Ecole Jeunes Chercheurs en Algorithmique et Calcul Formel

Bordeaux, 22 – 26 mars 1999

Fonctions de mots infinis réalisables par automate fini. Application à la représentation des nombres réels

Christiane Frougny

LIAFA, CNRS, Paris

Christiane.Frougny@liafa.jussieu.fr

http://www.liafa.jussieu.fr/~cf/

Plan de l'exposé

1. Fonctions de mots infinis réalisables par automate fini
   - Définitions
   - Propriétés de fermeture
2. Représentation des réels
   - Normalisation
   - Addition
3. Séquentialité et continuité
   - Exemple de la division
   - Continuité
4. Automates finis en-ligne
   - Représentations d'Avizienis
   - Automates finis en-ligne et fonctions affines à cœfficients rationnels

Fonctions de mots infinis réalisables par automate fini

A alphabet d'entrée, B alphabet de sortie.

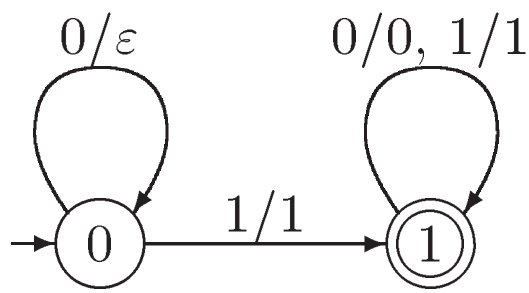
Automate fini à 2 bandes = transducteur = $\mathcal{A} = (Q, A^* \times B^*, E, I, F)$ avec E et Q finis.

Relation de mots infinis $R \subseteq A^{\mathbb{N}} \times B^{\mathbb{N}}$ est réalisée par $\mathcal{A}$ si R est l'ensemble des étiquettes des chemins infinis commençant dans un état de I et passant infiniment souvent dans F (comportement à la Büchi).

Fonction $\varphi : A^{\mathbb{N}} \longrightarrow B^{\mathbb{N}}$ est réalisable par un automate fini si son graphe est réalisé par automate fini.

N.B. Pas de boucles terminales d'étiquette u/ε ou ε/u

Exemple 1. L'automate qui efface les 0 en tête des mots.



THÉORÈME **1** . [Gire] *La composée de deux fonctions réalisables par automate fini l'est aussi. L'inverse d'une fonction réalisable par automate fini l'est aussi.*

Idée de la preuve pour la composition.

Si

$$p \xrightarrow{a/bc} p'$$

dans $\mathcal{A}$ et

$$q \xrightarrow{b/def} q' \xrightarrow{c/xy} q''$$

dans $\mathcal{B}$, alors dans $\mathcal{B} \circ \mathcal{A}$ on aura

$$(p, q) \xrightarrow{a/defxy} (p', q'')$$

Même problème pour les états terminaux que dans l'intersection: il faut utiliser un booléen pour mémoriser si un état final de $\mathcal{A}$ a été vu.

Représentation des réels

Base b entier ≥ 2.

x réel de $[0, 1[$

Algorithme glouton

$$r_0 \leftarrow x$$
$$\textit{pour } i \geq 1,\ x_i \leftarrow \lfloor br_{i-1} \rfloor,\ r_i \leftarrow \{br_{i-1}\}$$

Notation

$$x = (\cdot x_1 x_2 \cdots)_b$$

avec chiffres $x_i \in A = \{0, \ldots, b-1\}$.

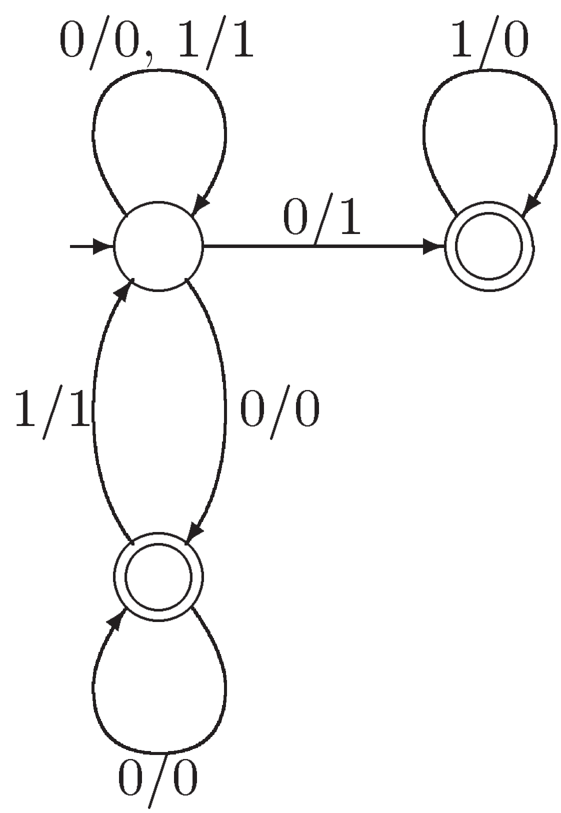
Exercice. Montrer que les rationnels sont exactement les nombres ayant un développement ultimement périodique en base b.

Redondance : pour $0 \leq a \leq b-2$

$$a(b-1)^\omega =_b (a+1)0^\omega$$

Proposition **1** . *La fonction de normalisation $\nu : A^{\mathbb{N}} \longrightarrow A^{\mathbb{N}}$ qui transforme les développements impropres se terminant par $(b-1)^\omega$ en développements se terminant par 0^ω est calculable par automate fini.*

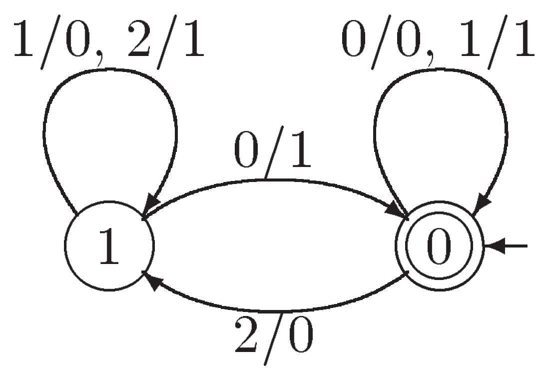
Base $b = 2$: $u01^\omega \rightarrow u10^\omega$



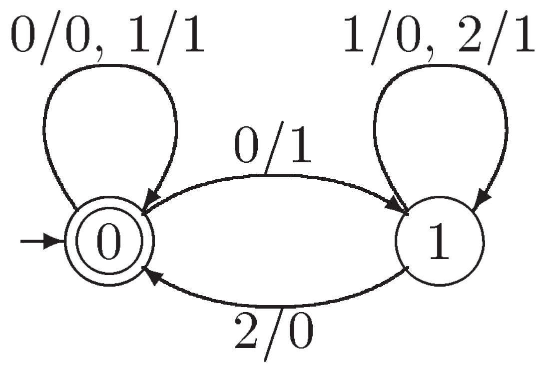
Addition

Addition des entiers en base 2 (de droite à gauche)

$$
\begin{array}{cccccc}
 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
+ & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\
\hline\hline
 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{array}
$$



Addition des réels en base 2 (de gauche à droite)



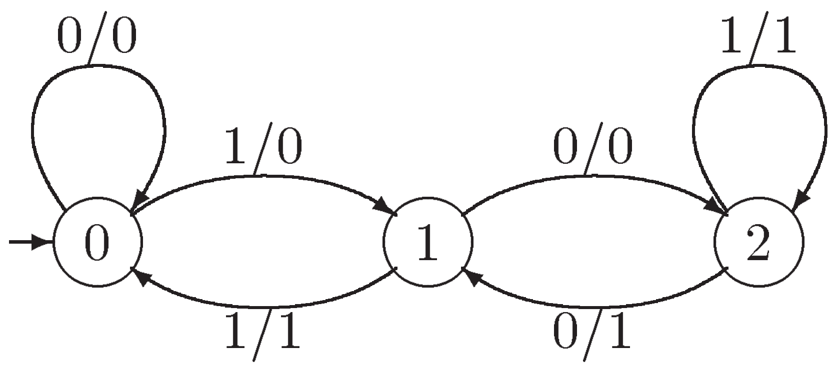
Cet automate est non-ambigu.

Proposition 2 . *Toute fonction réalisable par automate fini est réalisable par un automate non-ambigu.*

Séquentialité

$\varphi : A^{\mathbb{N}} \longrightarrow B^{\mathbb{N}}$ est séquentielle si elle est réalisée par un automate fini $\mathcal{A} = (Q, A \times B^*, E, i, Q)$ déterministe sur la bande d'entrée.

Exemple 2. Division par 3 en base 2



La division par un entier positif fixé est séquentielle en base b.

Remarque **1** . *L'addition en base 2 sur* $\{0,1\}$ *n'est pas séquentielle.*

$$01^n0^\omega + 0^n10^\omega = 10^\omega$$

$$01^n0^\omega + 0^\omega = 01^n0^\omega$$

PROPOSITION **3** . *La composée de fonctions séquentielles est séquentielle.*

Exercice. Montrer que l'image par une fonction séquentielle d'un mot ultimement périodique est un mot ultimement périodique.

Continuité

THÉORÈME **2** . *Toute fonction séquentielle* $\varphi : A^{\mathbb{N}} \longrightarrow B^{\mathbb{N}}$ *est uniformément continue.*

Comme $F = Q$, le domaine est fermé, et il suffit de montrer que φ est continue.

Pour tout $m > 0$ on peut trouver $n > 0$ et un mot w de A^* de longueur n tel que

$$i \xrightarrow{w/y} p$$

avec $|y| \geq m$, car il n'y a pas de boucles d'image vide dans $\mathcal{A}$.

Soient $u = wu'$ et $v = wv'$ dans $A^{\mathbb{N}}$: $d(u, v) = 2^{-n}$

$\varphi(u)$ et $\varphi(v)$ commencent par y, donc $d(\varphi(u), \varphi(v)) \leq 2^{-m}$, et φ est continue. ■

Continuité sur les réels

Base b, alphabet canonique $A = \{0, \dots, b-1\}$, $D \supseteq A$ un autre alphabet de chiffres positifs ou négatifs.

Soit $\pi_b : D^{\mathbb{N}} \longrightarrow \pi_b(D) \subset \mathbb{R}$ la valeur numérique en base b

$$\pi_b((x_i)_{i\geq 1}) = \sum_{i\geq 1} x_i b^{-i}$$

$\pi_b(A^{\mathbb{N}}) = [0, 1]$

Proposition **4** . [Eilenberg] π_b *est une fonction surjective uniformément continue.*

L'algorithme glouton de représentation des réels entraîne la surjectivité.

Soient u et v dans $D^{\mathbb{N}}$ tels que $d(u, v) = 2^{-n}$, alors

$$|\pi_b(u) - \pi_b(v)| = |\sum_{i\geq n} u_i b^{-i} - \sum_{i\geq n} v_i b^{-i}| \leq \frac{2\ m(D)}{b^{n-1}(b-1)}$$

où $m(D) = \max\{|d| \mid d \in D\}$. ∎

Soit $J = \pi_b(D^{\mathbb{N}})$.
$\chi : D^{\mathbb{N}} \longrightarrow A^{\mathbb{N}}$ est consistante en base b s'il existe $\chi_{\mathbb{R}} : J \longrightarrow [0,1]$ telle que

$$\begin{tikzcd}
D^{\mathbb{N}} \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\pi_b"'] & A^{\mathbb{N}} \arrow[d, "\pi_b"] \\
J \arrow[r, "\chi_{\mathbb{R}}"'] & {[0,1]}
\end{tikzcd}$$

commute.
$\chi_{\mathbb{R}}$ est la réalisation réelle de χ en base b.

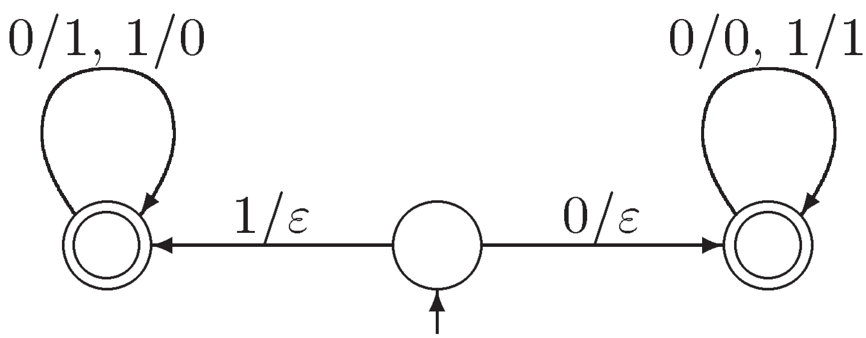
Proposition **5** . *Si χ est séquentielle alors $\chi_{\mathbb{R}}$ est continue.*

Puisque χ et π_b sont continues, $\pi_b \circ \chi_{\mathbb{R}}$ l'est aussi. π_b est surjective et continue, $D^{\mathbb{N}}$ et J sont compacts, donc $\chi_{\mathbb{R}}$ est continue par un résultat standard de topologie. ■

Automates finis en-ligne

Automate fini en-ligne = automate séquentiel particulier: pendant un temps δ (le délai) on lit sans rien sortir, puis ensuite pour chaque lettre lue on sort une lettre (utilisés en arithmétique des ordinateurs).

Exemple 3. Automate en ligne à délai 1.



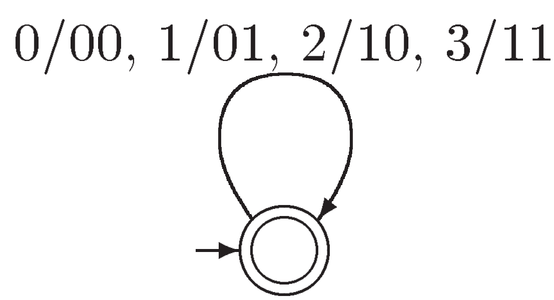
Automates à délai borné

Un automate est à délai borné si toutes ses boucles ont des étiquettes dont l'entrée et la sortie ont même longueur.

Résultat de synchronisation

Proposition **6** . *Soit φ une fonction réalisée par un automate à délai borné $\mathcal{A}$. Si de plus $\mathcal{A}$ est séquentiel, alors on peut construire un automate en-ligne $\mathcal{B}$ qui réalise φ.*

Exemple 4. L'automate qui fait la conversion base 4 $\rightarrow$ base 2 est séquentiel mais pas à délai borné.



Représentations d'Avizienis

Base b, chiffres dans $B = \{\bar{a}, \ldots, a\}$ avec $b/2 \leq a \leq b - 1$.

Exemple 5. $b = 10$, $a = 6$, $B = \{\bar{6}, \ldots, 6\}$

Redondance : $46 =_{10} 5\bar{4}$

Addition sans propagation de retenue :

$$\begin{array}{cccccc}
 & 0 & 2 & 5 & \bar{4} & 6 \\
+ & 0 & 5 & 0 & 1 & 6 \\
\hline
 & 0 & 7 & 5 & \bar{3} & 12 \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 1 & \\
 & & \bar{3} & 5 & \bar{3} & 2 \\
\hline\hline
 & 1 & \bar{3} & 5 & \bar{2} & 2
\end{array}$$

Règles de réécriture:

$$12 \to \begin{array}{c|c} 1 & \\ & 2 \end{array} \qquad 11 \to \begin{array}{c|c} 1 & \\ & 1 \end{array}$$

$$10 \to \begin{array}{c|c} 1 & \\ & 0 \end{array} \qquad 9 \to \begin{array}{c|c} 1 & \\ & \bar{1} \end{array} \qquad 8 \to \begin{array}{c|c} 1 & \\ & \bar{2} \end{array}$$

$$7 \to \begin{array}{c|c} 1 & \\ & \bar{3} \end{array} \qquad 6 \to \begin{array}{c|c} 1 & \\ & \bar{4} \end{array}$$

Même chose pour les chiffres négatifs.

Marche pour $b \geq 3$ et $(b+1)/2 \leq a \leq b-1$. On fait les réécritures entre $2a$ et a (resp. $-2a$ et $-a$).

Addition en temps constant en parallèle.

Pour $b = 2$, $B = \{\bar{1}, 0, 1\}$ ([Chow and Robertson]).

Règles de réécriture:

$$2 \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r|l} 1 & \\ & 0 \end{array}$$

Pour le chiffre 1 on utilise une fenêtre

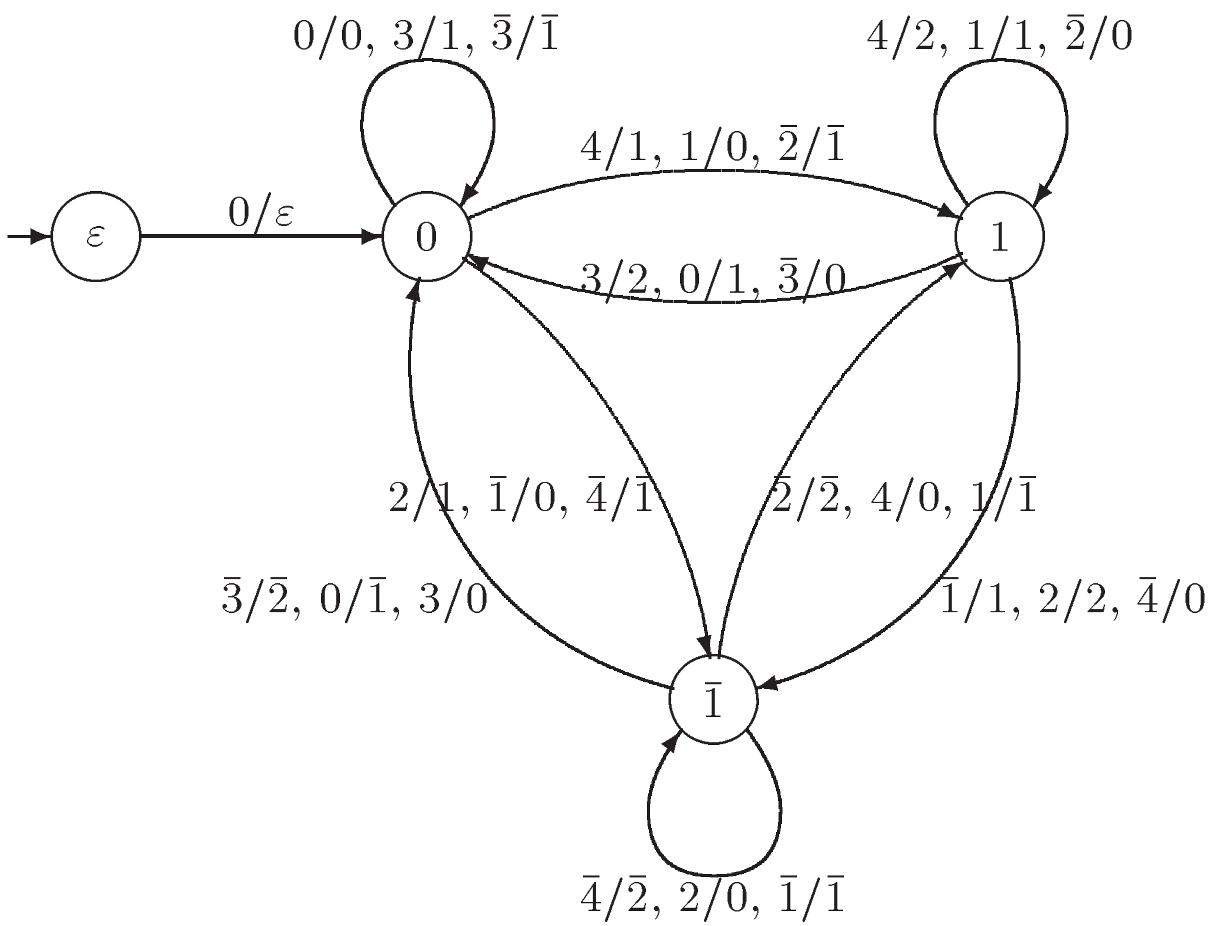
$$1 \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r|l} 1 & \\ & \bar{1} \end{array}$$ si le chiffre à droite de 1 est ≥ 0

sinon rien.

Idem pour les chiffres négatifs.

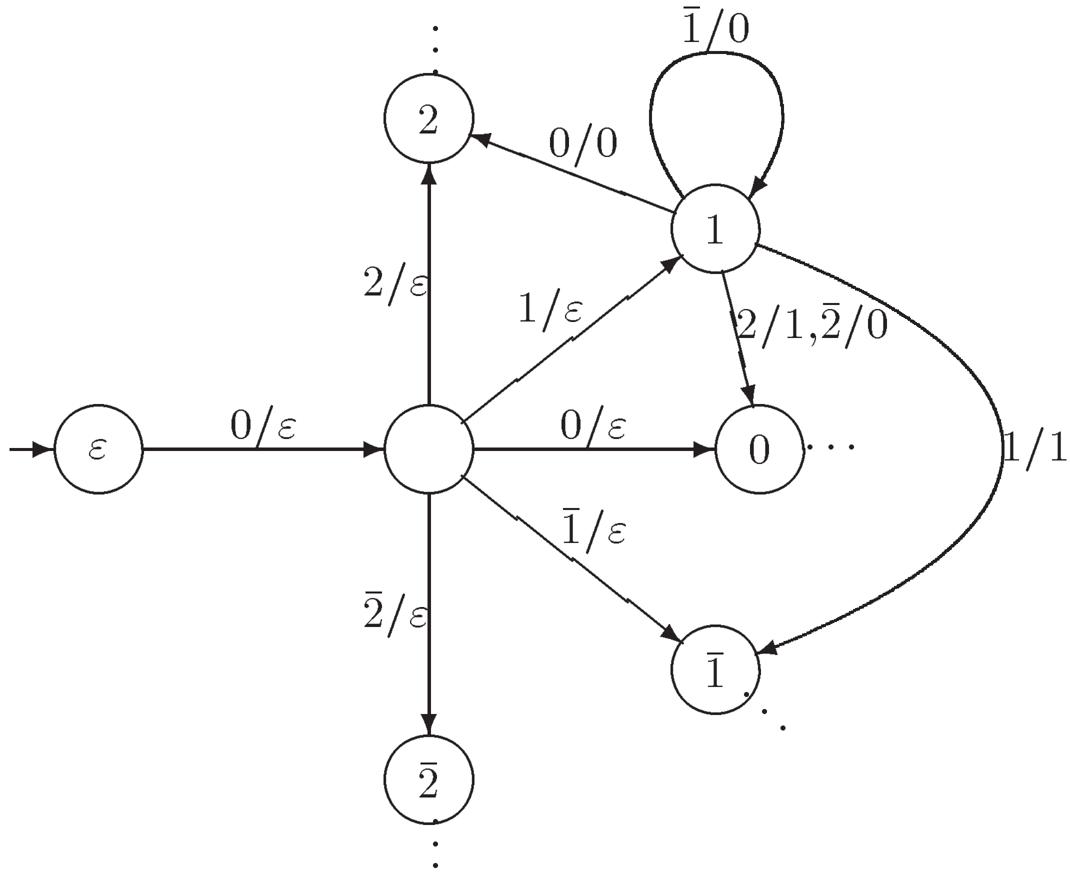
$$\begin{array}{cccccc}
 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
+ & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\
 & 0 & \bar{1} & 0 & 0 & 0 \\
\hline\hline
 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{array}$$

Automate en-ligne à délai 1 réalisant l'addition en base $b = 3$ sur $B = \{\bar{2}, \dots, 2\}$



$$p \xrightarrow{x/y} q \Leftrightarrow bp + x = by + q$$

Automate en-ligne à délai 2 réalisant l'addition en base $b = 2$ sur $B = \{\bar{1}, 0, 1\}$



et ensuite, pour p et q dans $\{\bar{2}, \ldots, 2\}$,
$-2 \leq x \leq 2$ et $-1 \leq y \leq 1$

$$p \xrightarrow{x/y} q \Leftrightarrow bp + x = b^2 y + q$$

Proposition **7** . *Toute fonction affine à cœfficients rationnels est réalisable par automate fini en-ligne en base b sur $B = \{\bar{a}, \ldots, a\}$, avec $b/2 \leq a \leq b-1$.*

Réciproquement, soit $D = \{\bar{d}, \ldots, d\}$ avec $d \geq a$, $I = [-a/(b-1), a/(b-1)]$, $J = [-d/(b-1), d/(b-1)]$.

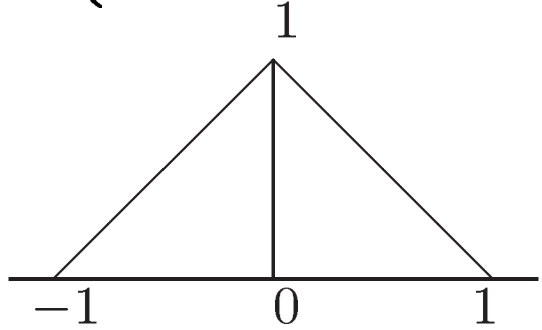
Théorème **3** . [J.-M. Muller] *Soit*

$$\begin{tikzcd} D^{\mathbb{N}} \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\pi_b"'] & B^{\mathbb{N}} \arrow[d, "\pi_b"] \\ J \arrow[r, "\chi_{\mathbb{R}}"'] & I \end{tikzcd}$$

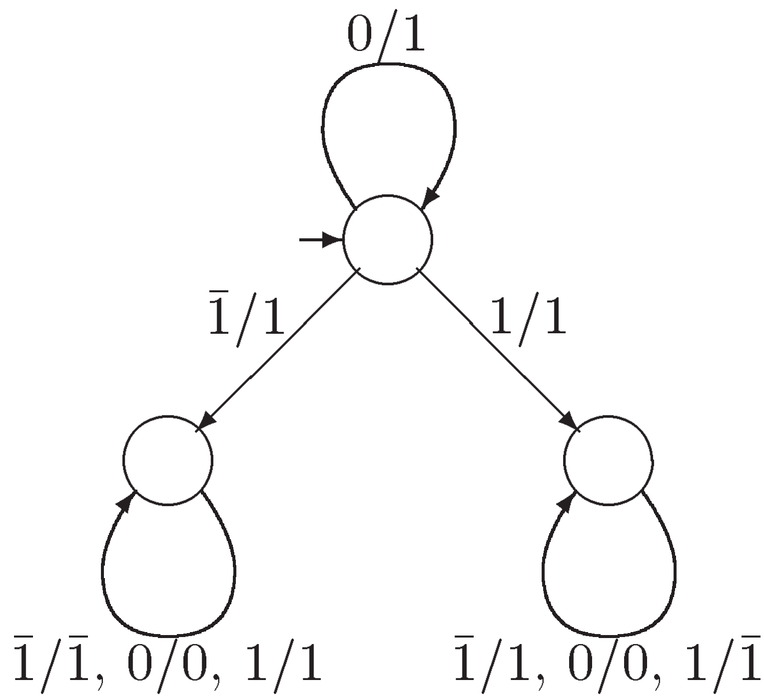
tel que χ est réalisée par un automate fini en-ligne. Si la dérivée seconde $\chi''_{\mathbb{R}}$ est continue par morceaux, alors dans chaque intervalle où $\chi''_{\mathbb{R}}$ est continue, $\chi_{\mathbb{R}}$ est affine à cœfficients rationnels.

Exemple 6. La fonction tente $f : [-1, 1] \to [0, 1]$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 + x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$



En base 2 avec chiffres dans $\{\bar{1}, 0, 1\}$



Exercice. Que calcule l'automate de l'exemple 3 en base 2?

Références

[1] A. Avizienis, Signed-digit number representations for fast parallel arithmetic. *IRE Transactions on electronic computers* **10** (1961), 389–400.

[2] C.Y. Chow and J.E. Robertson, Logical design of a redundant binary adder. *Proc. 4th Symposium on Computer Arithmetic* (1978), 109–115.

[3] S. Eilenberg, *Automata, Languages and Machines*, vol. A, Academic Press, 1974.

[4] M.D. Ercegovac, On-line arithmetic: An overview. *Real time Signal Processing VII* **SPIE 495** (1984), 86–93.

[5] Ch. Frougny et J. Sakarovitch, Synchronisation déterministe des automates à délai borné. *Theoret. Comput. Sci.* **191** (1998), 61–77.

[6] F. Gire et M. Nivat, Relations rationnelles infinitaires. *Calcolo* XXI (1984), 91–125.

[7] J.-M. Muller, Some characterizations of functions computable in on-line arithmetic. *I.E.E.E. Trans. on Computers* **43** (1994), 752–755.