Théorème de Rice sur les ensembles récursivement énumérables

Wenjie Fang

ENS

January 13, 2010

1. Introduction
2. Théorème de Rice pour décidabilité
3. Théorème de Rice pour décidabilité partielle

Problématique

Dans le domaine des languages récursivement énumérables, il y a des propriétés diverses. Parfois on veut savoir si un language r.é. procède une certaine propriété ou pas.
Mais ceci n'est pas toujours possible.
Question: Pour quelles propriétés on peut décider? Ou au moins énumerer récursivement?

Préliminaire

Pour les languages r.é., on s'encardre dans $(0+1)^*$.

Définition

On note l'ensemble des languages r.é. $\mathcal{R}$.
Une propriété $\mathcal{P}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{R}$.
Un language L est dit d'avoir une propriété $\mathcal{P}$ si $L \in \mathcal{P}$.

On parle plutôt de machine de Turing que de language r.é.
On va imposer un codage naturel aux machines de Turing.

Notation

Pour une machine de Turing M, on note $\langle M \rangle$ son codage naturel, $\mathcal{L}(\langle M \rangle)$ son language reconnu.

Avec cette application $\mathcal{L}$, on peut associer un language à une classe de machines qui le reconnaissent.

Définition

Une propriété $\mathcal{P}$ est dite décidable (resp. r.é.) si $\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{P}) \subset \Sigma^*$ est un language décidable (resp. r.é.).

Propriétés décidables

Théorème

Seules les propriétés triviales sont décidables.

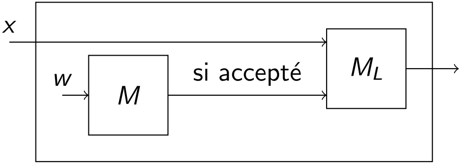
On utilisera le fait que le language suivant n'est pas décidable.

Définition

$L_u = \{\langle M, w\rangle | M \; accepte \; w\}$

Démonstration

Soit $\mathcal{P}$ une propriété non triviale, donc son complément l'est aussi.
Quitte à prendre le complément, on suppose que $\emptyset \notin \mathcal{P}$.
Il existe $L \in \mathcal{P}, L \neq \emptyset$. Soit M_L une machine pour L.
Pour $\langle M, w \rangle$, on construit une machine M^*.



On peut calculer $\langle M^* \rangle$ à partir de $\langle M, w \rangle$.
Or, $\mathcal{L}(\langle M^* \rangle) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \langle M, w \rangle \in L_u$, exclu!
Les propriétés triviales sont facile à décider. $\square$

Propriétés récursivement énumérables

Théorème

Une propriété $\mathcal{P}$ est r.é. si et seulement si elle vérifie les trois conditions suivantes:

1. Le sous-ensemble des languages finis dans $\mathcal{P}$ est r.é..
2. Si un language infini $L \in \mathcal{P}$, il existe un language fini L' contenu dans L qui est dans $\mathcal{P}$.
3. Si un language $L \in \mathcal{P}$ et un autre language $L' \in \mathcal{R}$ contenant L, alors $L' \in \mathcal{P}$.

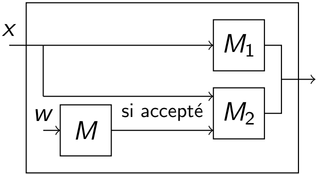
Cela a l'air d'être bien plus compliqué, mais en fait pas vraiment......
On commence par trois lemmes qui sont en fait la partie de nécessité, à l'aide de $\overline{L_u}$, qui n'est pas r.é.

Lemme 1

Lemme

Dans une propriété $\mathcal{P}$, s'il existe $L_1 \in \mathcal{P}$ et $L_2 \in \mathcal{R}$, $L_1 \subset L_2$, $L_2 \notin \mathcal{P}$, alors $\mathcal{P}$ n'est pas r.é.

Démonstration: par l'absurd
Supposons $\mathcal{P}$ soit r.é. M_1, M_2 acceptent respectivement L_1, L_2. Pour $\langle M, w \rangle$, on construit une machine M^*.



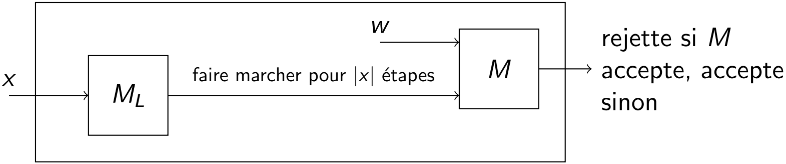
$\mathcal{L}(M^*) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \langle M, w \rangle \in \overline{L_u}$, exclu! $\square$
Remarque: Si on échange M_1 et M_2, on n'a que $\mathcal{P}$ non décidable.

Lemme 2

Lemme

Dans une propriété $\mathcal{P}$, s'il existe un language infini $L \in \mathcal{P}$ tel que pour tout $L' \subset L$ fini, $L' \notin \mathcal{P}$, alors $\mathcal{P}$ n'est pas r.é.

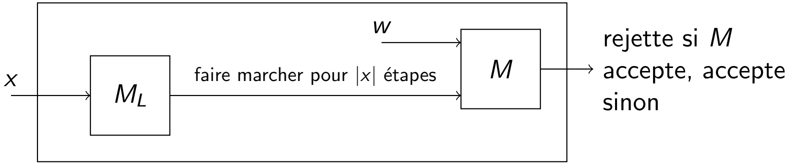
Démonstration: par l'absurd
Supposons $\mathcal{P}$ soit r.é. M_L accepte L. Pour $\langle M, w \rangle$, on construit une machine M^*.



Lemme 2 (suite)

Lemme

Dans une propriété $\mathcal{P}$, s'il existe un language infini $L \in \mathcal{P}$ tel que pour tout $L' \subset L$ fini, $L' \notin \mathcal{P}$, alors $\mathcal{P}$ n'est pas r.é.



$$\langle M, w\rangle \notin \overline{L_u} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \mathcal{L}(M^*) = L \cap (0+1+\epsilon)^n$$
$$\langle M, w\rangle \in \overline{L_u} \Rightarrow \mathcal{L}(M^*) = L \text{ infini}$$
$$\langle M, w\rangle \in \overline{L_u} \Leftrightarrow \mathcal{L}(M^*) \in \mathcal{P}, \text{ exclu!}$$

$\square$

Lemme 3

D'apès les lemmes 1 et 2, si une propriété est r.é., elle est déterminée par les languages finis dedans.
On peut faire un codage simple pour coder les languages finis comme des ensembles. (e.g. $1 \to 11, 0 \to 10, \textit{virgule} \to 01, \textit{fin} \to 00$)

Lemme

Pour une propriété $\mathcal{P}$ r.é., l'ensemble des codages de languages finis dans $\mathcal{P}$ est r.é.

On utilisera un générateur de couple *Couple* qui est en fait une machine qui calcule la réciproque de la bijection $(i, j) \mapsto \frac{(i+j)*(i+j+1)}{2} + j$ entre $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N}$.

Lemme 3 (suite)

Lemme

Pour une propriété $\mathcal{P}$, l'ensemble des codages de languages finis dans $\mathcal{P}$ est r.é.

Démonstration: par construction
Avec M une machine pour $\mathcal{P}$, on construit une machine qui fait les choses suivantes.

1. Générer une autre couple d'entiers (i, j) avec *Couple*
2. Vérifier si i est codage d'un language fini. Sinon, revenir à 1.
3. Construire le codage de M_i, qui décide le language fini de codage i.
4. Faire marcher M sur $\langle M_i \rangle$ pour j étapes.
5. Si c'est accepté, écrire i sur la bande de sortie.
6. Revenir à 1.

C'est une machine qui énumère l'ensemble des codages de languages finis dans $\mathcal{P}$.

Démonstration du théorème

Théorème

Une propriété $\mathcal{P}$ est r.é. si et seulement si elle vérifie les trois conditions suivantes:

1. Le sous-ensemble des languages finis dans $\mathcal{P}$ est r.é..
2. Si un language infini $L \in \mathcal{P}$, il existe un language fini L' contenu dans L qui est dans $\mathcal{P}$.
3. Si un language $L \in \mathcal{P}$ et un autre language $L' \in \mathcal{R}$ contenant L, alors $L' \in \mathcal{P}$.

Démonstration: La nécessité est donnée par les trois lemmes. Il suffit de démontrer que ces trois conditions suffisent.
Etant donné $\mathcal{P}$ vérifiant les trois conditions, on va construire une machine qui accepte $\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{P})$.
Idée: Pour montrer que $L \in \mathcal{P}$, il suffit de trouver une partie finie de L qui est dans $\mathcal{P}$.

Démonstration du théorème (suite)

D'après le lemme 3, il existe un énumérateur E des codages des languages finis dans $\mathcal{P}$.
On construit une machine M^* qui prend en argument $\langle M \rangle$ et qui fait la chose suivante.

1. Générer une autre couple d'entiers (i, j) avec $Couple$.
2. Lire le i-ième language fini L_i produit par E, faire marcher E en cas échéant.
3. Faire marcher M sur chaque élément de L_i pour j étapes.
4. Si tout est accepté, accepter $\langle M \rangle$, revenir à 1 sinon.

D'après les 3 conditions, cette machine M^* accepte bien $\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{P})$. $\square$

Que signifie-t-il?

Toute propriété r.é. est uniquement engendrée par un ensemble r.é. des languages finis.

Exemple: Les propriétés suivantes ne sont pas r.é.

- L est régulier
- L est décidable.
- L n'est pas décidable.
- $L \setminus L_u \neq \emptyset$

Les propriétés suivantes sont r.é.

- Pour un language fini fixé L_0, $L_0 \subset L$
- $L \cap L_u \neq \emptyset$