Décidabilité

Exercice 1

Soient L et L' deux langages sur le même alphabet A. On représente par $L \oplus L'$ la différence symétrique de L et L' :

$$L \oplus L' = \{x \mid x \text{ est dans } L \text{ ou } L' \text{ mais pas les deux}\}.$$

1. Supposons que L est récursivement énumérable (r.e.). Alors,
- si L' est r.e., $L \oplus L'$ est-il r.e. ?
- si L' est décidable, $L \oplus L'$ est-il r.e. ?
- si L' est fini, $L \oplus L'$ est-il r.e. ?

2. Supposons que L est décidable. Alors,
- si L' est r.e., $L \oplus L'$ est-il décidable ?
- si L' est décidable, $L \oplus L'$ est-il décidable ?
- si L' est fini, $L \oplus L'$ est-il décidable ?

Exercice 2

Soit $J = \{w \mid w = 0x \text{ avec } x \in L_\in \text{ ou } w = 1y \text{ avec } y \notin L_\in\}$.

Montrer que J n'est ni décidable ni indécidable.

Exercice 3

Les langages suivants sont-ils décidables, récursivement énumérables ?

1. $L_1 = \{\langle M, w\rangle \mid M$ est une MT et M visite un même état plusieurs fois pendant la lecture de $w\}$.

2. $L_2 = \{\langle M, w\rangle \mid M$ est une MT et M visite q_{start} plusieurs fois pendant la lecture de $w\}$.

3. $L_3 = \{\langle M\rangle \mid M$ est une MT et M visite un même état plusieurs fois pendant la lecture de chaque mot$\}$.

Exercice 4 — **PCP à une lettre**

Montrer que le problème de correspondance de Post est décidable pour un alphabet à une lettre.

Exercice 5 — **Automates à deux têtes de lecture**

Un *automate fini déterministe à deux têtes de lecture* (2-AFD) est un automate qui a deux têtes de lecture (on ne peut pas écrire) bidirectionnelles) qui peuvent être contrôlées indépendamment et aller chacune à droite ou à gauche. Il y a une cellule blanche à gauche et une à droite du mot pour le délimiter. Un mot est accepté s'il arrive dans un état terminal.

1. Montrer que le langage $\{a^n b^n c^n, n \in \mathbb{N}\}$ est reconnu par un 2-AFD tel automate.

2. Montrer que $A_{2AFD} = \{\langle M, w\rangle \mid M$ est un 2-AFD et M accepte $w\}$ est décidable.

3. Montrer que $E_{2AFD} = \{\langle M\rangle \mid M$ est un 2-AFD et $L(M) = \emptyset\}$ est indécidable.

Exercice 6 **Fonctions calculables**

Une fonction $f : A^* \to A^*$ est calculable s'il existe une MT qui s'arrête sur chaque entrée $x \in A^*$ et écrit $f(x)$ sur sa bande de sortie.

1. Montrer en utilisant un argument de dénombrement qu'il existe des fonctions de $\{0,1\}^*$ vers $\{0,1\}^*$ qui ne sont pas calculables.

2. Si f est une fonction calculable, montrer que l'ensemble d'arrivée de la fonction est un langage récursivement énumérable.

3. Donner un exemple explicite de fonction calculable f dont l'ensemble d'arrivée n'est pas un langage décidable.

Exercice 7 **Le castor affairé**

Le problème des « busy beavers » (en français : « castors affairés ») a été introduit par Radó, dans le but de définir « simplement » une fonction non calculable. Le modèle de machines de Turing considéré est le suivant : on suppose les machines déterministes, possédant un ruban bi-infini, un alphabet réduit à $\{0,1\}$ (on ne distingue pas les 0 du symbole blanc). On suppose de plus que les machines possèdent un unique état final, duquel aucune transition ne sort, et qui n'est pas compté parmi les états de la machine. Enfin, on considèrera toujours un ruban initialement complètement blanc. La fonction de Radó, notée $\Sigma(n)$, est définie comme le nombre maximum de 1 écrits sur la bande (pas nécessairement consécutifs) après qu'une machine à n états s'est arrêtée.

1. Justifier l'existence de $\Sigma(n)$ pour tout $n \geq 1$.

2. Calculer $\Sigma(1)$ et $\Sigma(2)$. Montrer que $\Sigma(3) \geq 6$ (cette borne est en fait optimale).

3. Montrer que la fonction Σ est croissante.

Le modèle de fonction calculable considéré est le suivant : f est calculable ssi il existe une machine de Turing qui, sur un ruban contenant initialement n symboles 1 consécutifs à droite du symbole blanc de départ, s'arrête après un nombre fini de déplacements en produisant un bloc de $f(n)$ symboles 1 consécutifs.

4. Soit f une fonction calculable par une MT à k états. Montrer que $f(n) \leq \Sigma(k+n)$.

5. Montrer que la fonction de Radó n'est pas calculable.