Fonctions de mots infinis réalisables par automate fini. Application à la représentation des nombres réels

Christiane Frougny

LIAFA, Paris

Christiane.Frougny@liafa.jussieu.fr

http://www.liafa.jussieu.fr/~cf/

Mots

A alphabet de lettres

Mot fini = suite finie de lettres de A
$u = a_1 \cdots a_n$ avec a_i dans A.
L'ensemble des mots finis est noté A^*.
Le mot vide est noté ε.
u et v dans A^*, uv est la concaténation de u et v.

Mot infini = suite infinie de lettres de A
$w = a_1 a_2 \cdots$ avec a_i dans A.
L'ensemble des mots infinis est noté $A^{\mathbb{N}}$.
Si u dans A^* et w dans $A^{\mathbb{N}}$, alors $uw \in A^{\mathbb{N}}$.

Mot ultimement périodique $w = uvvv \cdots = uv^{\omega}$
avec u et v dans A^*.

Exemples:
$A = \{0, \ldots, 9\}$
$\pi = 3.141592653 \cdots$
$3/7 = 0.428571428571 \cdots = 0.(428571)^{\omega}$.

Expressions rationnelles

Construites avec

- Constantes: lettres
- Opérations:
  - union
  - produit
  - $*$ itération finie:
    $X^* = \{u_1 \cdots u_n \mid n \geq 0,\ u_i \in X\}$
  - ω itération infinie:
    $X^\omega = \{u_1 u_2 \cdots \mid n \geq 0,\ u_i \in X\}$

Exemples

Expansion binaire des réels de $[0, 1]$

$A = \{0, 1\}$

- $A^\omega = A^\mathbb{N}$
  Tous les réels de $[0, 1]$
- $1A^\omega$
  L'intervalle $[1/2, 1]$
- $A^*1A^\omega = 0^*1A^\omega$
  L'intervalle $]0, 1]$
- A^*1^ω
  Nombre fini de 0 = écritures interdites (impropres)
- $(1^*0)^\omega$
  Infinité de 0 = écritures normalisées

Automate fini

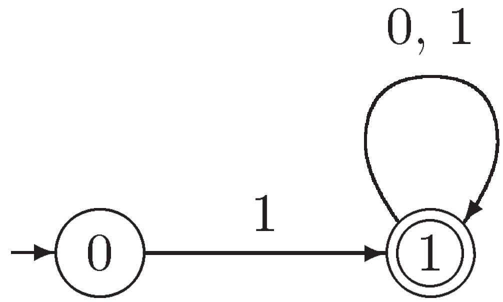
A alphabet

Automate fini = $\mathcal{A} = (Q, A, E, I, F)$
Q fini = états
$E \subset Q \times A \times Q$ = transitions (flèches) étiquetées par A
I = états initiaux
F = états finaux

$H \subseteq A^*$ est reconnu par $\mathcal{A}$ si c'est l'ensemble des étiquettes des chemins finis commençant dans un état de I et finissant dans un état de F.

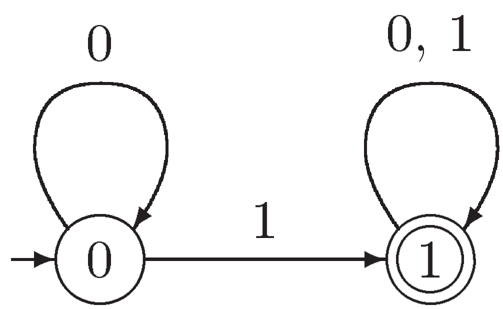
$X \subseteq A^{\mathbb{N}}$ est reconnu par $\mathcal{A}$ si c'est l'ensemble des étiquettes des chemins infinis commençant dans un état de I et passant infiniment souvent dans F (comportement à la Büchi).

Exemple 1.



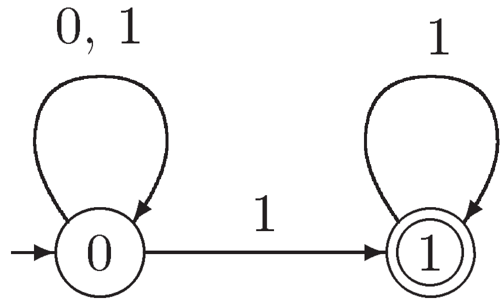
$A = \{0, 1\}$
Ens. des mots finis reconnu $H_1 = 1A^*$
ens des mots infinis reconnu $X_1 = 1A^\omega$

Exemple 2.



$H_2 = 0^*1A^*$
$X_2 = 0^*1A^\omega$

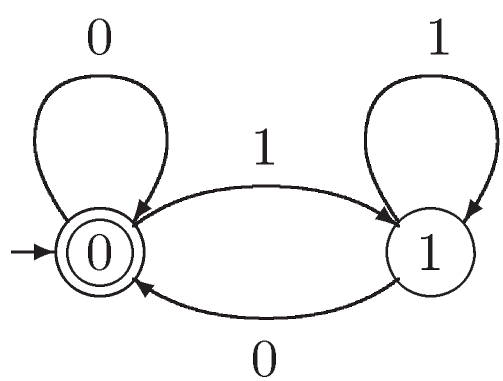
Exemple 3.



$H_3 = A^*11^*$

$X_3 = A^*1^\omega$

Exemple 4.



$H_4 = (1^*0)^*$

$X_4 = (1^*0)^\omega$

Propriétés

Sur les mots finis il y a équivalence entre automates finis et expressions rationnelles: théorème de Kleene.

Sur les mots infinis, il y a équivalence entre automates finis de Büchi et expressions rationnelles.

Les ensembles reconnus par automate fini sont clos par

- opérations rationnelles
- opérations booléennes
- projections et substitutions
- morphismes inverses

Distance et topologie

Distance sur $A^{\mathbb{N}}$

$$d(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{si } u = v \\ 2^{-\min\{k \mid u_k \neq v_k\}} & \text{sinon} \end{cases}$$

Boule ouverte de centre u et de rayon 2^{-n}
$B(u, 2^{-n}) = u_1 \cdots u_{n-1} A^{\omega}$

d est une distance ultramétrique, $A^{\mathbb{N}}$ est compact.

X est ouvert si $X = HA^{\omega}$, $H \subset A^*$
X est fermé si $X = A^{\mathbb{N}} \setminus HA^{\omega}$, $H \subset A^*$

Un ensemble est fermé ssi il est reconnu par un automate de Büchi dont tous les états sont finaux.

Déterminisme

Un automate fini est *déterministe* si

- un seul état initial
- $p \xrightarrow{a} q$ et $p \xrightarrow{a} q'$ implique $q = q'$.

Pour les mots finis, on peut toujours choisir un automate déterministe.

Pas vrai pour les mots infinis reconnus par automate de Büchi.

Fonctions de mots infinis réalisables par automate fini

A alphabet d'entrée, B alphabet de sortie.

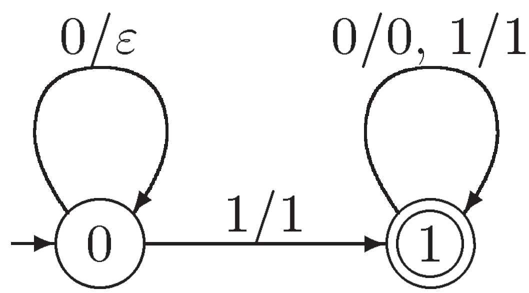
Automate fini à 2 bandes = transducteur = $\mathcal{A} = (Q, A^* \times B^*, E, I, F)$ avec E et Q finis.

Relation de mots infinis $R \subseteq A^{\mathbb{N}} \times B^{\mathbb{N}}$ est réalisée par $\mathcal{A}$ si R est l'ensemble des étiquettes des chemins infinis commençant dans un état de I et passant infiniment souvent dans F (comportement à la Büchi).

Fonction $\varphi : A^{\mathbb{N}} \longrightarrow B^{\mathbb{N}}$ est réalisable par un automate fini si son graphe est réalisé par automate fini.

N.B. Pas de boucles terminales d'étiquette u/ε ou ε/u

Exemple 5. L'automate qui efface les 0 en tête des mots.



THÉORÈME **1** . [Gire] *La composée de deux fonctions réalisables par automate fini l'est aussi. L'inverse d'une fonction réalisable par automate fini l'est aussi.*

Idée de la preuve pour la composition.

Si

$$p \xrightarrow{a/bc} p'$$

dans $\mathcal{A}$ et

$$q \xrightarrow{b/def} q' \xrightarrow{c/xy} q''$$

dans $\mathcal{B}$, alors dans $\mathcal{B} \circ \mathcal{A}$ on aura

$$(p, q) \xrightarrow{a/defxy} (p', q'')$$

Même problème pour les états terminaux que dans l'intersection: il faut utiliser un booléen pour mémoriser si un état final de $\mathcal{A}$ a été vu.

Représentation des réels

Base b entier ≥ 2.

x réel de $[0,1[$

Algorithme glouton

$r_0 \leftarrow x$

pour $i \geq 1$

$x_i \leftarrow \lfloor br_{i-1} \rfloor$; $r_i \leftarrow \{br_{i-1}\}$

$$x = \sum_{i \geq 1} x_i b^{-i}$$

Notation

$$x = (\cdot x_1 x_2 \cdots)_b$$

avec chiffres $x_i \in A = \{0, \ldots, b-1\}$.

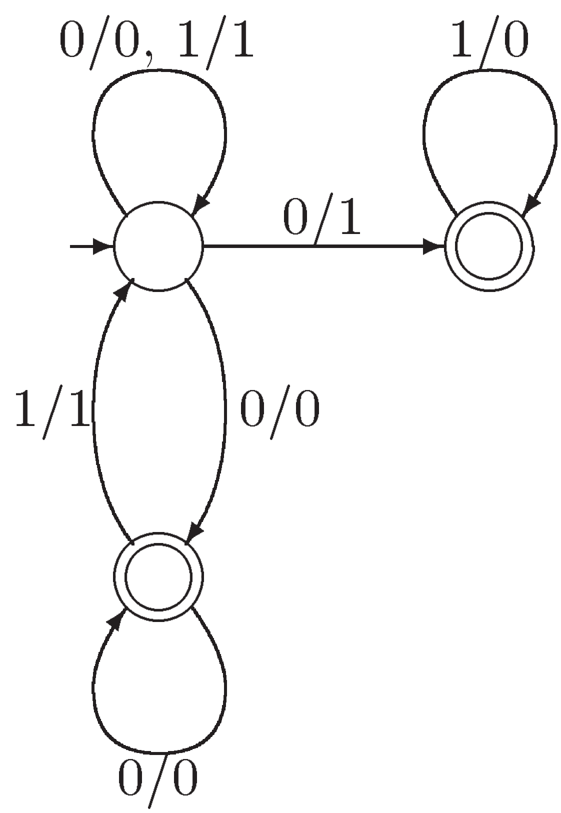
Exercice. Montrer que les rationnels sont exactement les nombres ayant un développement ultimement périodique en base b.

Redondance : pour $0 \leq a \leq b-2$

$$a(b-1)^\omega =_b (a+1)0^\omega$$

Proposition **1** . *La fonction de normalisation* $\nu : A^{\mathbb{N}} \longrightarrow A^{\mathbb{N}}$ *qui transforme les développements impropres se terminant par* $(b-1)^\omega$ *en développements se terminant par* 0^ω *est calculable par automate fini.*

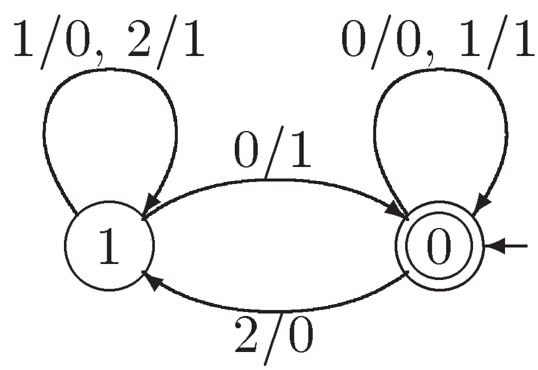
Base $b = 2$: $u01^\omega \to u10^\omega$



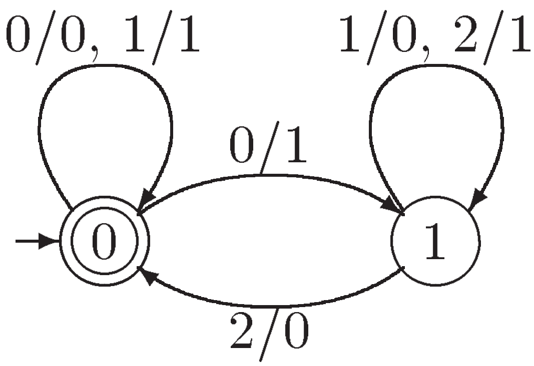
Addition

Addition des entiers en base 2 (de droite à gauche)

$$\begin{array}{cccccc}
 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
+ & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\
\hline\hline
 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{array}$$



Addition des réels en base 2 (de gauche à droite)



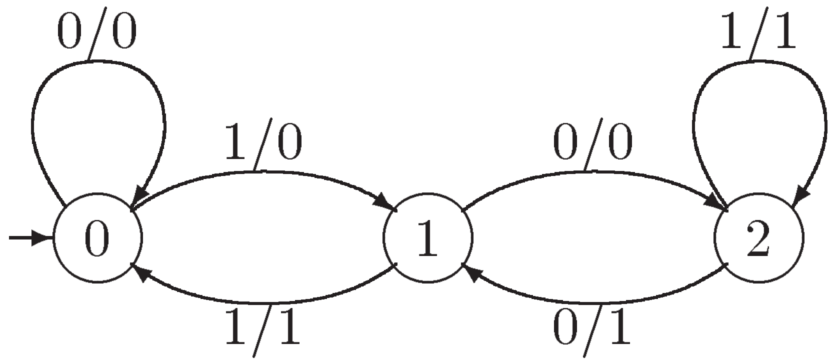
Cet automate est non-ambigu.

Proposition **2** . *Toute fonction réalisable par automate fini est réalisable par un automate non-ambigu.*

Séquentialité

$\varphi : A^{\mathbb{N}} \longrightarrow B^{\mathbb{N}}$ est séquentielle si elle est réalisée par un automate fini $\mathcal{A} = (Q, A \times B^*, E, i, Q)$ déterministe sur la bande d'entrée.

Exemple 6. Division par 3 en base 2



La division par un entier positif fixé est séquentielle en base b.

Remarque **1** . *L'addition en base 2 sur* $\{0, 1\}$ *n'est pas séquentielle.*

$$01^n0^\omega + 0^n10^\omega = 10^\omega$$

$$01^n0^\omega + 0^\omega = 01^n0^\omega$$

PROPOSITION **3** . *La composée de fonctions séquentielles est séquentielle.*

Exercice. Montrer que l'image par une fonction séquentielle d'un mot ultimement périodique est un mot ultimement périodique.

Continuité

THÉORÈME **2** . *Toute fonction séquentielle* $\varphi : A^{\mathbb{N}} \longrightarrow B^{\mathbb{N}}$ *est uniformément continue.*

Comme $F = Q$, le domaine est fermé, et il suffit de montrer que φ est continue.

Pour tout $m > 0$ on peut trouver $n > 0$ et un mot w de A^* de longueur n tel que

$$i \xrightarrow{w/y} p$$

avec $|y| \geq m$, car il n'y a pas de boucles d'image vide dans $\mathcal{A}$.

Soient $u = wu'$ et $v = wv'$ dans $A^{\mathbb{N}}$: $d(u, v) = 2^{-n}$

$\varphi(u)$ et $\varphi(v)$ commencent par y, donc $d(\varphi(u), \varphi(v)) \leq 2^{-m}$, et φ est continue. ■

Continuité sur les réels

Base b, alphabet canonique $A = \{0, \dots, b-1\}$, $D \supseteq A$ un autre alphabet de chiffres positifs ou négatifs.

Soit $\pi_b : D^{\mathbb{N}} \longrightarrow \pi_b(D) \subset \mathbb{R}$ la valeur numérique en base b

$$\pi_b((x_i)_{i\geq 1}) = \sum_{i\geq 1} x_i b^{-i}$$

$\pi_b(A^{\mathbb{N}}) = [0, 1]$

Proposition **4** . [Eilenberg] π_b *est une fonction surjective uniformément continue.*

L'algorithme glouton de représentation des réels entraîne la surjectivité.

Soient u et v dans $D^{\mathbb{N}}$ tels que $d(u, v) = 2^{-n}$, alors

$$|\pi_b(u) - \pi_b(v)| = |\sum_{i\geq n} u_i b^{-i} - \sum_{i\geq n} v_i b^{-i}| \leq \frac{2\ m(D)}{b^{n-1}(b-1)}$$

où $m(D) = \max\{|d| \mid d \in D\}$. ■

Soit $J = \pi_b(D^{\mathbb{N}})$.

$\chi : D^{\mathbb{N}} \longrightarrow A^{\mathbb{N}}$ est consistante en base b s'il existe $\chi_{\mathbb{R}} : J \longrightarrow [0,1]$ telle que

$$\begin{array}{ccc} D^{\mathbb{N}} & \xrightarrow{\ \chi\ } & A^{\mathbb{N}} \\ \pi_b \Big\downarrow & & \Big\downarrow \pi_b \\ J & \xrightarrow[\chi_{\mathbb{R}}]{} & [0,1] \end{array}$$

commute.

$\chi_{\mathbb{R}}$ est la réalisation réelle de χ en base b.

Proposition **5** . *Si χ est séquentielle alors $\chi_{\mathbb{R}}$ est continue.*

Puisque χ et π_b sont continues, $\pi_b \circ \chi_{\mathbb{R}}$ l'est aussi. π_b est surjective et continue, $D^{\mathbb{N}}$ et J sont compacts, donc $\chi_{\mathbb{R}}$ est continue par un résultat standard de topologie. ■

Automates finis en-ligne

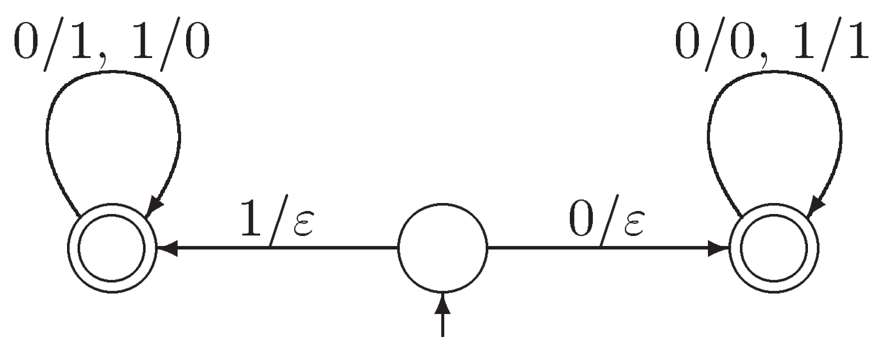
Automate fini en-ligne = automate séquentiel particulier:

• partie transiente: pendant un temps δ (le délai) on lit sans rien sortir

• partie synchrone: ensuite pour chaque lettre lue on sort une lettre

Utilisés en arithmétique des ordinateurs.

Exemple 7. Automate en ligne à délai 1.



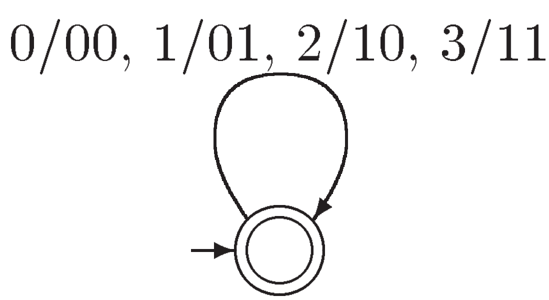
Automates à délai borné

Un automate est à délai borné si toutes ses boucles ont des étiquettes dont l'entrée et la sortie ont même longueur.

Résultat de synchronisation

Proposition **6** . *Soit φ une fonction réalisée par un automate à délai borné $\mathcal{A}$. Si de plus $\mathcal{A}$ est séquentiel, alors on peut construire un automate en-ligne $\mathcal{B}$ qui réalise φ.*

Exemple 8. L'automate qui fait la conversion base 4 $\rightarrow$ base 2 est séquentiel mais pas à délai borné.



Représentations d'Avizienis

Base b, chiffres dans $B = \{\bar{a}, \ldots, a\}$ avec $b/2 \leq a \leq b-1$.

Exemple 9. $b = 10$, $a = 6$, $B = \{\bar{6}, \ldots, 6\}$

Redondance : $46 =_{10} 5\bar{4}$

Addition sans propagation de retenue :

$$
\begin{array}{cccccc}
 & 0 & 2 & 5 & \bar{4} & 6 \\
+ & 0 & 5 & 0 & 1 & 6 \\
\hline
 & 0 & 7 & 5 & \bar{3} & 12 \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 1 & \\
 & & \bar{3} & 5 & \bar{3} & 2 \\
\hline\hline
 & 1 & \bar{3} & 5 & \bar{2} & 2
\end{array}
$$

Règles de réécriture:

$$
\begin{array}{lll}
12 \to \begin{array}{c|c} 1 & \\ & 2 \end{array} & 11 \to \begin{array}{c|c} 1 & \\ & 1 \end{array} & \\
10 \to \begin{array}{c|c} 1 & \\ & 0 \end{array} & 9 \to \begin{array}{c|c} 1 & \\ & \bar{1} \end{array} & 8 \to \begin{array}{c|c} 1 & \\ & \bar{2} \end{array} \\
7 \to \begin{array}{c|c} 1 & \\ & \bar{3} \end{array} & 6 \to \begin{array}{c|c} 1 & \\ & \bar{4} \end{array} &
\end{array}
$$

Même chose pour les chiffres négatifs.

Marche pour $b \geq 3$ et $(b+1)/2 \leq a \leq b-1$. On fait les réécritures entre $2a$ et a (resp. $-2a$ et $-a$).

Addition en temps constant en parallèle.

Pour $b = 2$, $B = \{\bar{1}, 0, 1\}$ ([Chow and Robertson]).

Règles de réécriture:

$$2 \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r|l} 1 & \\ & 0 \end{array}$$

Pour le chiffre 1 on utilise une fenêtre

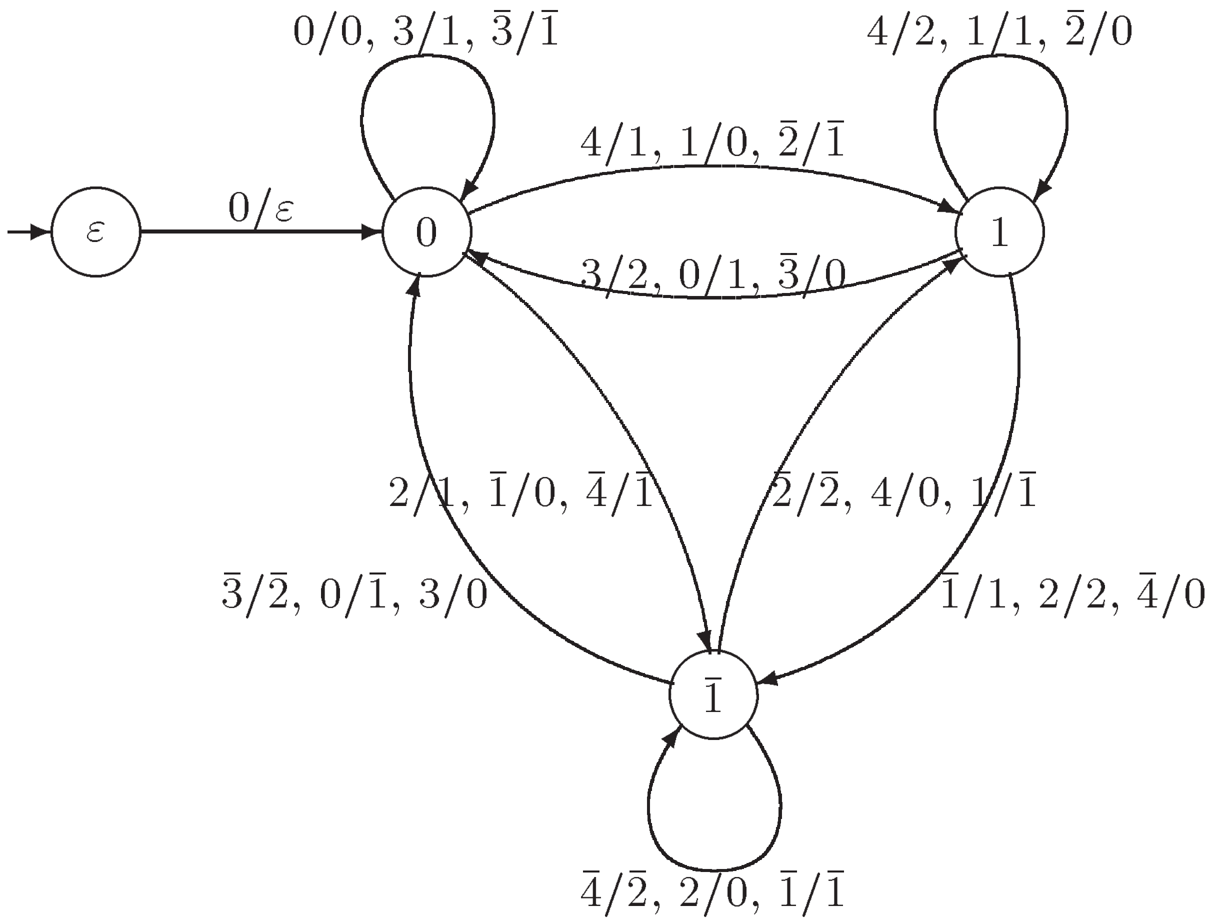
$$1 \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r|l} 1 & \\ & \bar{1} \end{array}$$ si le chiffre à droite de 1 est ≥ 0

sinon rien.

Idem pour les chiffres négatifs.

$$\begin{array}{cccccc} & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ + & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ & 0 & \bar{1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline\hline & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

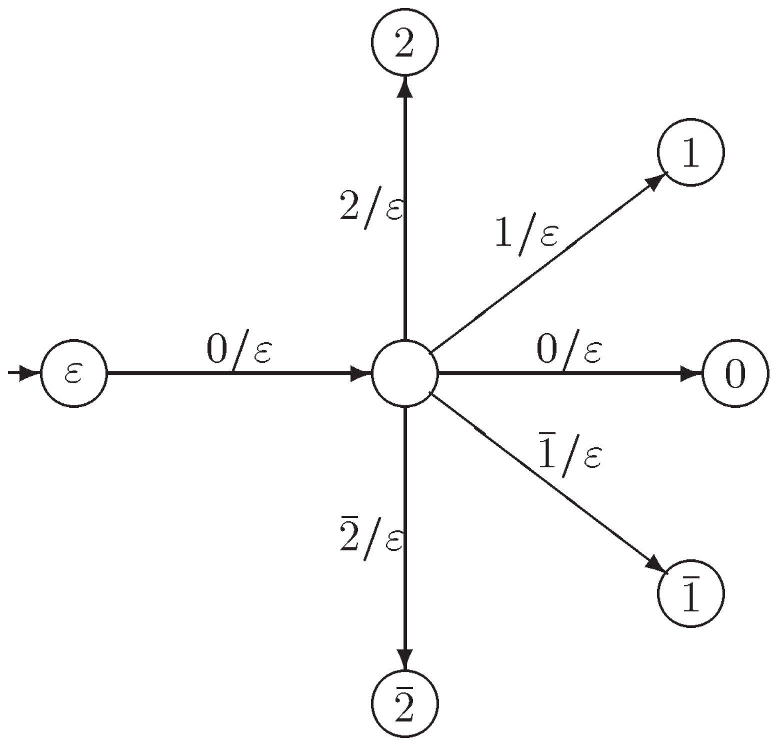
Automate en-ligne à délai 1 réalisant l'addition en base $b = 3$ sur $B = \{\bar{2}, \ldots, 2\}$



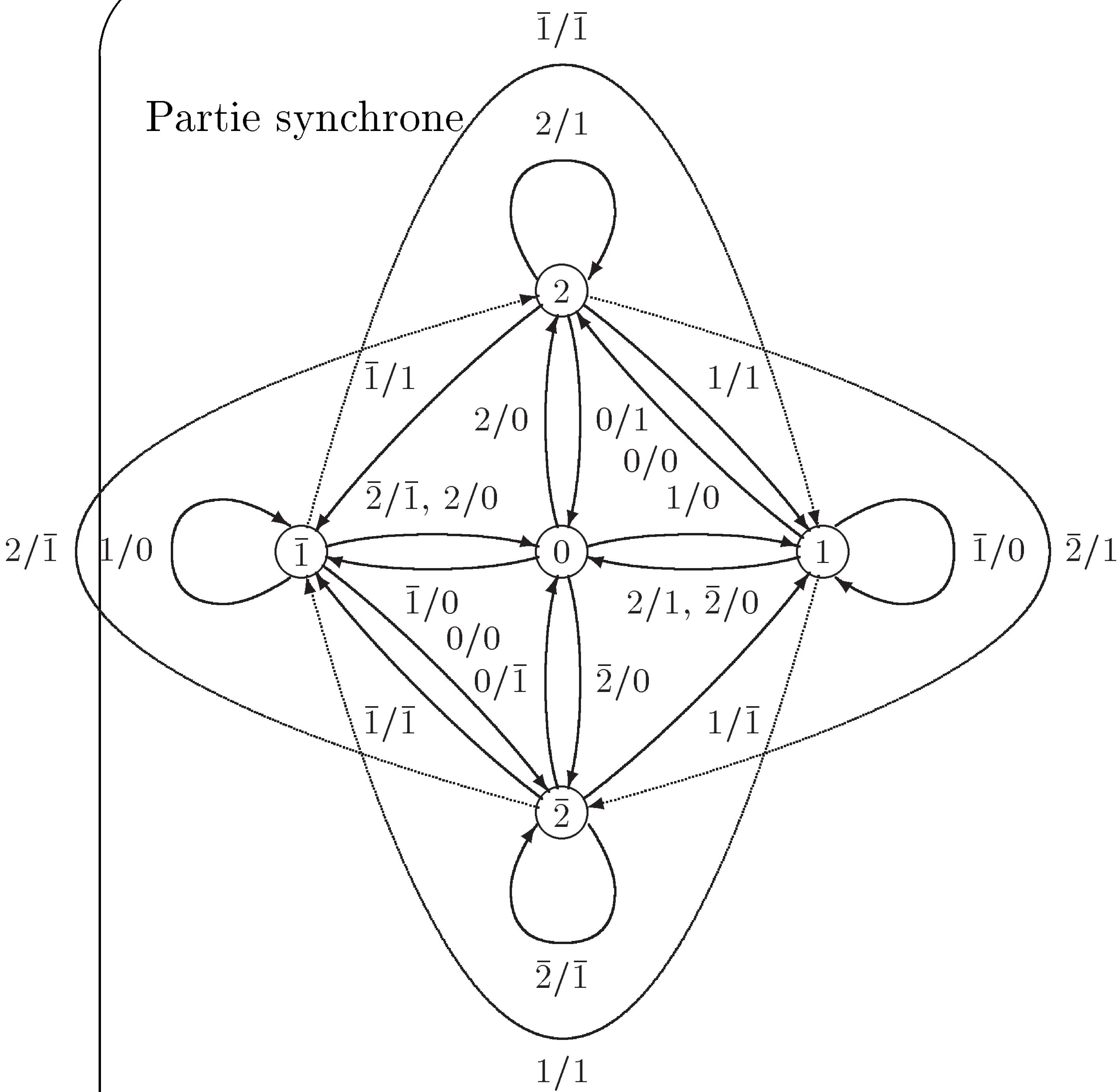
$$p \xrightarrow{x/y} q \Leftrightarrow 3p + x = 3y + q$$

Automate en-ligne à délai 2 réalisant l'addition en base $b = 2$ sur $B = \{\bar{1}, 0, 1\}$

Partie transiente



Partie synchrone



$$p \xrightarrow{x/y} q \Leftrightarrow 2p + x = 4y + q$$

PROPOSITION 7 . *Toute fonction affine à cœfficients rationnels est réalisable par automate fini en-ligne en base b sur $B = \{\bar{a}, \ldots, a\}$, avec $b/2 \leq a \leq b - 1$.*

Réciproquement, soit $D = \{\bar{d}, \ldots, d\}$ avec $d \geq a$,
$I = [-a/(b-1), a/(b-1)]$,
$J = [-d/(b-1), d/(b-1)]$.

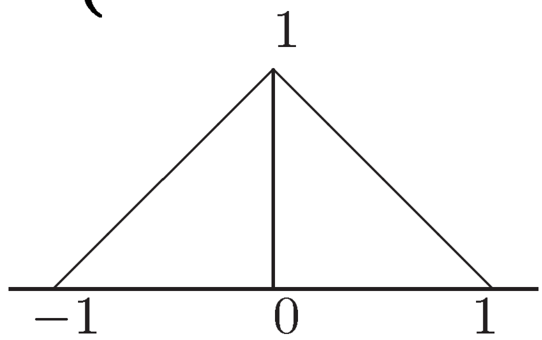
THÉORÈME 3 . [J.-M. Muller] *Soit*

$$\begin{tikzcd} D^{\mathbb{N}} \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\pi_b"'] & B^{\mathbb{N}} \arrow[d, "\pi_b"] \\ J \arrow[r, "\chi_{\mathbb{R}}"'] & I \end{tikzcd}$$

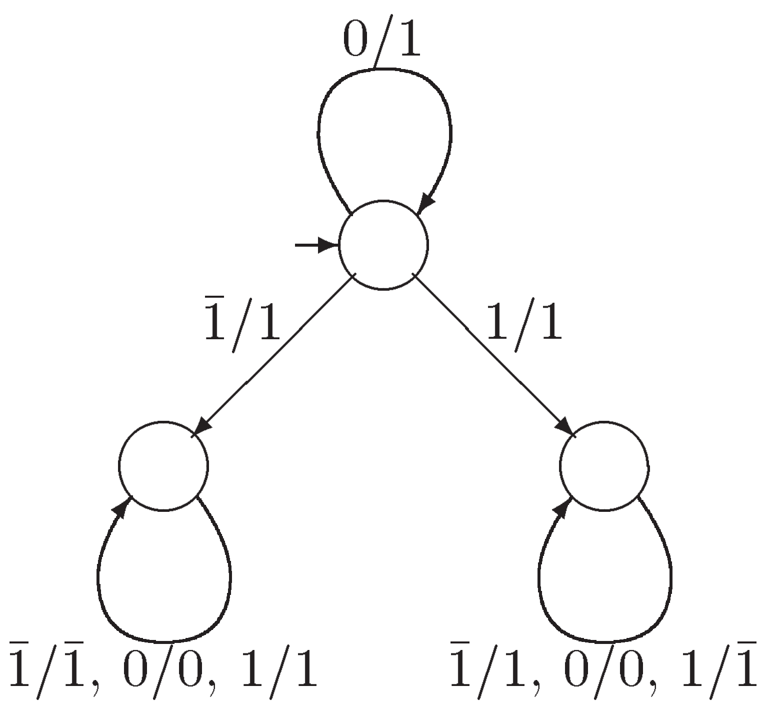
tel que χ est réalisée par un automate fini en-ligne. Si la dérivée seconde $\chi''_{\mathbb{R}}$ est continue par morceaux, alors dans chaque intervalle où $\chi''_{\mathbb{R}}$ est continue, $\chi_{\mathbb{R}}$ est affine à cœfficients rationnels.

Exemple 10. La fonction tente $f : [-1,1] \to [0,1]$

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 1+x & \text{si } -1 \le x \le 0 \end{cases}$$



En base 2 avec chiffres dans $\{\bar{1}, 0, 1\}$



Exercice. Que calcule l'automate de l'exemple 3 en base 2?

Références

[1] A. Avizienis, Signed-digit number representations for fast parallel arithmetic. *IRE Transactions on electronic computers* **10** (1961), 389–400.

[2] O. Carton, Mots infinis et automates, `http://www-igm.univ-mlv.fr/~carton/Transparents/`

[3] C.Y. Chow and J.E. Robertson, Logical design of a redundant binary adder. *Proc. 4th Symposium on Computer Arithmetic* (1978), 109–115.

[4] S. Eilenberg, *Automata, Languages and Machines*, vol. A, Academic Press, 1974.

[5] M.D. Ercegovac, On-line arithmetic: An overview. *Real time Signal Processing VII* **SPIE 495** (1984), 86–93.

[6] Ch. Frougny et J. Sakarovitch, Synchronisation déterministe des automates à délai borné. *Theoret. Comput. Sci.* **191** (1998), 61–77.

[7] F. Gire et M. Nivat, Relations rationnelles infinitaires. *Calcolo* XXI (1984), 91–125.

[8] J.-M. Muller, Some characterizations of functions computable in on-line arithmetic. *I.E.E.E. Trans. on Computers* **43** (1994), 752–755.

[9] D. Perrin et J.-E. Pin, *Infinite words*, `http://www.liafa.jussieu.fr/~jep/Resumes/InfiniteWords.html`

[10] W. Thomas, Automata on infinite objects. In *Handbook of Theoretical Science*, volume B, Chapter 4, Elsevier, 1990.