Cours dynamique symbolique

Cours n° 3 et 4

Système de type fini

$X \subseteq A^{\mathbb{N}}$ si $E(X) = A^* \setminus A^* I A^*$ où I fini

~~Ex~~ Ex X pas deux 1 consécutifs $F(X) = A^* \setminus A^* 11 A^*$.

Ex X non de type fini

X pas de bloc de 1 maximal de longueur paire

Système sofique

X sofique si $F(X)$ lang. rationnel.

Prop de type fini $\rightarrow$ sofique

Prop
X sofique ssi est l'ensemble des chemin infini / biinfini ds un automate (non complet)

Preuve Soit $\mathcal{A}$ un automate (det ou non) acceptant $F(X)$

① On supprime les états qui ne peuvent accéder à un état final.

② On peut supposer que $F = Q$ et $I = Q$

$$(I) \xrightarrow{u} p \xrightarrow{w} q \xrightarrow{v} (F)$$

$w \in F$

$S(\mathcal{A})$ = étiquette des chemins infinis ds $\mathcal{A}$

$\rightarrow$ x étiquette alors $x \in S(\mathcal{A})$

$\rightarrow$ extraction par compacité

Ex  $F(X) = A^* \setminus A^* 11 A^*$

 $F(X) = A^* \setminus A^* 0(11)^* 0 A^*$

Type fini $\longrightarrow$ sofique.

Automate <u>local</u> universel

$Q = A^k \qquad E = A^{k+1} = \{(au, b, ub) : u \in A^{k-1}\} \equiv \{aub\}$

Supprimer I de Q $\rightarrow$ automate pour $S(F)$ où
$F = A^* \setminus A^* I A^*$

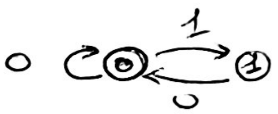
Automate local

$\mathcal{A} = (Q, A, E)$ est dit <u>local</u> s'il existe $n \geq 1$ et $0 \leq d \leq n$ tel que si

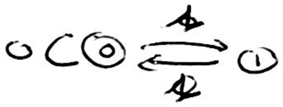
$$p_0 \xrightarrow{a_1} p_1 \xrightarrow{a_2} p_2 \cdots p_{n-1} \xrightarrow{a_n} p_n$$
et
$$p'_0 \xrightarrow{a_1} p'_1 \xrightarrow{a_2} p'_2 \cdots p'_{n-1} \xrightarrow{a_n} p'_n$$

alors $\quad p_d = p'_d$

$\longrightarrow$ (n,d) - local ou n - local.

Exemple  est $(1,1)$ - local

$p \xrightarrow{a} q$ alors $q=0$ si $a=0$
$q=1$ si $a=1$

 non local

$0 \xrightarrow{1} 1 \xrightarrow{1} 0 \xrightarrow{1} 1 \xrightarrow{1} \cdots \xrightarrow{1}$

$1 \xrightarrow{1} 0 \xrightarrow{1} 1 \xrightarrow{1} 0 \xrightarrow{1} \cdots \xrightarrow{1}$

Déf $\mathcal{A} = (Q, A, E)$ non-ambigu

s'il n'existe pas $\begin{tikzcd} p \arrow[r, bend left, "w"] \arrow[r, bend right, "w"'] \arrow[r, phantom, "\neq"] & q \end{tikzcd}$

deux chemins différents de ~~p~~ p à q de même étiquette

Prop Si $\mathcal{A}$ est fortement convexe et local

alors il est non ambigu

Preuve

$$\begin{tikzcd} & r \arrow[dr, "w_2"] \arrow[d, phantom, "\neq"] & \\ p \arrow[ur, "w_1"] \arrow[r, "w_1"'] & s \arrow[r, "w_2"'] & q \arrow[ll, bend left, "v"] \end{tikzcd}$$

chemin $(vw)^n vw (vw)^n$

Prop $\mathcal{A}$ fortement connexe

$\mathcal{A}$ local ssi il n'existe pas deux cycles distincts de même étiquette

$\Leftarrow$ évident !

$$\begin{tikzcd} p \arrow[loop above, "w"] & q \arrow[loop above, "w"] \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ non-ambigu

Si $\mathcal{A}$ non local pour n pair et $d = n/2$

$$p_n \xrightarrow{u_n} r_n \xrightarrow{v_n} q_n \qquad r_n \neq r_n' \text{ et } |u_n| = n$$
$$p_n' \xrightarrow{u_n} r_n' \xrightarrow{v_n} q_n'$$

On choisit $n \geqslant |Q|^2 + 1$

$$p_n \to t_n - t_n - r_n - s_n - s_n - q_n$$
$$p_n' \quad t_n' - t_n' \quad r_n' - s_n' - s_n' - q_n'$$

Si $t_n \neq t_n'$ ou $s_n \neq s_n'$ $\to$ deux cycles différents

Si $t_n = t_n'$ et $s_n = s_n'$ $\to$ ~~non ambigu~~

Comme $\mathcal{A}$ fortement connexe $s_n = s_n' \xrightarrow{w} t_n = t_n'$

$\to$ 2 boucles

Decision : Test de non-localité

On construit $\mathcal{A}\times\mathcal{A}$ $\quad (p,q)\xrightarrow{a}(p',q')$ ssi $\begin{array}{l} p\xrightarrow{a}p' \\ q\xrightarrow{a}q' \end{array}$

$\mathcal{A}$ non local, s'il existe un cycle dans $\mathcal{A}\times\mathcal{A}$ qui ne reste pas dans la diagonale.

→ Si $\mathcal{A}$ local $\quad \mathcal{A}$ n-local pour $n = |Q|^2 - |Q|$

longueur du plus long chemin en dehors de la diagonale.

<u>Thm</u> Le système reconnu par un automate local est de type fini

<u>Proof</u> On suppose $\mathcal{A}$ (n,d)-local

Soit $I = \{ w : $ il n'y a pas d'~~étiquette~~ de chemin d'étiquette w ds $\mathcal{A} \}$, $|w| = n+1$

On va montrer X accepté par $\mathcal{A}$ vérifie $F(X) = A^* \setminus A^* I A^*$

Soit x accepté par l'automate, alors $F(x) \subseteq A^* \setminus A^* I A^*$

Réciproquement soit $w \notin A^{n+1} \setminus I$

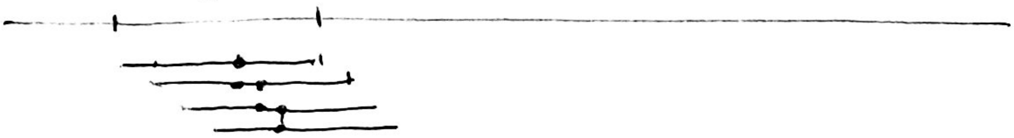
Soit p, q' $\qquad w = a_1 \cdot a_{n+1}$

$p_1 \xrightarrow{a_1} \qquad \xrightarrow{a_{n+1}} p_{n+1}$

$p'_1 \xrightarrow{a_1} \qquad \xrightarrow{a_{n+1}} p'_{n+1}$

alors $p_d = p'_d$ et $p_{d+1} = p'_{d+1}$

w



<u>Prop</u> X de type fini ssi X reconnu par un automate local.

Déterminisation d'un automate fortement connexe

<u>Proposition</u> Soit $\mathcal{A} = (Q, A, E)$ acceptant $F(X)$ d'un système X.
Soit $\hat{\mathcal{A}}$ le déterminisé de $\mathcal{A}$: $\hat{\mathcal{A}} = (2^Q \setminus \{\emptyset\}, A, \hat{E})$
où $\hat{E} = \{P \xrightarrow{a} P' : P' = \{q : \exists p \in P - p \xrightarrow{a} q\}\}$
On considère C une composante fortement connexe de $\hat{\mathcal{A}}$ t.q
- C est accessible de Q ds $\hat{\mathcal{A}}$
- C est maximale pour l'accessibilité ds $\hat{\mathcal{A}}$
  (toute transition issue de C reste dans C)

Alors C accepte aussi $F(X)$

<u>Lemme</u> (trivial) $w \in F(X) \iff Q \cdot w \neq \emptyset$ dans $\hat{\mathcal{A}}$

<u>Preuve</u> (proposition)
Si w accepté par C (a un chemin dans C), alors $Q \cdot w \neq \emptyset$ et $w \in F(X)$.
Réciproquement, si $w \in F(X)$. Comme C accessible, il existe u $Q \cdot u \in C$. Comme $\mathcal{A}$ fortement connexe, il existe v tel que $uvw \in F(X)$. Donc $Q \cdot uvw \neq 0$ Comme $Q \cdot u \in C$ et C maximale, w a un chemin dans C.

Proposition. La procédure précédente préserve la localité.

Preuve On suppose $\mathcal{A}$ local.. Supposons $P \xrightarrow{w} P$ $\quad P' \xrightarrow{w} P'$ dans C
~~Supposons~~ Soit $p \in P$
Pour tout $k \geq 1$, il existe $p_k \in P$ t.q $p_k \xrightarrow{w} p_{k-1} \cdots p_1 \xrightarrow{w} p$
On choisit $k \neq k'$ $p_k = p_{k'} = q$ $\quad q \xrightarrow{w^{k-k'}} q$ et donc $q \xrightarrow{w} q$
car $\mathcal{A}$ local. q est <u>unique</u> par la localité
Claim : $P = \{p : \exists n \; q \xrightarrow{w^n} p\}$
On a déjà prouvé $\subseteq$. Réciproquement comme $q \in P$ et $P \cdot w = P$
On a aussi $\supseteq$.
et donc $P = \{p : \exists n \; q \xrightarrow{w^n} p\} = P'$

Morphisme d'automate

$$\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$$
$$\mathcal{A} = (P, A, E) \qquad \mathcal{B} = (Q, A, F)$$

$\mu : P \longrightarrow Q$ t.q.

Si $p \cdot a$ existe, alors $\mu(p) \cdot a$ existe et $\mu(p \cdot a) = \mu(p) \cdot a$

- Rq Tout chemin $p_0 \xrightarrow{a_1} p_1 \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_n} p_n$ se projette $\mu(p_0) \xrightarrow{a_1} \mu(p_1) \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_n} \mu(p_n)$

donc $S(\mathcal{A}) \subseteq S(\mathcal{B})$

- Si de plus $p \cdot a$ existe $\Leftrightarrow \mu(p) \cdot a$ existe et $\mu(p) \cdot a = \mu(p) \cdot a$

alors $S(\mathcal{A}) = S(\mathcal{B})$ si μ surjectif

Minimisation

Soit $\mathcal{A}$ automate det. $\mathcal{A} = (Q, A, E)$

On definit la relation $\sim$ sur Q

$q \sim q' \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall w \in A^* \quad q \cdot w$ existe $\Leftrightarrow q' \cdot w$ existe

On peut définir $\mathcal{A}/\sim = (Q/\sim, A, E/\sim)$

$E/\sim = \{ [q]_\sim \xrightarrow{a} [q \cdot a]_\sim : q \in Q, a \in A \}$

On a un morphisme surjectif de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{A}/\sim$
donc $S(\mathcal{A}) = S(\mathcal{A}/\sim)$

Proposition
L'automate $\mathcal{A}/\sim$ admet un mot synchronisant

Preuve $rg(u) = \# Q \cdot u$

Soit u de rg minimal non nul. Si $rg(u) > 1$

$p, q \in Q \cdot u$, p comme $p \not\sim q$, il existe w tq
$p \cdot w$ existe, $q \cdot w$ n'existe pas ou l'inverse

On prend $u' = uw$ $\quad rg(uw) < rg(u) \to$ contradiction

Prop Si $\mathcal{A}$ fortement connexe, alors $\mathcal{A}/\sim$ est quotient (par morphisme) de tout autre automate det et fortement connexe pour $S(\mathcal{A})$

$P \quad Q$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\dot{=}X$

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux aut. det et fortement connexe. et $S(\mathcal{A}) = S(\mathcal{B})$

On montre que $\mathcal{A}/_\sim \equiv \mathcal{B}/_\sim$

Soit u mot synchronisant pour $\mathcal{A}/\sim$
$\quad v$ - - $\mathcal{B}/\sim$

Comme $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ fortement connexe, il existe w, tq $uwv \in F(X)$
uwv mot synchronisant pour $\mathcal{A}, \mathcal{B}$.

Soit p, q tq $P \cdot uwv = \{p\}$
$Q \cdot uww = \{q\}$

$\text{future}(p) = \text{future}(q) = \{z : uwvz \in F(X)\}$

Soit $p' \in \mathcal{A}/\sim$

$p' = p \cdot z$, soit $q' = q \cdot z$

$\text{future}(p') = \{t : uwvzt \in F(X)\} = \text{future}(q')$

L'application $P/\sim \longrightarrow Q/\sim$
$p' = p \cdot z \longmapsto q' = q \cdot z$

est un isomorphisme