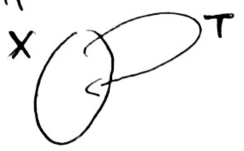
Cours dynamique symbolique

Cours n°2

Rappel du contexte



$x_0, T(x_0), T^2(x_0), \dots$

$a_0, a_1, a_2, \dots$

Suite de symboles $\rightarrow$ Alphabet A fini

Ex $A = \{0, 1\}$
$A = \{a, b\}$

Suite infinies $A^{\mathbb{N}}$ $\quad x = a_0 a_1 a_2 a_3 \dots \quad a_i \in A$

bi-infinies $A^{\mathbb{Z}}$ $\quad x \quad \dots a_{-2} a_{-1} a_0 a_1 a_2 \dots$

Tranformation T (shift)

$x \in A^{\mathbb{N}}$ $\quad T(x = a_0 a_1 a_2) = a_1 a_2 a_3 \qquad T((a_n)_{n \geq 0}) = (a_{n+1})_{n \geq 0}$

$T((a_n)_{n \in \mathbb{Z}}) = (a_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}$

$x \in A^{\mathbb{Z}}$ $\quad T(x)_i = x_{i+1}$

Bijective sur $A^{\mathbb{Z}}$, surjective sur $A^{\mathbb{N}}$

Distance $\quad d(x, x') = 2^{-\max\{k \,:\, x[0\,k] = x'[0\,k]\}}$

$\rightarrow$ Topologie discrète sur A

— produite sur $A^{\mathbb{N}}$ et $A^{\mathbb{Z}}$

$\hookrightarrow$ Full shift

Exemple $x = a_0 a_1 a_2$

Orbite $\mathcal{O}(x) = \{x, T(x), T^2(x), \dots$

$T(\mathcal{O}(x)) \subseteq \mathcal{O}(x)$

Pas fermé

$\overline{\mathcal{O}(x)}$ Système dynamique

Exemple $x = 01010101$

* $\overline{\mathcal{O}(x)} = \{0101\dots, 1010\}$ fini T surjectif

$F(X) = (1+\varepsilon)(01)^*(\varepsilon+0) = (0+1)^* \setminus (0+1)^*(00+11)(0+1)^*$

x periodique $\longrightarrow$ $\mathcal{O}(x) = \overline{\mathcal{O}(x)}$ fini

x ult periodique $\longleftrightarrow$ $\mathcal{O}(x)$ fini

* $x = 0100110000\,1111\,\underbrace{0 \cdots 0}_{8}\underbrace{1 \cdots 1}_{8}$ $H(X) = 0$

$\mathcal{O}(x)$ non fermé

$\overline{\mathcal{O}(x)} = \mathcal{O}(x) \cup \{0^\omega, 1^\omega\}$

* $x = 01\,0001\,1011\,000\,001 \dots 111 \dots$

$\mathcal{O}(x)$ den

$\overline{\mathcal{O}(x)} = A^{\mathbb{N}}$

* $\sigma :$ $0 \to 01$, $1 \to 0$ $\sigma^\omega(0) = 010\dots$

$\mathcal{O}(x)$ den

$\mathcal{O}(x)$ non den

Sous-shift X sous-shift de $A^{\mathbb{N}}$ ($A^{\mathbb{Z}}$) si

* $T(X) \subseteq X$
* X fermé pour la topologie

$$H(X) = \log \varphi \qquad \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$X \longrightarrow F(X)$ ensemble des <u>facteurs</u> <u>finis</u> des suite de X

Rq: $F(X)$ est

* clos par facteurs
* extensible à droite (si $A^{\mathbb{N}}$) et (à gauche) si $A^{\mathbb{Z}}$

  $w \in F(X)$, $\exists a \in A$ $wa \in F(X)$

Soit $L \subseteq A^*$

$L \longrightarrow X = \{ x : \text{tout facteur de } x \text{ est dans } L \}$

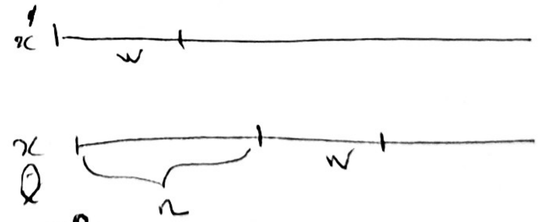
$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr] \arrow[dd, equal] & \\ & F(X) \arrow[dl] \\ X' & \end{tikzcd}$$

<u>Thm</u> les applications $X \to F(X)$, $L \to X$ sont inverse l'une de l'autre

Preuve Bien sur $X' \supseteq X$

soit $x' \in X$

$w \in F(X)$



$d(T^n(x), x') \leq 2^{-n}$ $\longrightarrow$

Autre exemples

$X = \left| \begin{matrix} \text{mots} \\ \text{suite} \end{matrix} \right.$ sans 11 de type fini

$F(X) =$ mots sans 11

X block max. de 1 consécutifs sofique
on une long paire

Entropy $H(X) = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\log_2 \# (F(X) \cap A^n)}{n}$

$I_{n+1} = P_n$

$P_{n+1} = I_n + P_{n-1}$

$\begin{pmatrix} P_{n+1} \\ I_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_n \\ I_n \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix}$