Ecole de Printemps
d'Informatique Théorique
Prapoutel-Les-Sept-Laux
26 – 30 mars 2001

# Arithmétique des ordinateurs

## Systèmes de numération

Christiane Frougny

LIAFA et Université Paris 8
http://www.liafa.jussieu.fr/~cf/

# Système de numération

Système de numération de position

Base $\beta$: nombre entier, réel ou complexe de module $> 1$

Chiffres: entiers, réels ou complexes

# Généralités

## Mots

$A$ alphabet de lettres (ou de chiffres)

Mot fini = suite finie de lettres de $A$
$u = a_1 \cdots a_n$ avec $a_i$ dans $A$.
L'ensemble des mots finis est noté $A^*$.
Le mot vide est noté $\varepsilon$.
$u$ et $v$ dans $A^*$, $uv$ est la concaténation de $u$ et $v$.

Mot infini = suite infinie de lettres de $A$
$w = a_1 a_2 \cdots$ avec $a_i$ dans $A$.
L'ensemble des mots infinis est noté $A^{\mathbb{N}}$.
Si $u$ dans $A^*$ et $w$ dans $A^{\mathbb{N}}$, alors $uw \in A^{\mathbb{N}}$.

Mot ultimement périodique $w = uvvv \cdots = uv^\omega$
avec $u$ et $v$ dans $A^*$.

Exemples: $A = \{0, \dots, 9\}$
$\pi = 3.141592653 \cdots$
$3/7 = 0.428571428571 \cdots = 0.(428571)^\omega$.

# Représentation des nombres

Base $\beta > 1$ entier

Alphabet canonique $A = \{0, \ldots, \beta - 1\}$

$\beta$-représentation de $N$ entier $\geq 0$: mot $d_k \cdots d_0$ de $A^*$ tel que

$$N = \sum_{i=0}^{k} d_i \beta^i$$

Unique si $d_k \neq 0$ (dite canonique) et notée $\langle N \rangle_\beta$

$\beta$-représentation de $x$ dans $[0, 1]$: mot infini $(x_i)_{i \geq 1}$ de $A^{\mathbb{N}}$ tel que

$$x = \sum_{i \geq 1} x_i \beta^{-i}$$

Unique si ne se termine pas par $(\beta - 1)^\omega$ (dite canonique).

Algorithme glouton

$r_0 \leftarrow x$

*pour* $i \geq 1$

$\quad x_i \leftarrow \lfloor \beta r_{i-1} \rfloor; \; r_i \leftarrow \{\beta r_{i-1}\}$

## Exemples

$\beta = 2$ et $A = \{0, 1\}$

- $1A^*$
  Les représentations canoniques des entiers
- $A^\omega = A^\mathbb{N}$
  Tous les réels de $[0, 1]$
- $1A^\omega$
  L'intervalle $]0, 1]$
- $A^*1^\omega$
  Nombre fini de 0 = écritures interdites (impropres) des réels
- $(1^*0)^\omega$
  Infinité de 0 = écritures canoniques des réels

# Automate fini

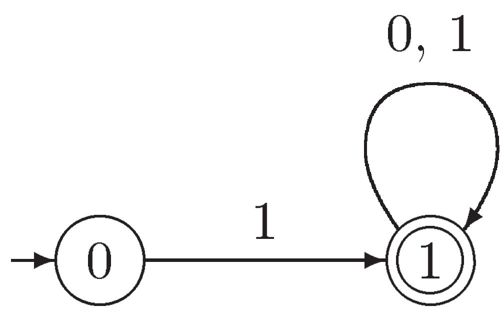
$A$ alphabet

Automate fini $= \mathcal{A} = (Q, A, E, I, F)$
$Q$ fini $=$ états
$E \subset Q \times A \times Q =$ transitions (flèches) étiquetées par $A$
$I =$ états initiaux
$F =$ états finaux

$H \subseteq A^*$ est reconnu par $\mathcal{A}$ si c'est l'ensemble des étiquettes des chemins finis commençant dans un état de $I$ et finissant dans un état de $F$.

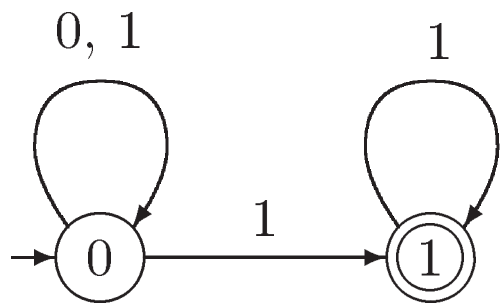
$X \subseteq A^{\mathbb{N}}$ est reconnu par $\mathcal{A}$ si c'est l'ensemble des étiquettes des chemins infinis commençant dans un état de $I$ et passant infiniment souvent dans $F$ (comportement à la Büchi).

Exemple 1.




$A = \{0, 1\}$
Ens. des mots finis reconnu $H_1 = 1A^* =$ rep. canoniques des entiers
Ens des mots infinis reconnu $X_1 = 1A^\omega =$ l'intervalle $]0, 1]$

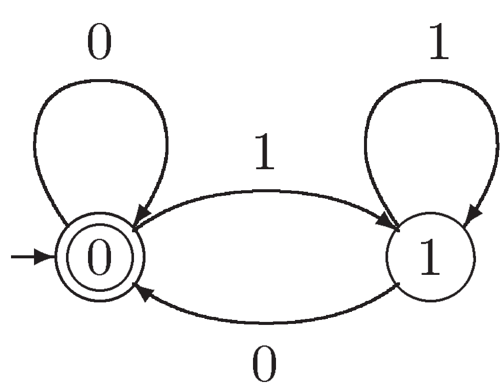
Exemple 2.




$H_3 = A^*11^*$

$X_3 = A^*1^\omega$ = écritures impropres des réels

Exemple 3.




$H_4 = (1^*0)^*$

$X_4 = (1^*0)^\omega$ = écritures canoniques des réels

# Expressions rationnelles

Construites avec

- Constantes: lettres
- Opérations:
  - union
  - produit
  - $*$ itération finie:
    $X^* = \{u_1 \cdots u_n \mid n \geq 0,\ u_i \in X\}$
  - $\omega$ itération infinie:
    $X^\omega = \{u_1 u_2 \cdots \mid n \geq 0,\ u_i \in X\}$

## Propriétés

Sur les mots finis il y a équivalence entre automates finis et expressions rationnelles: théorème de Kleene.

Sur les mots infinis, il y a équivalence entre automates finis de Büchi et expressions rationnelles.

Les ensembles reconnus par automate fini sont clos par

- opérations rationnelles
- opérations booléennes
- projections et substitutions
- morphismes inverses

## Déterminisme

Un automate fini est déterministe si

- un seul état initial
- $p \xrightarrow{a} q$ et $p \xrightarrow{a} q'$ implique $q = q'$.

Pour les mots finis, on peut toujours choisir un automate déterministe.

Pas vrai pour les mots infinis reconnus par automate de Büchi.

# Représentation des entiers

## Fonctions de mots finis réalisables par automate fini

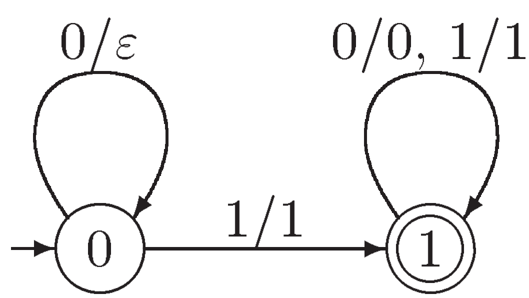
$A$ alphabet d'entrée, $B$ alphabet de sortie.

Automate fini à 2 bandes = transducteur = $\mathcal{A} = (Q, A^* \times B^*, E, I, F)$ avec $E$ et $Q$ finis.

Relation de mots finis $R \subseteq A^* \times B^*$ est réalisée par $\mathcal{A}$ si $R$ est l'ensemble des étiquettes des chemins finis commençant dans un état de $I$ et se terminant dans $F$

Fonction $\varphi : A^* \longrightarrow B^*$ est réalisable par un automate fini si son graphe est réalisé par automate fini.

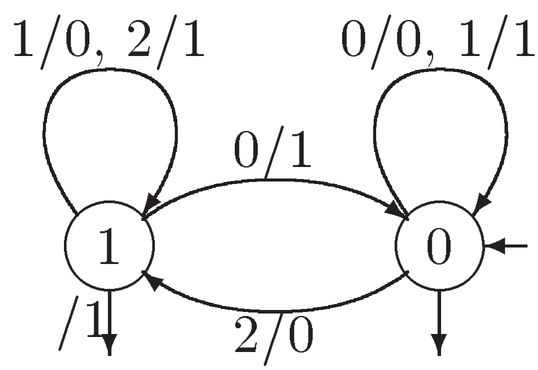
Exemple 4. L'automate qui efface les 0 en tête des mots



# Addition des entiers

Addition des entiers en base 2 (de droite à gauche)

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & 1 & 1 & 1 & 1 \\
+ & & 0 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
 & & 1 & 2 & 2 & 2 \\
\hline\hline
 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{array}
$$



# Séquentialité

Un automate fini séquentiel (gauche) est un automate fini à deux bandes $\mathcal{A} = (Q, A \times B^*, E, i, Q)$ tel que

- la projection sur la bande d'entrée est un automate fini déterministe
- tout état est terminal.

Un automate fini sous-séquentiel (gauche) est un automate fini à deux bandes $\mathcal{A} = (Q, A \times B^*, E, i, \omega)$ tel que

- la projection sur la bande d'entrée est un automate fini déterministe
- il existe une fonction terminale

$$\omega : Q \longrightarrow B^*$$

Un couple $(f, g) \in A^* \times B^*$ est reconnu par $\mathcal{A}$ s'il existe un chemin

$$i \xrightarrow{f/g'} q$$

tel que $g = g'g''$ et $\omega(q) = g''$

Même notion droite: l'addition en base 2 est sous-séquentielle droite.

## Conversion de chiffres

$C$ alphabet de chiffres (positifs ou négatifs) contenant $A = \{0, \ldots, \beta - 1\}$

Valeur numérique $\pi_\beta : C^* \to \mathbb{Z}$ telle que $\pi_\beta(c_k \cdots c_0) = \sum_{i=0}^{k} c_i \beta^i$.

Conversion sur $C$

$$\nu_\beta : C^* \to A^*$$

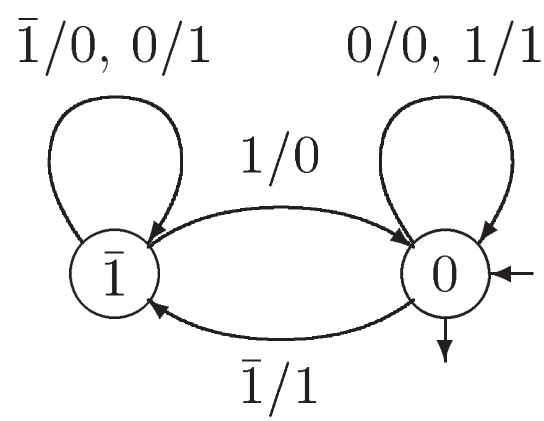
telle que $\pi_\beta(c_k \cdots c_0) = \pi_\beta(a_n \cdots a_0)$.

Addition = conversion sur $\{0, \ldots, 2(\beta - 1)\}$
Soustraction = conversion sur $\{-(\beta - 1), \ldots, (\beta - 1)\}$
Multiplication par un entier $m > 0$ fixé = conversion sur $\{0, \ldots, m(\beta - 1)\}$

**Proposition 1** . *La conversion sur $C^*$ est sous-séquentielle droite pour tout $C$.*

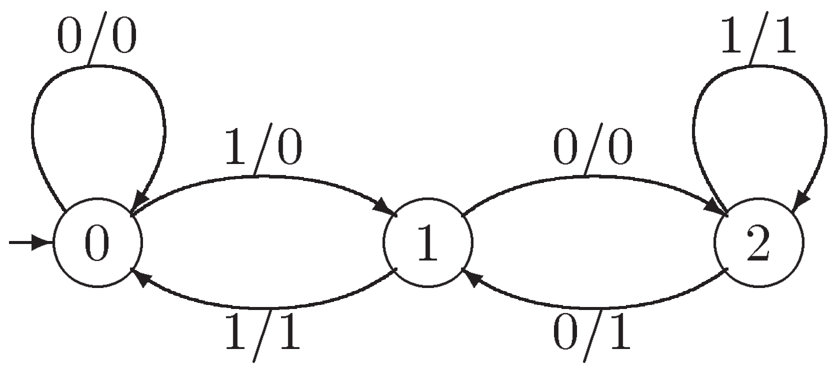
$K = \max\{|c - a| \mid c \in C, a \in A\}$, $\gamma = K/(\beta - 1)$.
$Q = \{s \in \mathbb{Z} \mid |s| < \gamma\}$
Etat initial 0
$E = \{s \overset{c/a}{\to} s' \mid s + c = \beta s' + a\}$
$\omega(s) = \langle s \rangle_\beta$ pour $s \in Q$ tel que $\pi_\beta(s) \geq 0$.

Exemple 5. Soustraction en base 2



**Proposition 2** . *La division par un entier positif fixé est sous-séquentielle gauche en base $\beta$.*

Exemple 6. Division par 3 en base 2



Remarque **1** . *L'addition en base $\beta$ sur $\{0, \ldots, \beta-1\}$ n'est pas séquentielle.*

En base 2 sur $\{0, 1\}$

$$01^n0^\omega + 0^n10^\omega = 10^\omega$$

$$01^n0^\omega + 0^\omega = 01^n0^\omega$$

Proposition **3** . *En base $\beta$ la multiplication n'est pas calculable par automate fini.*

Base 2, on montre que la fonction $\psi$ qui envoie $\langle N\rangle_2$ sur $\langle N^2\rangle_2$ n'est pas calculable par automate fini.

On a $\langle 2^n - 1\rangle_2 = 1^n$, et
$\psi(1^n) = \langle 2^{2n} - 2^{n+1} + 1\rangle_2 = 1^{n-1}0^n1.$

Proposition **4** . *La composée de fonctions séquentielles est séquentielle.*

## Complément à la base

Pour représenter les entiers négatifs.

Sur $n$ positions

Si $0 \leq N \leq \frac{\beta^n}{2} - 1$, $\langle N \rangle_{\beta^c} = \langle N \rangle_\beta$

Si $-\frac{\beta^n}{2} \leq N < 0$, $\langle N \rangle_{\beta^c} = d_{n-1} \cdots d_0 \in A^*$ tel que $N = -\beta^n + d_{n-1}\beta^{n-1} + \cdots + d_0$.

Signe de $\langle N \rangle_{\beta^c} = d_{n-1} \cdots d_0$ est $\geq 0$ ssi $d_{n-1} < \frac{\beta}{2}$.

Fait. La conversion entre la représentation d'un entier sur un alphabet quelconque et sa représentation en complément à la base est sous-séquentielle droite.

# Représentations redondantes

Base $\beta$, chiffres $B = \{m, \dots, M\}$, $m < M$ dans $\mathbb{Z}$, $n$ positions.

$I = [m\frac{\beta^n - 1}{\beta - 1}, M\frac{\beta^n - 1}{\beta - 1}]$.

Proposition **5** . *Si $|B| < \beta$, il y a des entiers de $I$ non représentables en base $\beta$ sur $n$ positions. Si $|B| = \beta$ tout entier de $I$ a une $\beta$-représentation sur $n$ positions, qui est unique.*
*Si $|B| > \beta$, tout entier de $I$ a une $\beta$-représentation sur $n$ positions, qui n'est pas nécéssairement unique.*

Quand $|B| > \beta$, il y a redondance.

# Représentations d'Avizienis

Base $\beta$, chiffres dans $B = \{\bar{a}, \ldots, a\}$ pour représenter les entiers négatifs.

Redondance: $|B| \geq \beta + 1$ *i.e.* $2a \geq \beta$.

Signe: $N = \pi_\beta(d_k \cdots d_0)$ avec $d_k \neq 0$ est du signe de $d_k$ ssi $a \leq \beta - 1$.

On prend $\beta/2 < a \leq \beta - 1$.

Exemple 7. $\beta = 10$, $a = 6$, $B = \{\bar{6}, \ldots, 6\}$

Redondance : $46 =_{10} 5\bar{4}$

Addition sans propagation de retenue :

$$\begin{array}{cccccc}
 & 0 & 2 & 5 & \bar{4} & 6 \\
+ & 0 & 5 & 0 & 1 & 6 \\
\hline
 & 0 & 7 & 5 & \bar{3} & 12 \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 1 & \\
 & & \bar{3} & 5 & \bar{3} & 2 \\
\hline\hline
 & 1 & \bar{3} & 5 & \bar{2} & 2
\end{array}$$

Règles de réécriture:

$$
12 \rightarrow \begin{array}{c|c} 1 & \\ & 2 \end{array} \qquad
11 \rightarrow \begin{array}{c|c} 1 & \\ & 1 \end{array}
$$

$$
10 \rightarrow \begin{array}{c|c} 1 & \\ & 0 \end{array} \qquad
9 \rightarrow \begin{array}{c|c} 1 & \\ & \bar{1} \end{array} \qquad
8 \rightarrow \begin{array}{c|c} 1 & \\ & \bar{2} \end{array}
$$

$$
7 \rightarrow \begin{array}{c|c} 1 & \\ & \bar{3} \end{array} \qquad
6 \rightarrow \begin{array}{c|c} 1 & \\ & \bar{4} \end{array}
$$

Même chose pour les chiffres négatifs.

Marche pour $\beta \geq 3$ et $\beta/2 < a \leq \beta - 1$. On fait les réécritures entre $2a$ et $a$ (resp. $-2a$ et $-a$).

Addition en temps constant en parallèle.

Pour $\beta = 2$, $B = \{\bar{1}, 0, 1\}$ ([Chow and Robertson]).

Règles de réécriture:

$$2 \quad \rightarrow \quad \begin{array}{c|c} 1 & \\ & 0 \end{array}$$

Pour le chiffre 1 on utilise une fenêtre

$$1 \quad \rightarrow \quad \begin{array}{c|c} 1 & \\ & \bar{1} \end{array} \qquad \text{si le chiffre à droite de 1 est} \geq 0$$

sinon rien.

Idem pour les chiffres négatifs.

$$\begin{array}{cccccc}
 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
+ & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\
 & 0 & \bar{1} & 0 & 0 & 0 \\
\hline\hline
 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{array}$$

Addition en temps constant en parallèle.

Donne un algorithme similaire pour l'addition en base $\beta$ paire avec $a = \beta/2$.

## Représentations à retenue conservée ("Carry-Save")

Représentations redondantes en base 2 avec chiffres dans $B = \{0, 1, 2\}$

Propriété L'addition en base 2 d'une représentation sur $B$ et d'une représentation sur A= $\{0, 1\}$ avec résultat sur $B$ peut se faire en temps constant en parallèle.

Utilisé pour les additions internes dans les multiplications.

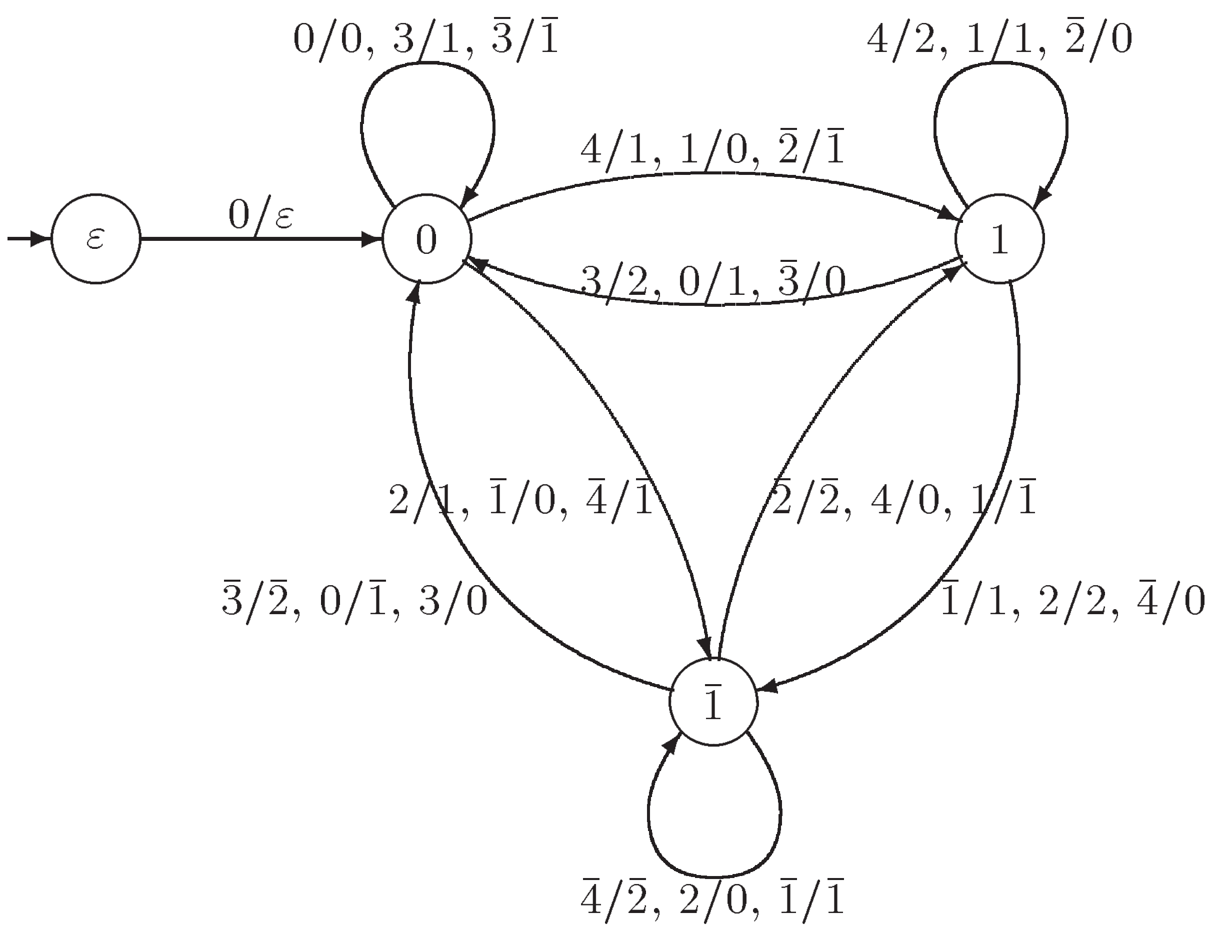
$$
\begin{array}{cccccc}
 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
+ & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1
\end{array}
$$

## Automates finis en-ligne

Automate fini en-ligne = automate (sous-) séquentiel particulier:

- partie transitoire: pendant un temps $\delta$ (le délai) on lit sans rien sortir
- partie synchrone: ensuite pour chaque lettre lue on sort une lettre

Automate en-ligne à délai 1 réalisant l'addition en base $b = 3$ sur $B = \{\bar{2}, \ldots, 2\}$

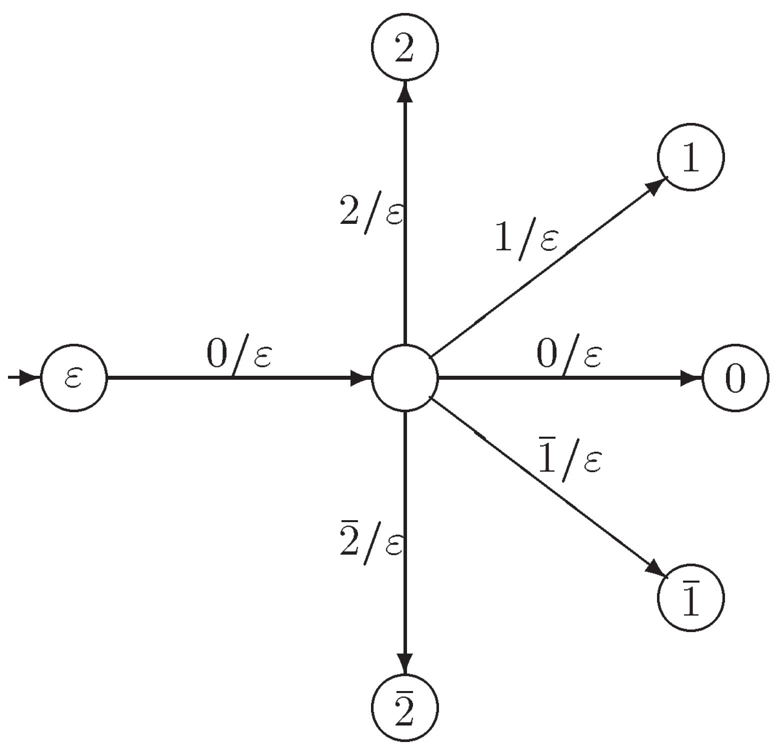



$$p \xrightarrow{x/y} q \Leftrightarrow 3p + x = 3y + q$$

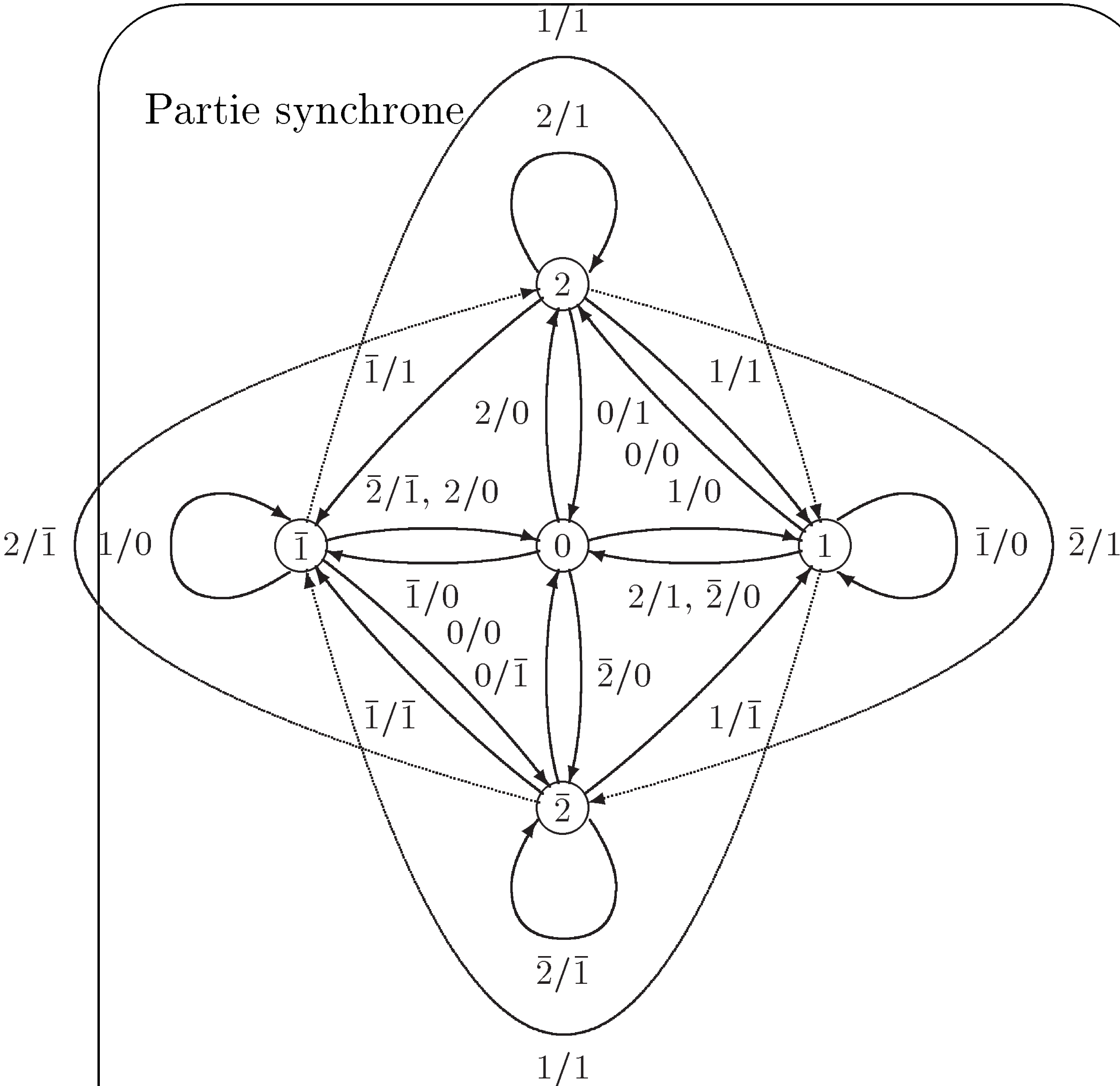
$$\omega(q) = q$$

Automate en-ligne à délai 2 réalisant l'addition en base $b = 2$ sur $B = \{\bar{1}, 0, 1\}$

Partie transitoire



## Partie synchrone




$$p \xrightarrow{x/y} q \Leftrightarrow 2p + x = 4y + q$$

$$\omega(q) = q_1 q_2, \in \{0, 1\} \text{ avec } \pi_2(q_1 q_2) = q$$

# Représentations canoniques de Booth

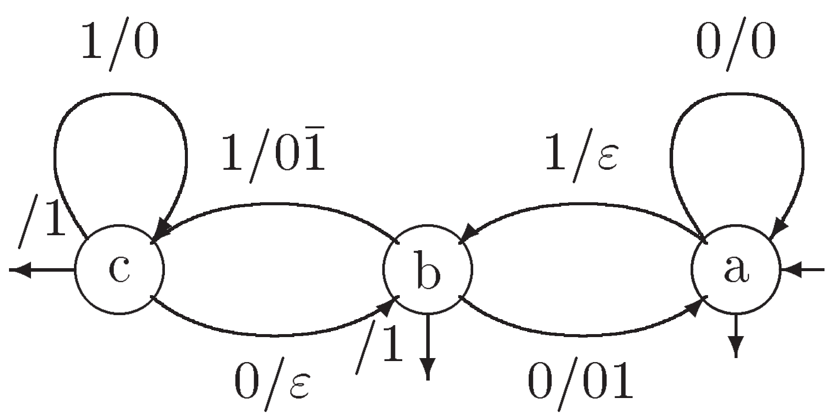
Base 2, $A = \{0, 1\}$, $B = \{\bar{1}, 0, 1\}$.

Trouver une représentation sur $B$ ayant un nombre minimum de chiffres non nuls.

## Application à la multiplication

Recodage de droite à gauche: tout facteur de la forme $01^n$, avec $n \geq 2$, est transformé en $10^{n-1}\bar{1}$, et les autres facteurs sont inchangés.

**Proposition 6** . *Le codage canonique de Booth est une fonction sous-séquentielle droite de $A^*$ dans $B^*$.*



## Automates à latence bornée

Une fonction est à différence bornée si la différence de longueur entre les mots d'entrée et de sortie est bornée.

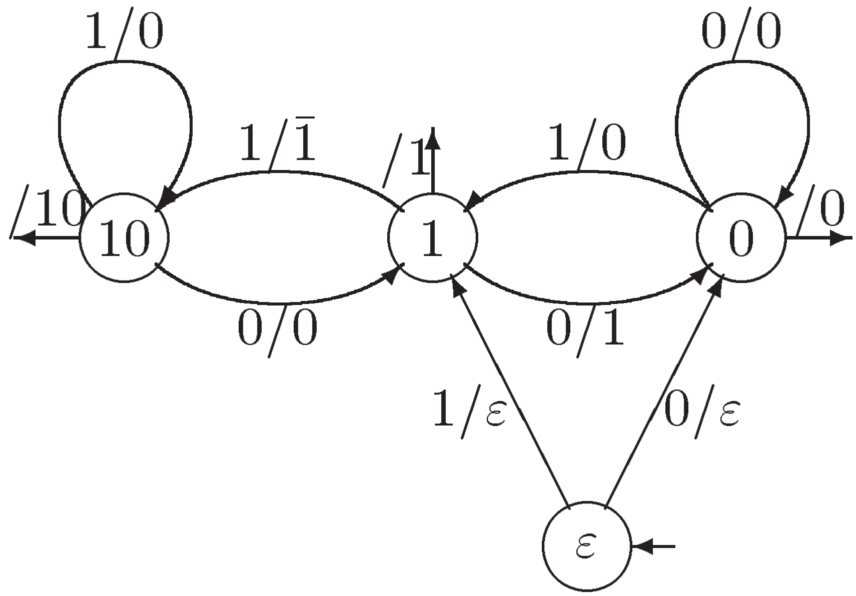
Un automate est à latence bornée si toutes ses boucles ont des étiquettes dont l'entrée et la sortie ont même longueur.

THÉORÈME **1** . [Eilenberg - Schű̈tzenberger] *Une fonction à différence bornée réalisable par automate fini est réalisable par un automate à latence bornée.*

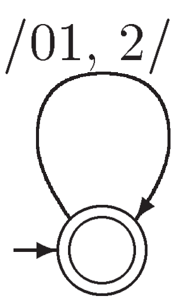
Resynchronisation déterministe

PROPOSITION **7** . [Frougny - Sakarovitch] *Soit* $\varphi$ *une fonction réalisée par un automate à latence bornée* $\mathcal{A}$*. Si de plus* $\mathcal{A}$ *est (sous-) séquentiel, alors on peut construire un automate en-ligne* $\mathcal{B}$ *qui réalise* $\varphi$*.*

Exemple 8. Automate fini en-ligne (droit) à délai 1 réalisant le codage de Booth.




Exemple 9. L'automate qui fait la conversion base 4 $\rightarrow$ base 2 est séquentiel gauche mais pas à latence bornée.



# Représentation des réels

## Fonctions de mots infinis réalisables par automate fini

$A$ alphabet d'entrée, $B$ alphabet de sortie.

Automate fini à 2 bandes = transducteur = $\mathcal{A} = (Q, A^* \times B^*, E, I, F)$ avec $E$ et $Q$ finis.

Relation de mots infinis $R \subseteq A^{\mathbb{N}} \times B^{\mathbb{N}}$ est réalisée par $\mathcal{A}$ si $R$ est l'ensemble des étiquettes des chemins infinis commençant dans un état de $I$ et passant infiniment souvent dans $F$ (comportement à la Büchi).

Fonction $\varphi : A^{\mathbb{N}} \longrightarrow B^{\mathbb{N}}$ est réalisable par un automate fini si son graphe est réalisé par automate fini.

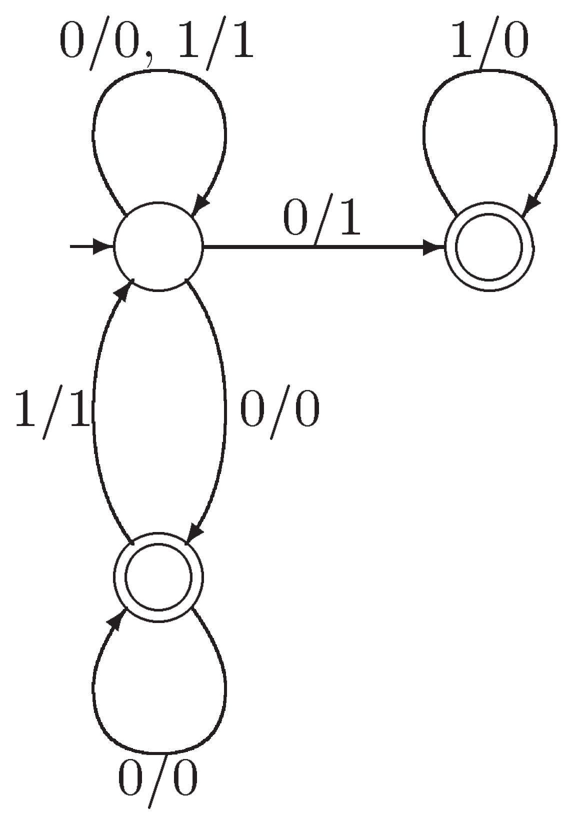
N.B. Pas de boucles terminales d'étiquette $u/\varepsilon$ ou $\varepsilon/u$

Redondance : pour $0 \leq a \leq \beta - 2$

$$a(\beta-1)^\omega =_\beta (a+1)0^\omega$$

**Proposition 8 .** *La fonction de normalisation $\nu : A^{\mathbb{N}} \longrightarrow A^{\mathbb{N}}$ qui transforme les développements impropres se terminant par $(\beta-1)^\omega$ en développements se terminant par $0^\omega$ est calculable par automate fini.*

Base $\beta = 2$ : $u01^\omega \to u10^\omega$



## Séquentialité

$\varphi : A^{\mathbb{N}} \longrightarrow B^{\mathbb{N}}$ est séquentielle si elle est réalisée par un automate fini $\mathcal{A} = (Q, A \times B^*, E, i, Q)$ déterministe sur la bande d'entrée.

La division par un entier positif fixé des réels représentés en base $\beta$ est séquentielle.

# Continuité

Distance sur $A^{\mathbb{N}}$

$$\rho(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{si } u = v \\ 2^{-\min\{k \mid u_k \neq v_k\}} & \text{sinon} \end{cases}$$

$\rho$ est une distance ultramétrique, $A^{\mathbb{N}}$ est compact.

Proposition **9** . *Toute fonction séquentielle $\varphi : A^{\mathbb{N}} \longrightarrow B^{\mathbb{N}}$ est uniformément continue.*

Comme $F = Q$, le domaine est fermé, et il suffit de montrer que $\varphi$ est continue.

Pour tout $m > 0$ on peut trouver $n > 0$ et un mot $w$ de $A^*$ de longueur $n$ tel que

$$i \xrightarrow{w/y} p$$

avec $|y| \geq m$, car il n'y a pas de boucles d'image vide dans $\mathcal{A}$.

Soient $u = wu'$ et $v = wv'$ dans $A^{\mathbb{N}}$ : $\rho(u,v) = 2^{-n}$

$\varphi(u)$ et $\varphi(v)$ commencent par $y$, donc $\rho(\varphi(u), \varphi(v)) \leq 2^{-m}$, et $\varphi$ est continue.

## Continuité sur les réels

Base $\beta$, alphabet canonique $A = \{0, \ldots, \beta - 1\}$, $D \supseteq A$ un autre alphabet de chiffres positifs ou négatifs.

Soit $\pi_\beta : D^{\mathbb{N}} \longrightarrow \pi_\beta(D) \subset \mathbb{R}$ la valeur numérique en base $\beta$

$$\pi_\beta((x_i)_{i\geq 1}) = \sum_{i\geq 1} x_i \beta^{-i}$$

$\pi_\beta(A^{\mathbb{N}}) = [0, 1]$

**Proposition 10 .** [Eilenberg] $\pi_\beta$ *est une fonction surjective uniformément continue.*

L'algorithme glouton de représentation des réels entraîne la surjectivité.

Soient $u$ et $v$ dans $D^{\mathbb{N}}$ tels que $\rho(u, v) = 2^{-n}$, alors

$$|\pi_\beta(u) - \pi_\beta(v)| = |\sum_{i\geq n} u_i \beta^{-i} - \sum_{i\geq n} v_i \beta^{-i}| \leq \frac{2\ m(D)}{\beta^{n-1}(\beta - 1)}$$

où $m(D) = \max\{|d| \mid d \in D\}$.

Soit $J = \pi_\beta(D^{\mathbb{N}})$.

$\chi : D^{\mathbb{N}} \longrightarrow A^{\mathbb{N}}$ est consistante en base $\beta$ s'il existe $\chi_{\mathbb{R}} : J \longrightarrow [0,1]$ telle que

$$\begin{tikzcd}
D^{\mathbb{N}} \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\pi_\beta"'] & A^{\mathbb{N}} \arrow[d, "\pi_\beta"] \\
J \arrow[r, "\chi_{\mathbb{R}}"'] & {[0,1]}
\end{tikzcd}$$

commute.

$\chi_{\mathbb{R}}$ est la réalisation réelle de $\chi$ en base $\beta$.

**Proposition 11** . *Si $\chi$ est continue alors $\chi_{\mathbb{R}}$ est continue.*

## Automates finis en-ligne sur les réels

Comme sur les entiers, mais chemins infinis.

Même résultats pour l'addition, etc.

Proposition **12** . *Toute fonction affine à cœfficients rationnels est réalisable par automate fini en-ligne en base $\beta$ sur $B = \{\bar{a}, \dots, a\}$, avec $\beta/2 \leq a \leq \beta - 1$.*

Réciproquement, soit $D = \{\bar{d}, \dots, d\}$ avec $d \geq a$,
$I = [-a/(\beta - 1), a/(\beta - 1)]$,
$J = [-d/(\beta - 1), d/(\beta - 1)]$.

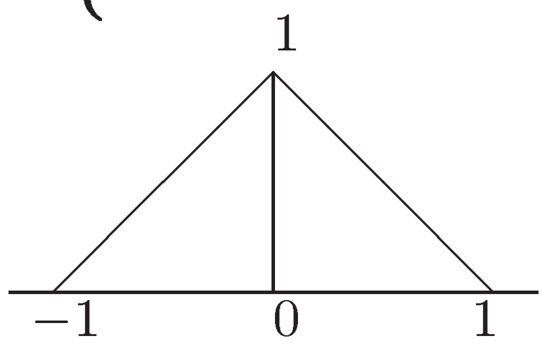
Théorème **2** . [J.-M. Muller] *Soit*

$$\begin{array}{ccc} D^{\mathbb{N}} & \xrightarrow{\chi} & B^{\mathbb{N}} \\ \pi_\beta \downarrow & & \downarrow \pi_\beta \\ J & \xrightarrow[\chi_{\mathbb{R}}]{} & I \end{array}$$

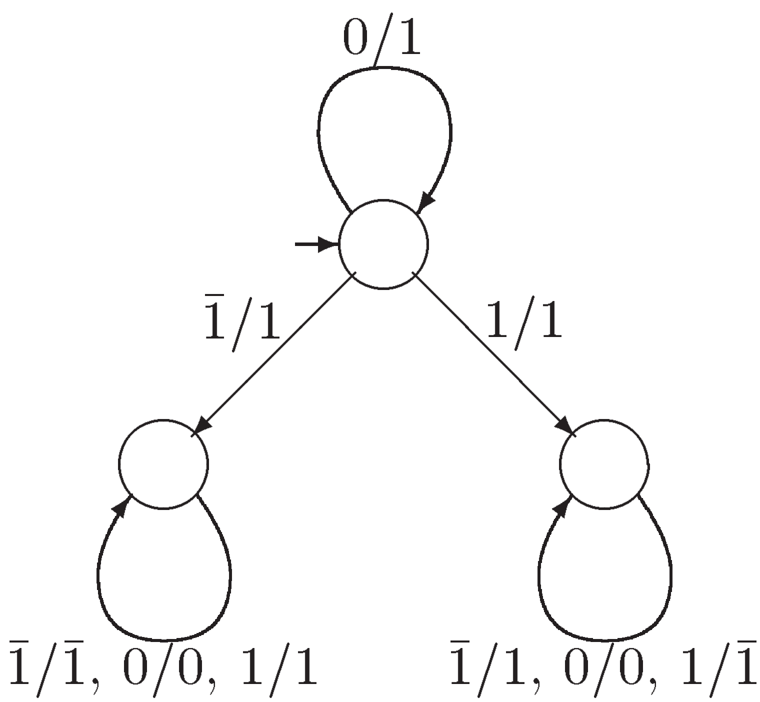
*tel que $\chi$ est réalisée par un automate fini en-ligne. Si la dérivée seconde $\chi_{\mathbb{R}}''$ est continue par morceaux, alors dans chaque intervalle où $\chi_{\mathbb{R}}''$ est continue, $\chi_{\mathbb{R}}$ est affine à cœfficients rationnels.*

Exemple 10. La fonction tente $f : [-1, 1] \to [0, 1]$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 + x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$




En base 2 avec chiffres dans $\{\bar{1}, 0, 1\}$



# Représentation des nombres complexes

## Base entière, chiffres complexes

Base 2, chiffres
$C = \{0, 1\} + i\{0, 1\} = \{0, 1, i, 1 + i\}$.

Si on écrit

$$0 = {}^{0}_{0},\ 1 = {}^{1}_{0},\ \ i = {}^{0}_{1},\ 1 + i = {}^{1}_{1}$$

pour toute représentation la ligne du haut représente la partie réelle et celle du bas la partie imaginaire.

$z = 3 + 2i = (1 + i)2 + 1$ est représenté par ${}^{11}_{10}$

## Base complexe, chiffres entiers

Base $\beta = i\sqrt{b}$, avec $b$ entier $\geq 2$, chiffres $A = \{0, \cdots, b-1\}$ Knuth

Tout complexe est représentable.

Si $b = c^2$, tout entier de Gauss a une représentation unique de la forme $d_k \cdots d_0 \bullet d_{-1}$.

Exemple $\beta = 2i$, $A = \{0, \cdots, 3\}$, $z = 4 + i$ est représenté par $10310 \bullet 2$.

**Proposition 13 .** *Sur $A$ l'addition en base $\beta = i\sqrt{b}$ est sous-séquentielle droite.*
*Sur $B = \{\bar{a}, \cdots, a\}$ avec $b/2 \leq a \leq b-1\}$, l'addition est réalisable en temps constant en parallèle, et calculable par automate fini en-ligne.*

[Nielsen et Muller, Frougny, Surarerks]

Base $\beta = -b + i$, avec $b$ entier $\geq 1$, chiffres $A = \{0, \cdots, b^2\}$ [Cas $b = 1$ Penney]

Tout complexe est représentable.

Tout entier de Gauss a une représentation unique de la forme $d_k \cdots d_0 \in A^*$.

Proposition **14** . [Safer] *Sur $A$ l'addition en base $\beta = -b + i$ est sous-séquentielle droite.*

Cas $\beta = -1 + i$, $A = \{0, 1\}$. $\beta^4 = -4$.

Proposition **15** . *Sur $B = \{\bar{a}, \cdots, a\}$, avec $a = 1$, 2 ou 3, l'addition en base $-1 + i$ est réalisable en temps constant en parallèle, et calculable par automate fini en-ligne.*

[Herreros, Nielsen et Muller, Frougny, Surarerks]

# Références


[1] A. Avizienis, Signed-digit number representations for fast parallel arithmetic. *IRE Transactions on electronic computers* **10** (1961), 389–400.

[2] O. Carton, Mots infinis et automates,
`http://www-igm.univ-mlv.fr/~carton/Transparents/`

[3] C.Y. Chow and J.E. Robertson, Logical design of a redundant binary adder. *Proc. 4th Symposium on Computer Arithmetic* (1978), 109–115.

[4] S. Eilenberg, *Automata, Languages and Machines*, vol. A, Academic Press, 1974.

[5] Ch. Frougny, Numeration Systems, in M. Lothaire, *Algebraic Combinatorics on Words*, Cambridge University Press, à paraître.
`http://www-igm.univ-mlv.fr/~berstel/Lothaire/index.html`

[6] Ch. Frougny et J. Sakarovitch, Synchronisation déterministe des automates à délai borné. *Theoret. Comput. Sci.* **191** (1998), 61–77.

[7] J.-M. Muller, *Arithmétique des ordinateurs*, Masson, 1989.

[8] J.-M. Muller, Some characterizations of functions computable in on-line arithmetic. *I.E.E.E. Trans. on Computers* **43** (1994), 752–755.