Complexité en temps

Exercice 1 **Existence de fonctions à sens unique**

Supposons qu'il existe :
- une bijection f des entiers sur n bits vers les entiers sur n bits, pour tout n (*i.e.* sur une entrée x de n bits, $f(x)$ est un entier sur n bits tel que $f(x) \neq f(y)$ quand $x \neq y$).
- la fonction se calcule en temps polynomial (étant donné un entier x sur n bits, une machine de Turing retourne $f(x)$ en au plus $O(n^k)$ pas de calculs pour une constante k fixée.
- la fonction inverse de f, f^{-1} ne peut pas se calculer en temps polynomial. (On dit que c'est une fonction à sens unique.)

1. Montrer que si une telle bijection existe, alors $P \neq NP$. (Idée : Montrer que le langage $L = \{(x, y) : f(x) < y\}$ appartient à $NP \setminus P$.)

2. Montrer de plus, que si elle existe, alors $NP \cap co - NP \neq P$.

Exercice 2

Montrer que si $P = NP$, alors tout langage de NP sauf les langages triviaux $\emptyset$ et A^* est NP-complet. Pourquoi doit-on exclure ces langages triviaux ?

Exercice 3

Une formule booléenne est en forme normale disjonctive (DNF) si elle est une disjonction de clauses et chaque clause est une conjonction de littéraux. Le problème DNF-satisfiabilité DNFSat est le suivant :
INSTANCE : une formule booléenne $\phi \in$ DNF.
QUESTION : Est-ce que ϕ est satisfiable ?

1. Montrer que DNFSat $\in P$.

2. Il est bien connu que, pour toute formule booléenne ϕ, on peut construire une formule booléenne ψ dans DNF qui est équivalente à ϕ. Pourquoi ce fait avec **1.** n'implique pas que SAT est dans P ?

Pour tout entier naturel fixé k, on définit SAT_k de la manière suivante :
INSTANCE : une formule booléenne $\phi \in$ CNF avec k clauses.
QUESTION : Est-ce que ϕ est satisfiable ?

3. Montrer que $\mathrm{SAT}_k \in P$.

4. Considérer l'algorithme suivant pour $3-\mathrm{SAT}$: sur l'entrée ϕ, compter le nombre de clauses k de ϕ, utiliser ensuite l'algorithme en temps polynomial pour SAT_k qu'on a conçu à la question précédente. Pourquoi il n'implique pas que $3 - \mathrm{SAT}$ est dans P ?

5. Montrer que si vous avez un algorithme qui décide SAT, alors vous avez un algorithme qui trouve une solution.

6. Le problème du voyageur de commerce est le suivant : étant donné un graphe orienté avec un poids sur chaque arc et une valeur k, est-il possible de faire un tour (visiter chaque sommet au moins une fois) tel que le poids du voyage soit inférieur à k ? Comment trouver une solution à ce problème si vous savez le décider ?

Exercice 4 **Coloriage**

Le problème de COLORIAGE est le suivant :
INSTANCE : un graphe non-orienté $G = (V, E)$ et un entier positif k.
QUESTION : Est-il possible de colorier les sommets de G avec au plus k couleurs différentes de telle manière que les sommets adjacents aient des couleurs différentes ?

Considérer la réduction suivantes des instances de SAT vers les instances de COLORIAGE. Soit ϕ une formule arbitraire en CNF, avec des variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ et les clauses $C_1, C_2, \dots, C_r$. Étant donné ϕ, construire un graphe $G = (V, E)$ avec

$$
\begin{array}{rcl}
V & = & \{v_0, \dots, v_n\} \cup \{x_1, \dots, x_n\} \cup \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\} \cup \{C_1, \dots, C_r\}; \\
E & = & \{\{v_i, x_j\}, \{v_i, \bar{x}_j\} \mid 1 \leq i, j \leq n \text{ et } i \neq j\} \\
 & \cup & \{\{v_i, v_j\} \mid 0 \leq i < j \leq n\} \\
 & \cup & \{\{v_0, C_k\} \mid 1 \leq k \leq r\} \\
 & \cup & \{\{x_i, \bar{x}_i\} \mid 1 \leq i \leq n\} \\
 & \cup & \{\{x_i, C_k\} \mid x_i \text{ n'est pas un littéral de } C_k\} \\
 & \cup & \{\{\bar{x}_i, C_k\} \mid \neg x_i \text{ n'est pas un littéral de } C_k\}.
\end{array}
$$

1. Dessiner le graphe G pour la formule $\phi = (\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$.

2. Montrer que la réduction précédente s'exécute en temps polynomial de SAT vers COLORIAGE.

3. En déduire que COLORIAGE est NP-complet.

Exercice 5 **Emploi du temps**

Le problème suivant, EMPLOIDUTEMPS intervient lors de la préparation du concours d'entrée à l'École.
INSTANCE : Un ensemble P d'examens, un ensemble S de slots de temps, un ensemble $C = \{c_1, \dots, c_k\}$ de candidats et pour chaque candidat c_i, un ensemble $P_i \subseteq P$ d'examens qu'il est supposé passer.
QUESTION : Est-ce qu'il existe une assignation des examens dans les slots de temps qui évite les collisions ? (Une collision apparaît quand un candidat doit passer deux examens en même temps.)

Montrer une réduction entre COLORIAGE et EMPLOIDUTEMPS pour montrer que ce dernier problème est NP-complet.

Exercice 6 **Circuit hamiltonien**

Le problème du circuit hamiltonien est le suivant :
INSTANCE : $G = (V, E)$ un graphe orienté.
QUESTION : Existe-t-il un circuit dans G qui passe une et une seule fois par chaque sommet ?

1. Montrer que ce problème est NP-complet (on pourra réduire 3-SAT à ce problème).

2. Montrer que le problème du cycle hamiltonien pour les graphes non-orientés est aussi NP-complet.