Ecole de Printemps d'Informatique Théorique
Pavages 2000

Quasi-cristaux et beta-numération

Christiane Frougny

LIAFA et Paris 8
http://www.liafa.jussieu.fr/~cf/

En collaboration avec Č. Burdík, J. P. Gazeau et R. Krejcar

Cristaux et quasicristaux

Cristaux: atomes rangés périodiquement.
Symétrie d'ordre n en dimension 2 ou 3.
n satisfait

$$\rho = 2\cos\frac{2\pi}{n} \in \mathbb{Z}$$

d'où $n = 2, 3, 4, 6$.

Quasi-cristal Alliage aluminium-manganèse avec symétrie d'ordre 5 Shechtman et al. 1984
Quasi-périodicité.

Modélisation géométrique

$\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ est uniformément discret s'il existe $r > 0$ tel que toute boule de rayon r contient au plus un point de Λ.
Λ est relativement dense s'il existe $R > 0$ tel que toute boule de rayon R contient au moins un point de Λ.

Si Λ satisfait ces deux conditions, c'est un ensemble de Delaunay.

Ensemble modèle (Y. Meyer 1970, 1972)

Schéma coupe et projection

$$\mathbb{R}^d \quad \xleftarrow{\pi_1} \mathbb{R}^d \times G \xrightarrow{\pi_2} \quad G$$

$$D$$

G groupe abélien loc. compact (espace interne)
$\mathbb{R}^d$ espace physique
D réseau *i.e.* sous-groupe discret de $\mathbb{R}^d \times G$ tel que $(\mathbb{R}^d \times G)/D$ est compact
$\pi_1|_D$ injective
$\pi_2(D)$ dense dans G.
On note $* = \pi_2 \circ (\pi_1|_D)^{-1}$

$$* : M = \pi_1(D) \longrightarrow G$$

$\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ est un ensemble modèle s'il existe un schéma coupe et projection et un ensemble relativement compact $\Omega \subset G$ d'intérieur non-vide tel que

$$\Lambda = \{x \in M \mid x^* \in \Omega\}$$

Exemple d'ensemble modèle

$\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

espace interne $G = \mathbb{R}$

espace physique $\mathbb{R}$ droite de pente $1/\tau$

réseau $D = \mathbb{Z}^2$

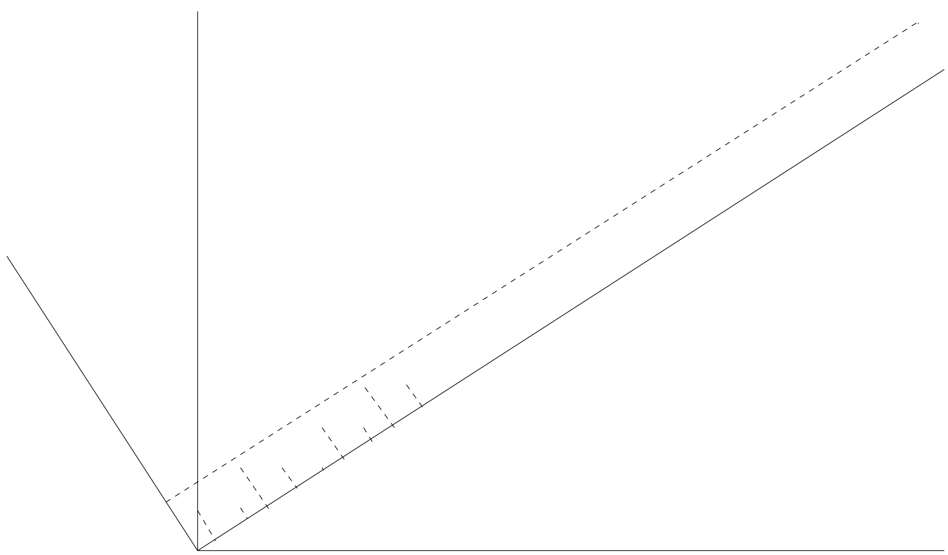


Figure 1: Pavage de Fibonacci

$$\ldots LSLLSLSLLS \ldots$$

Construction algébrique de la chaîne de Fibonacci

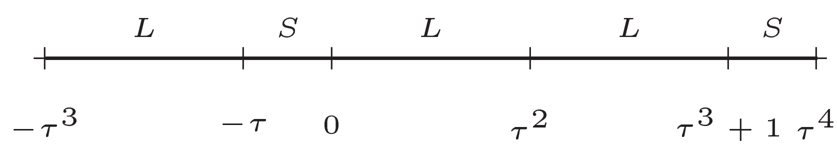
$$\mathbb{R} \xleftarrow{\pi_1} \mathbb{R}\times\mathbb{R} \xrightarrow{\pi_2} \mathbb{R}$$

$$\mathbb{Z}^2$$

$\pi_1|_{\mathbb{Z}^2} \sim \mathbb{Z}[\tau] = \{a + b\tau \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$

Chaîne de Fibonacci

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \{x = a + b\tau \mid x' = a - \frac{b}{\tau} \in \Omega = [0, 1)\} \\ &= \{\dots, -\tau^3, -\tau, 0, \tau^2, \tau^3 + 1, \tau^4, \dots\} \end{aligned}$$



Pavage de $\mathbb{R}$ avec 2 tuiles L et S

$$\begin{aligned} L &\mapsto LLS \\ S &\mapsto LS \end{aligned}$$

avec $|L| = \tau^2$ et $|S| = \tau$

$$\begin{array}{rcl} S & | & L \\ LS & | & LLS \\ LLSLS & | & LLSLLSLS \end{array}$$

On a

$$\tau^2 \mathcal{F} \subset \mathcal{F}$$

d'où une suite infinie de versions contractées et dilatées de $\mathcal{F}$

$$\ldots \subset \mathcal{F}_{j-1} \subset \mathcal{F}_j \equiv \mathcal{F}/\tau 2j \subset \mathcal{F}_{j+1} \subset \ldots$$

Suite de discrétisations de plus en plus denses de $\mathbb{R}$

"ondelettes discrètes quasi-cristallines"

Ensemble de Meyer

$\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ est un ensemble de Meyer s'il est Delaunay et s'il existe un ensemble fini F tel que

$$\Lambda - \Lambda \subset \Lambda + F$$

Théorème **1** . *Un ensemble modèle est un ensemble de Meyer.*
Réciproquement, si Λ est un ensemble de Meyer, il existe un ensemble fini F et un ensemble modèle Λ_0 tel que $\Lambda \subset \Lambda_0 + F$.

Λ_1 et Λ_2 sont finiment équivalents s'il existe deux ensembles finis F_1 et F_2 tels que $\Lambda_1 \subset \Lambda_2 + F_2$ et $\Lambda_2 \subset \Lambda_1 + F_1$.

Théorème **2** . *Si Λ_1 est un ensemble de Meyer et Λ_2 est finiment équivalent à Λ_1, alors Λ_2 est un ensemble de Meyer.*

Proposition **1** . *Si Λ est Meyer, alors $\Lambda + \Lambda$, $\Lambda - \Lambda$ et $\Lambda + F$, où F est fini, le sont aussi.*

PROPOSITION **2** . *Λ est un ensemble de Meyer si et seulement si Λ et $\Lambda - \Lambda$ sont des ensembles de Delaunay.*

PROPOSITION **3** . *Si Λ est un ensemble de Meyer et $\tilde{\Lambda} \subset \Lambda$ est un ensemble de Delaunay, alors $\tilde{\Lambda}$ est un ensemble de Meyer.*

Remarque $\Lambda = \mathbb{Z}$ est un ensemble modèle et $\Lambda' = \mathbb{Z} + \{0, \sqrt{2}\}$ n'est pas modèle, mais est Meyer.

Remarque $\Lambda = \mathbb{Z}^+$ non Meyer car non relativement dense, mais $\Lambda - \Lambda = \mathbb{Z}$ est Delaunay.

Nombre de Pisot $\beta > 1$ entier algébrique dont tous les conjugués sont < 1 en module.
Nombre de Salem $\beta > 1$ entier algébrique dont tous les conjugués sont ≤ 1 en module.

Théorème **3** . *Si $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ est un ensemble de Meyer et si $\beta > 1$ est un nombre réel tel que $\beta\Lambda \subset \Lambda$ alors β est un nombre de Pisot ou un nombre de Salem.*
Réciproquement, pour tout d et pour tout Pisot ou Salem β, il existe un ensemble de Meyer $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ tel que $\beta\Lambda \subset \Lambda$.

Beta-numération (Rényi, Parry)

$\beta > 1$, $x > 0$

Beta-développement de x:

$\beta^k \le x < \beta^{k+1}$

$x_k = \lfloor x/\beta^k \rfloor$ et $r_k = \{x/\beta^k\}$.

Pour $i < k$, soit $x_i = \lfloor \beta r_{i+1} \rfloor$, et $r_i = \{\beta r_{i+1}\}$.

$$\langle x \rangle_\beta = x_k x_{k-1} \ldots x_1 x_0 \cdot x_{-1} x_{-2} \ldots$$

$x_i \in A$ où $A = \{0, \ldots, \beta - 1\}$ si β entier ou $A = \{0, \ldots, \lfloor \beta \rfloor\}$ si β non entier.

Soit $T_\beta(x) = \beta x \bmod 1$ et $d_\beta(1) = (t_i)_{i \ge 1}$, où $t_i = \lfloor \beta T_\beta^{i-1}(1) \rfloor$.

Si β est Pisot $d_\beta(1)$ est ultimement périodique (A. Bertrand)

Si $d_\beta(1)$ est ultimement périodique on dit que β est un beta-nombre.

Beta-entiers

Ensemble des beta-entiers

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}_\beta &= \{x \in \mathbb{R} \mid \langle|x|\rangle_\beta = x_k \cdots x_0\} \\ &= \mathbb{Z}_\beta^+ \cup (-\mathbb{Z}_\beta^+)\end{aligned}$$

$\mathbb{Z}_\beta$ est auto-similaire et symétrique par rapport à l'origine

$$\beta\mathbb{Z}_\beta \subset \mathbb{Z}_\beta \ , \ \mathbb{Z}_\beta = -\mathbb{Z}_\beta$$

Théorème **4** . *Si β est un nombre de Pisot, $\mathbb{Z}_\beta$ est un ensemble de Meyer.*

Systèmes de numération associés à un beta-nombre

- $d_\beta(1) = t_1 \cdots t_m$

$$u_{n+m} = t_1 u_{n+m-1} + \cdots + t_m u_n$$

$u_0 = 1,\ u_i = t_1 u_{i-1} + \cdots + t_i u_0 + 1,\ 1 \leq i \leq m-1.$

- $d_\beta(1) = t_1 \cdots t_m (t_{m+1} \cdots t_{m+p})^\omega$

$$\begin{aligned} u_{n+m+p} &= t_1 u_{n+m+p-1} + \cdots + t_{m+p} u_n \\ &+ u_{n+m} - t_1 u_{n+m-1} - \cdots - t_m u_n \end{aligned}$$

$u_0 = 1,\ u_i = t_1 u_{i-1} + \cdots + t_i u_0 + 1,\ 1 \leq i \leq m+p-1.$

$U_\beta = (u_n)_{n \geq 0}$ définit le système de numération associé à β

$\Phi : f_k \beta^k + \cdots + f_1 \beta + f_0 \mapsto f_k u_k + \cdots + f_1 u_1 + f_0$

PROPOSITION **4** . *Soit β un beta-nombre. Si $\langle x \rangle_\beta = x_k \cdots x_0$, alors $N = \Phi(x)$ a comme U_β-representation $\langle N \rangle_{U_\beta} = x_k \cdots x_0$.*

L'ensemble $\mathbb{Z}_\beta$ est ordonné: soit b_n le n-ème β-entier. Alors

$$\Phi(b_n) = n.$$

Exemple Le système associé à τ est le système de Fibonacci avec $u_0 = 1$ and $u_1 = 2$.

$\mathbb{Z}$	Fibonacci	$\mathbb{Z}_\tau$
1	1	1
2	10	τ
3	100	τ^2
4	101	$\tau^2 + 1$
5	1000	τ^3
6	1001	$\tau^3 + 1$

Pavage et substitution associés à un beta-nombre

La demi-droite positive admet un pavage auto-similaire avec un nombre fini de tuiles de longueur $T_\beta^i(1)$, pour $i \geq 0$ (Thurston).

• $d_\beta(1) = t_1 \cdots t_m$

m tuiles de longueur 1, $\beta - t_1$, $\ldots$, $\beta^{m-1} - t_1\beta^{m-2} - \cdots - t_{m-1}$.

Substitution sur $\mathbb{A} = \{a_0, \cdots, a_{m-1}\}$

$$\sigma_\beta : \begin{cases} a_0 & \mapsto & a_0^{t_1} a_1 \\ a_1 & \mapsto & a_0^{t_2} a_2 \\ & \cdots & \\ a_{m-2} & \mapsto & a_0^{t_{m-1}} a_{m-1} \\ a_{m-1} & \mapsto & a_0^{t_m}. \end{cases}$$

• $d_\beta(1) = t_1 \cdots t_m (t_{m+1} \cdots t_{m+p})^\omega$
$m + p$ tuiles de longueur 1, $\beta - t_1$, …,
$\beta^{m+p-1} - t_1 \beta^{m+p-2} - \cdots - t_{m+p-1}$.
Substitution sur $\mathbb{A} = \{a_0, \cdots, a_{m+p-1}\}$

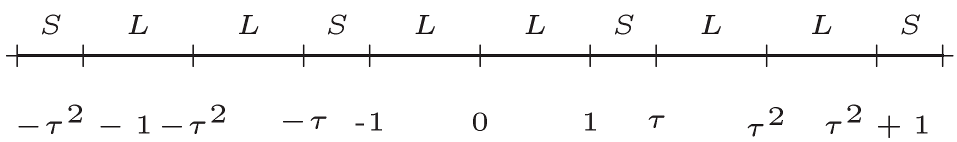
$$\sigma_\beta : \begin{cases} a_0 & \mapsto & a_0^{t_1} a_1 \\ a_1 & \mapsto & a_0^{t_2} a_2 \\ & \cdots & \\ a_{m+p-2} & \mapsto & a_0^{t_{m+p-1}} a_{m+p-1} \\ a_{m+p-1} & \mapsto & a_0^{t_{m+p}} a_m. \end{cases}$$

Exemple: La demi-chaîne de Fibonacci symétrisée

$$\mathbb{Z}_\tau = \mathbb{Z}_\tau^+ \cup (-\mathbb{Z}_\tau^+)$$

engendrée par la substitution de Fibonacci

$$\begin{array}{ccc} L & \mapsto & LS \\ S & \mapsto & L \end{array}$$



$\mathbb{Z}_\tau$ est un ensemble de Meyer qui n'est pas un ensemble modèle.

Pisot cyclotomiques

Si n n'est pas cristallographique, $\rho = 2\cos\frac{\pi}{n}$ est un entier algébrique de degré $m \leq \lfloor n-1 \rfloor/2$.

Nombre de Pisot cyclotomique β Pisot tel que

$$\mathbb{Z}[\rho] = \mathbb{Z}[\beta]$$

Alors $m = \varphi(n)/2$ et $\mathbb{Z}[\beta] + \mathbb{Z}[\beta]\zeta$ est un anneau invariant par rotation d'ordre n, avec $\zeta = \exp(2i\pi/n)$.

Quasicristaux réels

- $n = 5$ ou $n = 10$: $\beta = \rho = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 2\cos\frac{\pi}{5}$, $M_\beta(X) = X^2 - X - 1$
- $n = 8$: $\beta = 1 + \rho = 1 + \sqrt{2} = 1 + 2\cos\frac{\pi}{4}$, $M_\beta(X) = X^2 - 2X - 1$
- $n = 12$: $\beta = 2 + \rho = 2 + \sqrt{3} = 2 + 2\cos\frac{\pi}{6}$, $M_\beta(X) = X^2 - 4X + 1$.

Nombres de Pisot quadratiques unitaires.

Autres Pisot cyclotomiques unitaires

• $n = 7$ ou $n = 14$: $\beta = 1 + \rho = 1 + 2\cos\frac{2\pi}{7}$,
$M_\beta(X) = X^3 - 2X^2 - X + 1$

• $n = 9$ ou $n = 18$: $\beta = 1 + \rho = 1 + 2\cos\frac{\pi}{9}$,
$M_\beta(X) = X^3 - 3X^2 + 1$.

Pour $n = 11$, $n = 13$, $n = 15$ de tels Pisot cyclotomiques unitaires existent (D. Boyd)

Le groupe des beta-entiers

Cas où β est un nombre de Pisot quadratique unitaire

β est la racine > 1 de $X^2 - aX - 1$, $a \geq 1$

- $d_\beta(1) = a1$
- tout nombre > 0 de $\mathbb{Z}[\beta]$ a un β-développement fini
- soit $\mathbb{A} = \{L, S\}$. La substitution σ_β est définie par

$$\sigma_\beta : \begin{cases} L & \mapsto \quad L^a S \\ S & \mapsto \quad L. \end{cases}$$

Addition

Proposition 5 . *Soit β la racine > 1 de $X^2 - aX - 1$, avec $a \geq 1$. Alors*

$$\mathbb{Z}_\beta + \mathbb{Z}_\beta \subset \mathbb{Z}_\beta + \{0, \pm(1 - \frac{1}{\beta})\} \subset \frac{\mathbb{Z}_\beta}{\beta^2}$$

Si x, $y \in \mathbb{Z}_\beta$ alors il existe $z \in \mathbb{Z}_\beta$ et $\eta \in \{0, \pm 1\}$ uniques tels que

$$x + y = z + \eta(1 - \frac{1}{\beta})$$

On pose

$$x \oplus y = z$$

On a

$$b_m \oplus b_n = b_{m+n}$$

PROPOSITION **6** . *$\mathbb{Z}_\beta$ muni de l'addition $\oplus$ est un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}$.*

Multiplication

Proposition 7 . *Soit β la racine >1 de $X^2 - aX - 1$, avec $a \geq 1$. Alors*

$$\mathbb{Z}_\beta \times \mathbb{Z}_\beta \subset \frac{\mathbb{Z}_\beta}{\beta^2}$$

Si on veut définir une opération de multiplication $\otimes$ dans $\mathbb{Z}_\beta$ pour obtenir un isomorphisme d'anneau entre $\mathbb{Z}_\beta$ et $\mathbb{Z}$, celà conduit à $\beta \otimes \beta \neq \beta^2$. On peut néanmoins définir une opération commutative non associative ainsi

$$\begin{array}{rcl} \otimes : \mathbb{Z}_\beta \times \mathbb{Z}_\beta & \to & \mathbb{Z}_\beta \\ (b_m, b_n) & \mapsto & b_{mn - a\rho_S(m)\rho_S(n)} \end{array}$$

où $\rho_S(m)$ est le nombre de S dans le préfixe de longueur m du mot infini $\sigma_\beta(L)$.

Proposition 8 .

1) $b_m b_n - b_m \otimes b_n \in \{0, \pm 1, \ldots, \pm a\}(1 - \frac{1}{\beta})$
2) Si $b_m b_n \in \mathbb{Z}_\beta$ *alors* $b_m \otimes b_n = b_m b_n$.

Remarque Pour τ, $x \oplus y$ (resp. $x \otimes y$) est le τ-entier le plus proche de $x + y$ (resp. xy).

β est la racine > 1 de $X^2 - aX + 1$, $a \geq 3$

• $d_\beta(1) = (a-1)(a-2)^\omega$

• tout nombre > 0 de $\mathbb{Z}[\beta]$ a un β-développement ultimement périodique, qui est fini pour ceux de $\mathbb{N}[\beta]$

• la substitution σ_β est

$$\sigma_\beta : \begin{cases} L & \mapsto & L^{a-1}S \\ S & \mapsto & L^{a-2}S. \end{cases}$$

Addition

PROPOSITION **9** . *Soit β la racine > 1 de $X^2 - aX + 1$, avec $a \geq 3$. Alors*

$$\mathbb{Z}_\beta^+ + \mathbb{Z}_\beta^+ \subset \frac{\mathbb{Z}_\beta^+}{\beta}$$

$$\mathbb{Z}_\beta^+ - Zb^+ \subset \mathbb{Z}_\beta + \{0, \pm\frac{1}{\beta}\}$$

$$\mathbb{Z}_\beta + \mathbb{Z}_\beta \subset \mathbb{Z}_\beta + \{0, \pm\frac{1}{\beta}\}$$

Si x, $y \in \mathbb{Z}_\beta$ alors il existe $z \in \mathbb{Z}_\beta$ et $\eta \in \{0, \pm 1\}$ uniques tels que

$$x + y = z + \frac{\eta}{\beta}$$

On pose

$$x \oplus y = z$$

On a

$$b_m \oplus b_n = b_{m+n}$$

PROPOSITION **10** . *$\mathbb{Z}_\beta$ muni de l'addition $\oplus$ est un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}$.*

Multiplication

PROPOSITION **11** . *Soit β la racine > 1 de $X^2 - aX + 1$, avec $a \geq 3$. Alors*

$$\mathbb{Z}_\beta \times \mathbb{Z}_\beta \subset \frac{\mathbb{Z}_\beta}{\beta}$$

On définit une opération commutative non associative ainsi

$$\begin{array}{rcl} \otimes : \mathbb{Z}_\beta \times \mathbb{Z}_\beta & \rightarrow & \mathbb{Z}_\beta \\ (b_m, b_n) & \mapsto & b_{mn - \rho_S(m)\rho_S(n)} \end{array}$$

PROPOSITION **12** .

1) $b_m b_n - b_m \otimes b_n \in \{0, 1, \ldots, a-1\} \frac{\mathrm{sgn}(b_m b_n)}{\beta}$

2) Si $b_m b_n \in \mathbb{Z}_\beta$ *alors* $b_m \otimes b_n = b_m b_n$.

Cas où β est un nombre de Pisot cyclotomique cubique racine > 1 de $X^3 - 2X^2 - X + 1$

- $d_\beta(1) = 2(01)^\omega$
- la substitution est définie sur $\mathbb{A} = \{L, S, M\}$ par

$$\sigma_\beta : \begin{cases} L & \mapsto & LLS \\ S & \mapsto & M \\ M & \mapsto & LS. \end{cases}$$

Addition

Proposition 13 . *Soit*

$$\begin{aligned} F &= \pm\{0,\ -\beta^{-1},\ -2\beta^{-1},\ -3\beta^{-1},\ \beta-3,\ 2(\beta-3), \\ &\quad \beta^2-\beta-4,\ \beta^2-3\beta+2,\ 2\beta^2-5\beta+1, \\ &\quad 3\beta^2-7\beta,\ 2\beta^2-3\beta-5,\ \beta^2-4\beta+5\} \end{aligned}$$

Alors

$$\mathbb{Z}_\beta + \mathbb{Z}_\beta \subset \mathbb{Z}_\beta + F$$

Si x, $y \in \mathbb{Z}_\beta$ alors il existe $z \in \mathbb{Z}_\beta$ et $f \in F$ uniques tels que

$$x + y = z + f$$

On pose

$$x \oplus y = z$$

On a

$$b_m \oplus b_n = b_{m+n}$$

PROPOSITION **14** . *$\mathbb{Z}_\beta$ muni de l'addition $\oplus$ est un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}$.*

Multiplication

Il est possible de définir une multiplication

$$b_m \otimes b_n = b_{mn-\Delta}$$

avec

$$\begin{aligned} \Delta &= 26\rho_M(m)\rho_M(n) + 9\rho_M(m)(\rho_S(n) - 2\rho_M(n)) \\ &+ 9\rho_M(n)(\rho_S(m) - 2\rho_M(m)) \\ &+ 2(\rho_S(m) - 2\rho_m(m))(\rho_S(n) - 2\rho_S(n)) \end{aligned}$$

Conséquence

Si β est un Pisot quadratique unitaire, ou bien la racine de $X^3 - 2X^2 - X + 1$, alors si (e_i) est une base de $\mathbb{R}^d$

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{d} \mathbb{Z}_\beta e_i$$

est un ensemble de Meyer et un réseau avec la loi $\oplus$.

Application physique La chaîne de Fibonacci admet un étiquetage discret

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \{x \in \mathbb{Z}[\tau] \mid x' \in [0,1)\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z}_\tau \mid x' \in [0,1)\} \\ &= \{\dots, -\tau^3, -\tau, 0, \tau^2, \tau^3 + 1, \tau^4, \dots\} \\ &= \{\dots, b_{-5}, b_{-2}, b_0, b_3, b_6, b_8, \dots\} \end{aligned}$$

Mots sturmiens

Un mot infini est sturmien si le nombre de facteurs de longueur n est égal à $n+1$. Défini sur un alphabet à deux lettres $\mathbb{A} = \{L, S\}$.

Un mot infini est sturmien si, quelque soient deux facteurs de longueur n, la différence entre le nombre de S est bornée par 1.

$$\sigma_\tau : \begin{cases} L & \mapsto & LS \\ S & \mapsto & L \end{cases}$$

$$\widetilde{\sigma_\tau} : \begin{cases} L & \mapsto & SL \\ S & \mapsto & L \end{cases}$$

$$E : \begin{cases} L & \mapsto & S \\ S & \mapsto & L. \end{cases}$$

Proposition 15 . *Si* β *est la racine* > 1 *de* $X^2 - aX - 1$, *avec* $a \geq 1$, *alors* $\sigma_\beta = \sigma_\tau (E\sigma_\tau)^{a-1}$. *Si* β *est la racine* > 1 *de* $X^2 - aX + 1$, *avec* $a \geq 3$, *alors* $\sigma_\beta = \widetilde{\sigma_\tau}\sigma_\tau (E\sigma_\tau)^{a-3}$.

Théorème 5 . *Si* β *est un Pisot quadratique unitaire, le mot infini engendré par* σ_β *est sturmien.*

Beta-grilles

Si β est un Pisot cyclotomique avec symétrie n, et $\zeta = \exp(2i\pi/n)$, $\mathbb{Z}[\beta] + \mathbb{Z}[\beta]\zeta \equiv \mathbb{Z}[\zeta]$ est un anneau invariant par rotation d'ordre n.

Beta-grille

$$\Gamma_q = \mathbb{Z}_\beta + \mathbb{Z}_\beta \zeta^q$$

pour $1 \leq q \leq n-1$.

Soient

$$\Lambda_q = \bigcup_{j=0}^{n-1} \Gamma_q \zeta^j$$

$$\mathbb{Z}_\beta[\zeta] = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{Z}_\beta \zeta^j$$

Proposition 16 . *$\mathbb{Z}_\beta[\zeta]$ et Λ_q pour $1 \leq q \leq n-1$ sont des ensembles de Meyer.*

Exemple de τ-grille

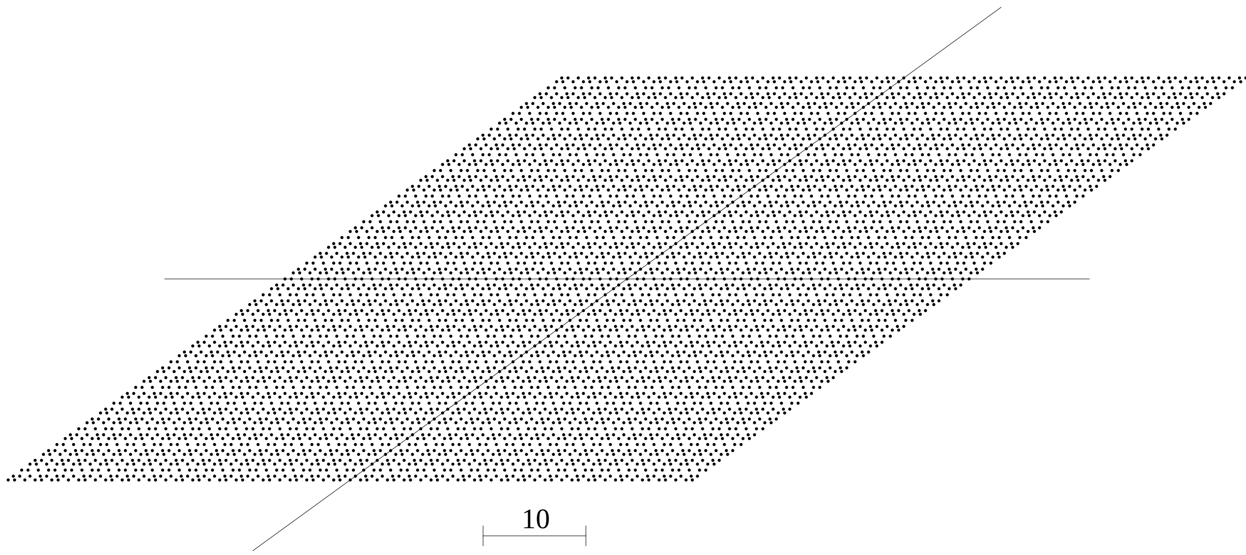


Figure 2: τ-grille Γ_1

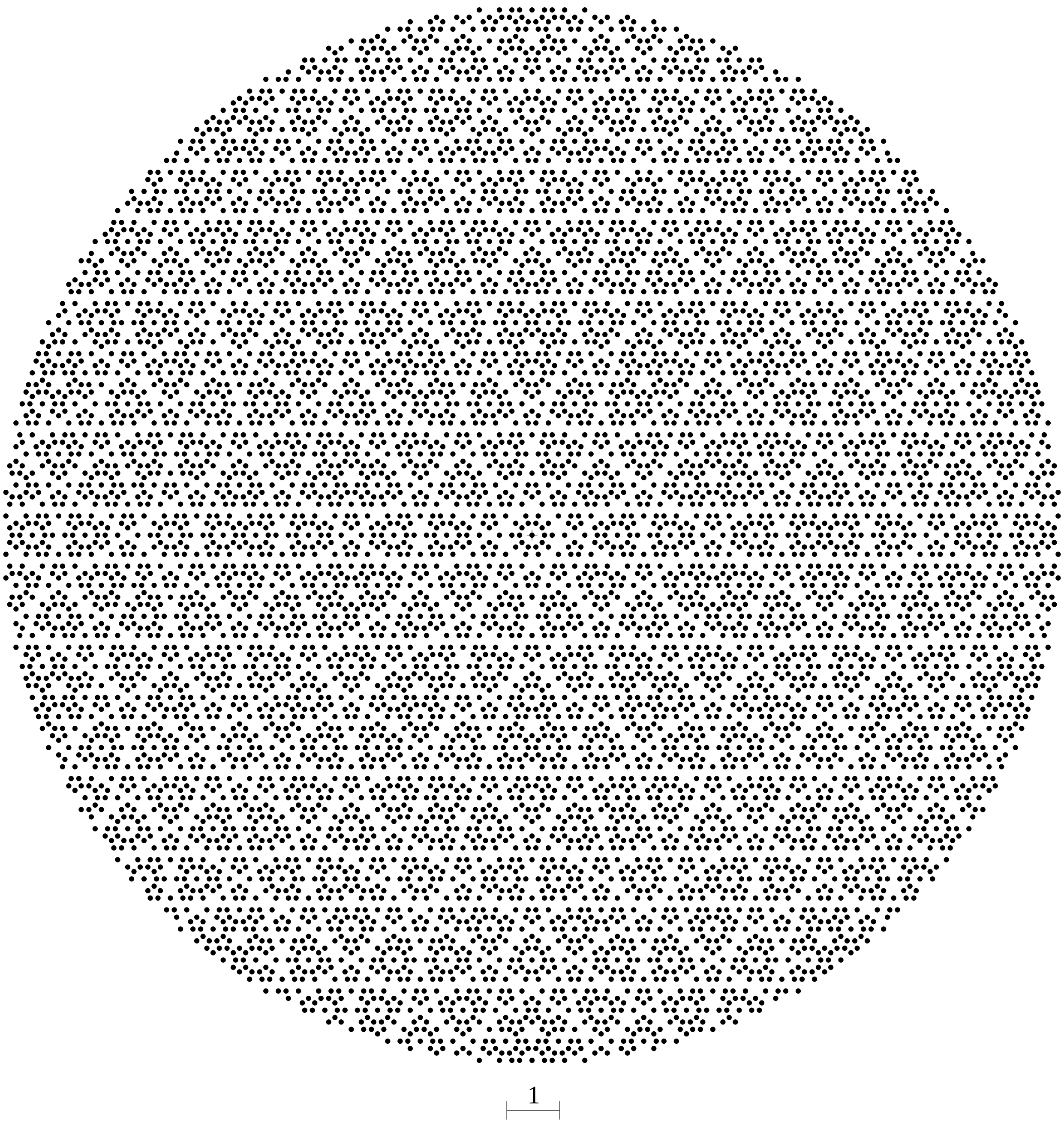


Figure 3: Quasi-anneau cyclotomique d'ordre 5 $\mathbb{Z}_\tau[\exp(i\pi/5)]$

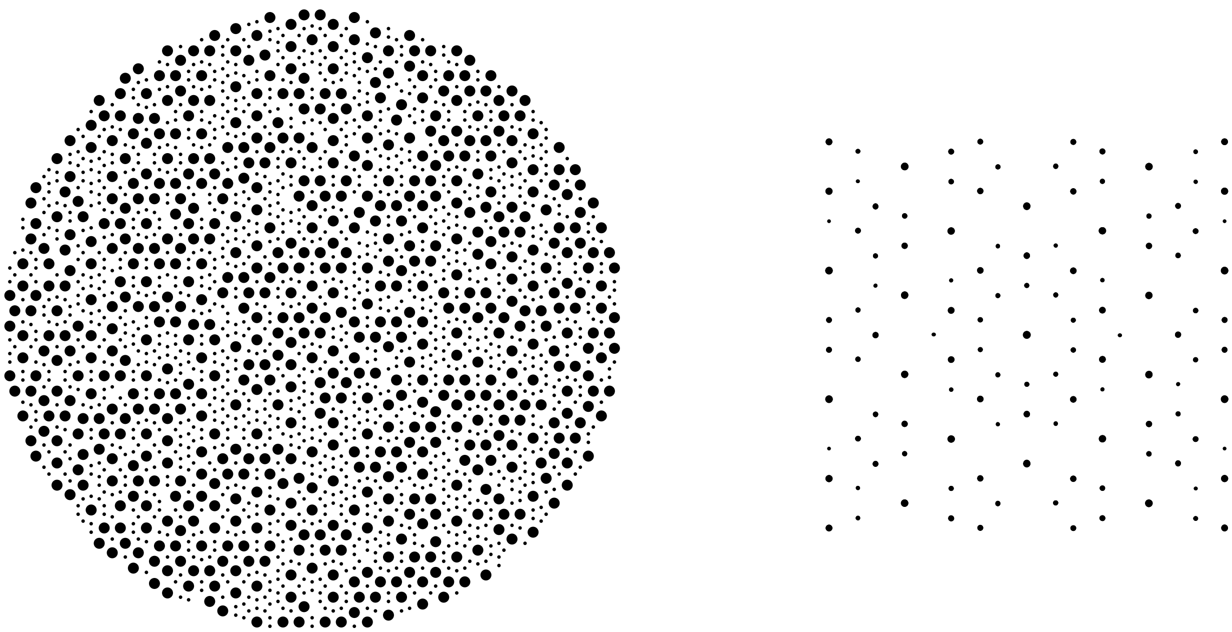

(a) (b)

Figure 4: Modèle de gaz sur la τ-grille. (a) Structure quasi-cristalline. (b) Motif de diffraction correspondant.

References

[1] Č. Burdík, Ch. Frougny, J.P. Gazeau and R. Krejcar, Beta-integers as natural counting systems for quasicrystals. *J. of Physics A: Math. Gen.* **31** (1998), 6449–6472.

[2] J.P. Gazeau, Pisot-cyclotomic integers for quasilattices, in *The Mathematics of Long-Range Aperiodic Order*, (R. Moody ed.), Kluwer, 1997.

[3] J.C. Lagarias, Meyer's Concept of Quasicrystal and Quasiregular Sets. *Comm. Math. Phys.* **179** (1996), 365–376.

[4] Y. Meyer, *Nombres de Pisot, nombres de Salem et analyse harmonique*, Lecture Notes in Math. **117**, Springer-Verlag, 1970.

[5] Y. Meyer, *Algebraic Numbers and Harmonic Analysis*, North-Holland, 1972.

[6] Y. Meyer, Quasicrystals, Diophantine approximation and algebraic numbers, in

Beyond Quasicrystals, (F. Axel and D. Gratias, eds), Les éditions de physique, Springer-Verlag, 1995.

[7] R. Moody, Meyer sets and their duals, in *The Mathematics of Long-Range Aperiodic Order*, (R. Moody ed.), Kluwer, 1997.