance sur $A^{\mathbb{N}}$

$$\rho(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{si } u = v \\ 2^{-\min\{k | u_k \neq v_k\}} & \text{sinon} \end{cases}$$

ρ est une distance ultramétrique, $A^{\mathbb{N}}$ est compact.

PROPOSITION **9** *Toute fonction séquentielle* $\Phi : A^{\mathbb{N}} \longrightarrow B^{\mathbb{N}}$ *est uniformément continue.*

Continuité sur les réels

Base β, alphabet canonique A_β, $C \supseteq A_\beta$.

$\pi_\beta : C^{\mathbb{N}} \longrightarrow \pi_\beta(C) \subset \mathbb{R}$ valeur numérique en base β

$$\pi_\beta((x_i)_{i\geq 1}) = \sum_{i\geq 1} x_i \beta^{-i}$$

$\pi_\beta({A_\beta}^{\mathbb{N}}) = [0,1]$

Proposition **10** [Eilenberg] π_β *est une fonction surjective uniformément continue.*

Soit $J = \pi_\beta(C^{\mathbb{N}})$.

$\chi : C^{\mathbb{N}} \longrightarrow A^{\mathbb{N}}$ est consistante en base β s'il existe $\chi_{\mathbb{R}} : J \longrightarrow [0,1]$ telle que

$$\begin{tikzcd}
C^{\mathbb{N}} \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\pi_\beta"'] & A^{\mathbb{N}} \arrow[d, "\pi_\beta"] \\
J \arrow[r, "\chi_{\mathbb{R}}"'] & [0,1]
\end{tikzcd}$$

commute.

$\chi_{\mathbb{R}}$ est la réalisation réelle de χ en base β.

PROPOSITION **11** *Si χ est continue alors $\chi_{\mathbb{R}}$ est continue.*

Quasi-cristaux

Cristaux et quasi-cristaux

Cristaux Atomes rangés périodiquement.
Symétrie d'ordre n en dimension 2 ou 3.
n satisfait

$$\rho = 2\cos\frac{2\pi}{n} \in \mathbb{Z}$$

d'où $n = 2,\ 3,\ 4,\ 6.$

Quasi-cristal Alliage aluminium-manganèse avec
symétrie d'ordre 5 Shechtman et al. 1984
Quasi-périodicité.

Pisot cyclotomiques

Si n n'est pas cristallographique, $\rho = 2\cos\frac{\pi}{n}$ est un entier algébrique de degré $m \leq \lfloor n-1 \rfloor / 2$.

Nombre de Pisot cyclotomique β Pisot tel que

$$\mathbb{Z}[\rho] = \mathbb{Z}[\beta]$$

Alors $m = \varphi(n)/2$ et $\mathbb{Z}[\beta] + \mathbb{Z}[\beta]\exp(2i\pi/n)$ est un anneau invariant par rotation d'ordre n.

Quasicristaux réels

- $n = 5$ ou $n = 10$: $\beta = \rho = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 2\cos\frac{\pi}{5}$,
$M_\beta(X) = X^2 - X - 1$
- $n = 8$: $\beta = 1 + \rho = 1 + \sqrt{2} = 1 + 2\cos\frac{\pi}{4}$,
$M_\beta(X) = X^2 - 2X - 1$
- $n = 12$: $\beta = 2 + \rho = 2 + \sqrt{3} = 2 + 2\cos\frac{\pi}{6}$,
$M_\beta(X) = X^2 - 4X + 1$.

Nombres de Pisot quadratiques unitaires.

Autres Pisot cyclotomiques unitaires

• $n = 7$ ou $n = 14$: $\beta = 1 + \rho = 1 + 2\cos\frac{2\pi}{7}$,
$M_\beta(X) = X^3 - 2X^2 - X + 1$

• $n = 9$ ou $n = 18$: $\beta = 1 + \rho = 1 + 2\cos\frac{\pi}{9}$,
$M_\beta(X) = X^3 - 3X^2 + 1$.

Pour $n = 11$, $n = 13$, $n = 15$ de tels Pisot cyclotomiques unitaires existent (D. Boyd)

Problème ouvert : Trouver d'autres Pisot cyclotomiques unitaires

Beta-entiers

Gazeau et al.

Ensemble des beta-entiers

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_\beta &= \{x \in \mathbb{R} \mid d_\beta(|x|) = x_k \cdots x_0\} \\ &= \mathbb{Z}_\beta^+ \cup (-\mathbb{Z}_\beta^+) \end{aligned}$$

$\mathbb{Z}_\beta$ est auto-similaire et symétrique par rapport à l'origine

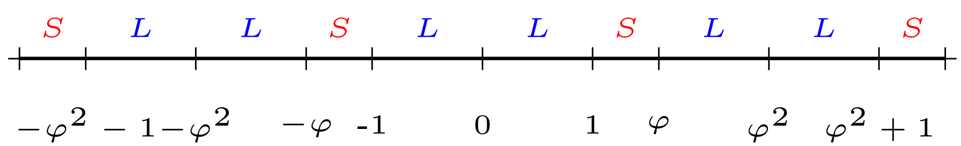
$$\beta\mathbb{Z}_\beta \subset \mathbb{Z}_\beta \ , \mathbb{Z}_\beta = -\mathbb{Z}_\beta$$

Exemple La demi-chaîne de Fibonacci symétrisée

$$\mathbb{Z}_\varphi = \mathbb{Z}_\varphi^+ \cup (-\mathbb{Z}_\varphi^+)$$

engendrée par la substitution de Fibonacci

$$\begin{aligned} L &\mapsto LS \\ S &\mapsto L \end{aligned}$$



Le groupe des beta-entiers

β est la racine > 1 de $X^2 - aX - 1$, $a \geq 1$

• $d_\beta(1) = a1$

• tout nombre > 0 de $\mathbb{Z}[\beta]$ a un β-développement fini.

Si x, $y \in \mathbb{Z}_\beta$ alors il existe $z \in \mathbb{Z}_\beta$ et $\eta \in \{0, \pm 1\}$ uniques tels que

$$x + y = z + \eta(1 - \frac{1}{\beta})$$

On pose

$$x \oplus y = z$$

Proposition **12** *$\mathbb{Z}_\beta$ muni de l'addition $\oplus$ est un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}$.*

β est la racine > 1 de $X^2 - aX + 1$, $a \geq 3$

• $d_\beta(1) = (a-1)(a-2)^\omega$

• tout nombre > 0 de $\mathbb{Z}[\beta]$ a un β-développement ultimement périodique, qui est fini pour ceux de $\mathbb{N}[\beta]$

Si x, $y \in \mathbb{Z}_\beta$ alors il existe $z \in \mathbb{Z}_\beta$ et $\eta \in \{0, \pm 1\}$ uniques tels que

$$x + y = z + \frac{\eta}{\beta}$$

On pose

$$x \oplus y = z$$

Proposition **13** *$\mathbb{Z}_\beta$ muni de l'addition $\oplus$ est un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}$.*

β est un nombre de Pisot cyclotomique cubique
racine > 1 de $X^3 - 2X^2 - X + 1$

- $d_\beta(1) = 2(01)^\omega$

$$\begin{aligned} F &= \pm\{0, -\beta^{-1}, -2\beta^{-1}, -3\beta^{-1}, \beta - 3, 2(\beta - 3), \\ &\quad \beta^2 - \beta - 4, \beta^2 - 3\beta + 2, 2\beta^2 - 5\beta + 1, \\ &\quad 3\beta^2 - 7\beta, 2\beta^2 - 3\beta - 5, \beta^2 - 4\beta + 5\} \end{aligned}$$

Si x, $y \in \mathbb{Z}_\beta$ alors il existe $z \in \mathbb{Z}_\beta$ et $f \in F$ uniques tels que

$$x + y = z + f$$

On pose

$$x \oplus y = z$$

PROPOSITION **14** *$\mathbb{Z}_\beta$ muni de l'addition $\oplus$ est un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}$.*

Systèmes de type fini à deux dimensions

Alphabet A
Contrainte horizontale $H \subset A^*$ = mots interdits minimaux en ligne
Contrainte verticale $V \subset A^*$ = mots interdits minimaux en colonne

$S_{H,V}$ ensemble des mots à deux dimensions satisfaisant les contraintes H et V.

$P_{H,V}(m,n)$ = nombre de mots $m \times n$ de $S_{H,V}$

Entropie

$$h(S_{H,V}) = \lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{mn} \log P_{H,V}(m,n).$$

Application : Codage.

Problème ouvert : calculer l'entropie.

Proposition 15 [Frougny et Vuillon] *La matrice d'adjacence de l'automate fini reconnaissant les mots de $S_{H,V}$ de hauteur m peut être engendrée par m itérations d'une substitution carrée Σ de taille constante.*

Exemple Fibonacci à deux dimensions

$H = V = 11$

Substitution Σ

$$a \to \begin{matrix} a & b \\ a & z \end{matrix} \qquad b \to \begin{matrix} a & z \\ a & z \end{matrix} \qquad z \to \begin{matrix} z & z \\ z & z \end{matrix}$$

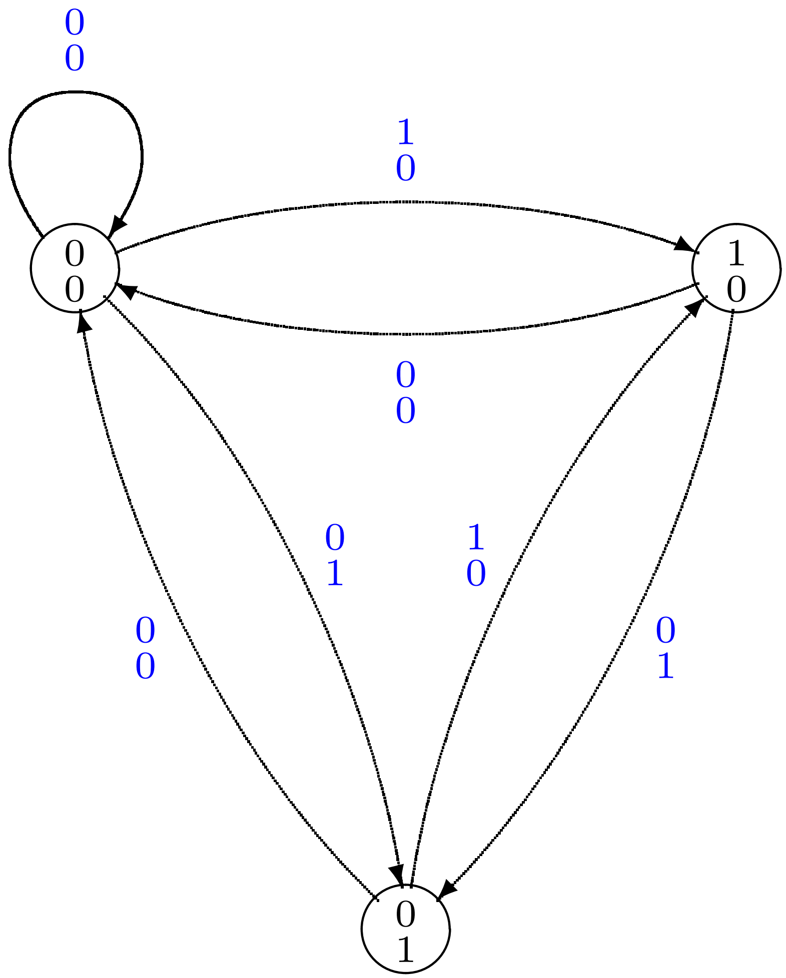
$$a \to \Sigma(a) = \begin{matrix} a & b \\ a & z \end{matrix} \to \Sigma^2(a) = \begin{matrix} a & b & a & z \\ a & z & a & z \\ a & b & z & z \\ a & z & z & z \end{matrix}$$

π = projection $a \mapsto 1$, $b \mapsto 1$, $z \mapsto 0$.

$$\pi(\Sigma^2(a)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'ordre de croissance de $P_{H,V}(2,n) \sim (1+\sqrt{2})^n$ car $1+\sqrt{2}$ la valeur propre dominante de $\pi(\Sigma^2(a))$.

C'est la matrice d'adjacence de l'automate pour les mots Fibonacci-admissibles de hauteur 2.



Automate pour mots Fibonacci-admissibles de hauteur 2