Perron Frobenius

Order on matrices (and vectors) over $\mathbb{R}$

$M, N \in M_{pq}(\mathbb{R})$

$$M \leq N \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall_{i,j} \quad M_{ij} \leq N_{ij}$$

Soit $M \geq 0$

$G(M) = (V, E)$ graphe d'incidence

M irreductive $\longleftrightarrow$ G fortement connexe

$\exists n \ M^n > 0$ $\longleftrightarrow$ G fortement connexe et pgcd ~~de~~ tous les cycles est 1

Théorème M irréductible et $M \geq 0$
il existe une valeur propre ρ t.q :

1. ρ réelle et $\rho > 0$
2. strictly positive vecteur propre à droite et à gauche.
3. $|\lambda| < \rho$ pour toute valeur propre.
4. Espace propre de dim 1.
5. Si $0 \leq N \leq M$ et β valeur propre de N
   $|\beta| \leq \rho$ et $|\beta| = r$ implique $M = N$
6. $$\lim_{n \to \infty} \frac{M^n}{\rho^n} = x\ell \quad \text{si} \quad \ell x = 1$$

$$\ell M = \rho \ell \quad \text{et} \quad Mx = \lambda x$$

Corollaire

Applications locales

Déf Soient $X \subseteq A^{\mathbb{N}}$ (ou $A^{\mathbb{Z}}$) et $Y \subseteq B^{\mathbb{N}}$ (ou $B^{\mathbb{Z}}$) et $f : X \to Y$

f est un morphisme si
* f continue
* f commute avec le shift $T_Y \circ f = f \circ T_X$

Déf $f : X \subseteq A^{\mathbb{N}} \to Y \subseteq B^{\mathbb{N}}$ est une application locale s'il existe $k \geq 1$

(1) et une application $\hat{f} : A^k \to B$ tq. ($\hat{f}$ peut être partielle)

$$f(x_0 x_1 x_2 x_3 \dots) = \hat{f}(x_0 \dots x_{k-1})\, \hat{f}(x_1 \dots x_k)\, \hat{f}(x_2 \dots x_{k+1})\, \hat{f}(x_3 \dots x_{k+2}) \dots$$

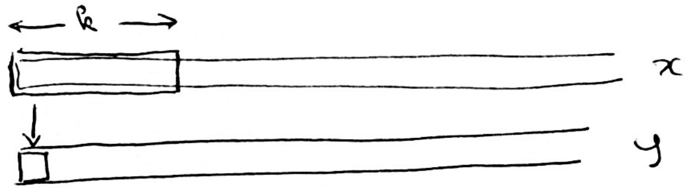
$f : X \subseteq A^{\mathbb{Z}} \to Y \subseteq B^{\mathbb{Z}}$ est une application locale s'il existe $k \geq 1$

(2) et $0 \leq p \leq k$ et une application partielle tq.

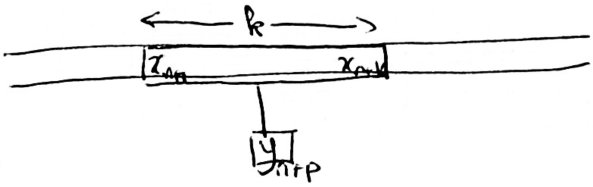
$$f(\dots x_{-2} x_{-1} x_0 x_1 x_2 \dots) = \dots y_{-2} y_{-1} y_0 y_1 y_2 \dots$$

où $y_{n+p} = \hat{f}(x_{n+1} x_{n+2} \dots x_{n+k})$

(1)



(2)



Théorème $f : X \to Y$ est un morphisme ssi f est une application locale.

Preuve $X \subseteq A^{\mathbb{Z}}$ et X fermé $\to$ X compact.

$f : X \to Y$ continue $\to$ f uniformément continue

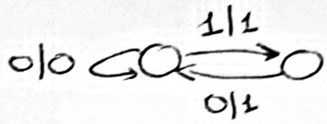
$\to \exists k \quad d(x,x') < 2^{-k} \to d(f(x), f(y)) < 1/2$

Puis commutation avec le shift

Transducteurs (lettre à lettre) = automate sur $A \times B$

$$\mathcal{T} = (Q, A\times B, E)$$

Ex



Relation $R = \{(x,y) :$ (x,y) étiquette d'un chemin ds $\mathcal{T}\}$

Proposition : $\mathcal{T}$ transducteur. Si la relation réalisée par $\mathcal{T}$ est une fonction, c'est une application locale

Preuve * commute avec le shift

$$(x,y) \in R \quad \Rightarrow \quad (Tx, Ty) \in R$$

* Continue $\quad f^{-1}(F) = \pi_1\left(\pi_2^{-1}(F) \cap \underset{R}{S \times T}\right)$

fermé

Image continue d'un compact.

Rq : Si l'automate d'entrée du transducteur est local, alors le transducteur réalise une fonction.

Proposition Soit $f : X \to Y$ application locale où X et Y sont sofiques.
La fonction f peut être réalisée par un transducteur $\mathcal{T}$:
Pour tout (x,y), on a $f(x) = y$ ssi (x,y) étiquette d'un chemin bi-infini dans T

Preuve Soit $\mathcal{A} = (Q, A, E)$ automate acceptant X
On suppose f locale telle que

$$a_{n+p} = \hat{f}(a_{n+1} \cdots a_{n+p} \quad a_{n+k})$$

On construit un transducteur $\mathcal{T}$ ou les états sont chemins de longueur $k-1$ dans $Q' = \{T_1 \dots T_{k-1} :$ chemin ds $\mathcal{A}\}$

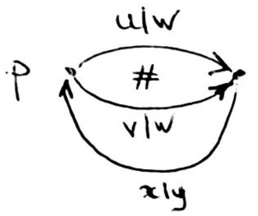
$$T_1 \dots T_{k-1} \xrightarrow{a_1 | f(a_1 \dots a_k)} T_2 \dots T_k$$

où a_i étiquette de T_i $\quad T_i = p_i \xrightarrow{a_i} p_{i+1}$

Rq : Si $\mathcal{A}$ est local, alors $\mathcal{T}$ est encore local.
(les cycles dans $\mathcal{T}$, correspondent à des cycles dans $\mathcal{A}$)

<u>Proposition</u> $\mathcal{T}$ transducteur local en entrée réalisant une fonction f
Il y a équivalence entre
① f est à fibre bornée ($f^{-1}(y)$ fini pour tout y)
② $\mathcal{T}$ est non ambigu en sortie

<u>Preuve</u> On suppose $\mathcal{T}$ ambigu en sortie



On a nécessairement $u \neq v$ car $\mathcal{T}$ est local en entrée

$\rightarrow$ $f^{-1}(\dots ywywyw \dots)$ est infini

On suppose que $f^{-1}(y)$ est infini. On suppose $f^{-1}(y) = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$
Pour chaque paire (x_i, y), il existe un chemin γ_i d'étiquette (x_i, y).
Il existe un état p qui apparaît une infinité de fois en position 0.
On suppose que tous les γ_i ont l'état p en position 0.
Il existe une infinité de chemins γ_i différent à droite ou à gauche.
On suppose que c'est à droite.
Pour m assez grand on peut trouver $\#Q+1$ chemins qui diffèrent sur les m premières positions. On a en au moins 2 ayant le même état en position m $\rightarrow$ ambiguïté

Corollaire $f : X \longrightarrow Y$ bijective application locale

Si X de type fini, alors Y de type fini

et $H(X) = H(Y)$

Preuve Soit $\mathcal{T}$ transducteur réalisant f

Comme f est injective, alors $\mathcal{T}$ est non ambigu en sortie.

Comme $\mathcal{T}$ est fortement connexe $\mathcal{T}$ est local en sortie

et Y est de type fini

L'entropie de X et Y est donnée par la matrice d'incidence de $\mathcal{T}$.

Corollaire $f : X \longrightarrow Y$ application locale bijective

* f^{-1} est locale
* soit $\alpha_n = \# \{ x \in X : T^n(x) = x \}$

  $\beta_n = \# \{ y \in Y : T^n(y) = y \}$

  alors $\alpha_n = \beta_n$

Preuve * Soit F fermé donc compact de X

$(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$ qui est compact.

Image continue d'un compact.

* Si $T^n(x) = x$ alors $x = \ldots www\ldots$

  où $|w| = n$.

  w est l'étiquette d'un cycle au plus n

  (en fait de longueur $\min_k T_X^k(x) = x$)

  En bijection par $\mathcal{T}$ avec y t.q. $T_Y^n(y) = y$

Fonction Zeta

Fonction classique $\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ prem}} (1-p^{-s})^{-1}$

X système de type fini $\alpha_n = \#\{x : T^n(x) = x\}$

$$\zeta(z) = \exp\left(\sum_{n\geq 0} \frac{\alpha_n z^n}{n}\right) = \prod_{T \text{ load}} (1-z^{|T|})^{-1}$$

$$\log \zeta(z) = -\sum_T \log(1-z^{|T|}) = \sum_T \sum_{n\geq 1} \frac{z^{n|T|}}{n}$$

$$= \sum_{n\geq 1} \left(\sum_T |T| \left(\frac{z^{n|T|}}{n|T|}\right)\right) = \sum_{n\geq 1} \frac{\alpha_n z^n}{n}$$

Théorème Pour X sous-shift de type fini $\zeta(z)$ fonction rationnelle

Def Puissance exterieure : soit $\mathcal{A} = (Q, A, E)$ automate det
$Q = \{1, \dots, n\}$

Soit $1 \leq k \leq \# Q$, la puissance extérieure d'ordre k

l'automate dont les états $\{i_1, \dots, i_k : 1 \leq i_1 < i_2 < i_k \leq n\}$

$$(i_1, \dots, i_k) \xrightarrow{+a} (J_1, \dots, J_k) \text{ où } (J_1, \dots, J_k) = \pi(i_1 \cdot a, \dots, i_k \cdot a)$$
et π permutation paire

$$(i_1, \dots, i_k) \xrightarrow{-a} (J_1, \dots, J_k) \text{ où } (J_1, \dots, J_k) = \pi(i_1 \cdot a, \dots, i_k \cdot a)$$
et π permutation impaire

A_i projection par $\begin{matrix} a \mapsto 1 \\ b \mapsto 1 \end{matrix}$ de la matrice de transition de la puissance exterieure de $\mathcal{A}$

$$\zeta(z) = \prod_{k=1}^{n} \det(I - A_k z)^{(-1)^k}$$

Preuve

Lemme $\alpha_k = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \operatorname{tr}(A_i^k)$

Preuve du théorème : $\zeta(z) = \exp \sum_{k\geq 1} \frac{z^k}{k} \alpha_k = \exp \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \operatorname{tr}(A_i^k) z^k)$

$$= \exp \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \operatorname{tr}\Big(\sum_{k\geq 1} \frac{(A_i z)^k}{k}$$

$$= \exp \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i} \operatorname{tr}(\log (I - A_i z))$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \exp(\operatorname{tr}((-1)^i \log(I - A_i z))$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \det$$

$$\exp(\operatorname{tr} A) = \det(\exp(A)) \quad \text{(Formule de Jacobi)}$$

Preuve du lemme

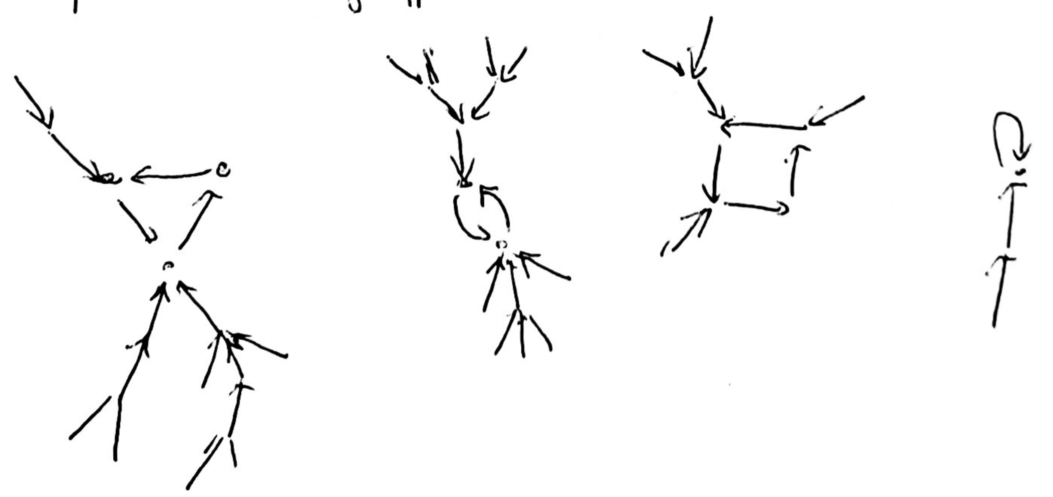
Un mot w contribue à ∓ 1 à $\operatorname{tr}(A_i^k)$ ssi si

+ w est de longueur k
+ il existe $P = \{p_1, \dots, p_i\}$ tq $P \cdot w = \{p_j \cdot w : 1 \leq j \leq i\} = P$

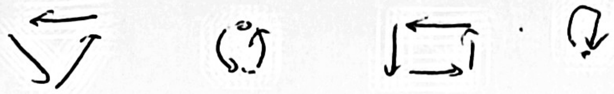
On note f la fonction : $Q \longrightarrow Q$

$q \longmapsto f(q) = q \cdot w$

Le graphe de f à la forme suivante : des cycles sur lesquels sont greffés des arbre



Une partie P vérifie $f(P) = P$ ssi P est union des cycles



On fixe une partie C_0 qui est un de ces cycles et on définit l'involution suivante

$$P \longmapsto \begin{cases} P \cup C_0 & \text{si } C_0 \not\subseteq P \\ P \setminus C_0 & \text{si } C_0 \subseteq P \end{cases}$$

On note $k = \#C_0$

$\varepsilon(P)$ la signature de $f(P)$ en tant que permutation $P \to f(P)$

$$\varepsilon(P \cup C_0) = (-1)^{\#C_0+1} \varepsilon(P) \qquad \text{si} \quad C_0 \not\subseteq P$$

La contribution à $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \mathrm{tr}(A_i^k)$

de P est $(-1)^{\#P+1} \varepsilon(P)$

$P \cup C_0$ est $(-1)^{\#P+\#C_0+1} \varepsilon(P \cup C_0) = (-1)^{\#P} \varepsilon(P)$] somme nulle.

d'où

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+1} \mathrm{tr}(A_i^k) = 0$$

pas !

En enlevant la matrice A_0 on trouve α_k