Complexité en espace

Exercice 1 **Machines en espace $o(\log\log n)$**

Le but de ce problème est de montrer qu'un langage accepté par une machine de Turing en espace $o(\log\log n)$ est nécessairement rationnel. Comme pour l'espace logarithmique, on considère une machine $M = (Q, A, \Gamma, E, q_0, F, \#)$ ayant une bande d'entrée sur la laquelle elle n'écrit pas et une bande de sortie dont la tête de lecture ne recule jamais. Sans perte de généralité, on suppose que M a une seule bande de travail. On suppose en outre que la machine M n'a pas de calcul infini. On note $s(n)$ l'espace maximal utilisé par M sur les entrées de taille n.

1. Montrer que si $s(n)$ est borné par une constante, alors M accepte nécessairement un langage rationnel.

On appelle configuration locale de la machine un triplet formé de l'état interne, du contenu de la bande de travail et de la position de la tête de lecture sur cette bande de travail. Les positions des têtes de lecture sur les bandes d'entrée et de sortie ne sont pas prises en compte.

2. Donner une borne $N(n)$ du nombre de configurations locales de M en fonction de $s(n)$.

On suppose maintenant que M n'accepte pas un langage rationnel. On dit qu'une étape de calcul $C \to C'$ de M franchit la frontière entre les cases k et $k+1$ si la tête de lecture de la bande d'entrée passe de la case k à la case $k+1$ ou de la case $k+1$ à la case k. Soit $\gamma = C_0 \to \ldots \to C_n$ un calcul de M. Soit $i_0 < \ldots < i_m$ la suite des indices où les étapes $C_i \to C_{i+1}$ franchissent la frontière k. On appelle suite des franchissements de γ en k, la suite de configurations locales $C'_0, \ldots, C'_m$ où $C'_j = C_{i_j+1}$. C'est la configuration locale de la machine juste après le franchissement qui est prise en considération.

3. Montrer que pour chaque entier k, il existe un mot x_k le plus court possible tel que l'espace utilisé par x_k est au moins k.

On note n_k la longueur de x_k et γ_k le calcul de M sur x_k.

4. Montrer que parmi les n suites de franchissements de γ_k, il y a en a au moins $n/2$ distinctes.

5. On note m_k la longueur maximale d'une suite de franchissements de γ_k. Montrer que $n \le 4N(n_k)^{m_k}$ où $N(n)$ est le nombre de configurations de M trouvé à la question **1**.

6. Montrer que $m_k \le 2N(n_k)$.

7. Montrer finalement que $s(n) = \Omega(\log\log n)$. Ceci signifie que $s(n) \ge K \log\log n$ pour une constante K et pour n assez grand.

Pour tout entier n, on note $(n)_2$ l'écriture en binaire de n. Soit L le langage défini par

$$L = \{(0)_2\#(1)_2\#(2)_2\#\ldots\#(2k-1)_2 \mid k \ge 0\}.$$

8. Montrer que L n'est pas rationnel.

9. Montrer que L peut être accepté par une machine de Turing déterministe en espace $O(\log\log n)$.