Automates et mots infinis

Thibaut Verron

ENS

14 janvier 2010

Sommaire

Section

Définition

Soit A un alphabet. Un mot infini sur A est une suite infinie de lettres, notée $a_0 a_1 \cdots a_n \cdots$. On note A^ω l'ensemble des mots infinis sur A et on pose $A^\infty = A^* \cup A^\omega$.

La concaténation de mots finis s'étend en une opération $A^* \times A^\infty \to A^\infty$, de sorte qu'on peut définir le produit d'un sous-ensemble de A^* par un sous-ensemble de A^∞. On peut également définir des morphismes de mots infinis.
On définit une nouvelle opération appelée itération infinie $A^* \to A^\omega$ par

$$X^\omega = \{x_0 x_1 \cdots \mid \forall i \in \mathbb{N}, x_i \in X \setminus \{\varepsilon\}\}$$

Langages ω-rationnels

Définition

La classe des langages ω-rationnels de A^∞ est le plus petit ensemble $\mathcal{R}$ de parties de A^∞ tel que :

- $\emptyset \in \mathcal{R}$ et $\forall a \in A, \{a\} \in \mathcal{R}$
- $\mathcal{R}$ est stable par union finie
- $\mathcal{R}$ est stable par produit :

$$\text{si } X \subset A^*, Y \subset A^\infty, X \in \mathcal{R} \text{ et } Y \in \mathcal{R} \Rightarrow XY \in \mathcal{R}$$

- $\mathcal{R}$ est stable par étoile et itération infinie

Il est noté $\mathcal{R}at(A^\omega)$.

Section

Automates de Büchi

Définition

Un automate de Büchi est un quintuplet $\mathcal{A} = (Q, A, E, I, F)$, parfois noté $\mathcal{A} = (E, I, F)$ où :

- Q est un ensemble (supposé fini dans la suite) d'états
- A est l'alphabet
- E est un ensemble de transitions
- I et F sont des sous-ensembles de Q appelés ensembles des états initiaux et finaux

L'ensemble des mots reconnus par un automate de Büchi est l'ensemble des mots définissant un chemin initial (partant d'un état initial) et final (visitant F une infinité de fois). Cet ensemble est noté $L^{\omega}(\mathcal{A})$.

Exemple

Soit $\mathcal{A}$ l'automate représenté ci-dessous. Cet automate n'est pas déterministe.

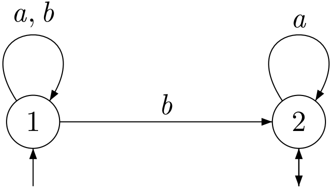

FIGURE: Exemple d'automate non déterministe

Exemple

Soit $\mathcal{A}$ l'automate représenté ci-dessous. Cet automate n'est pas déterministe.

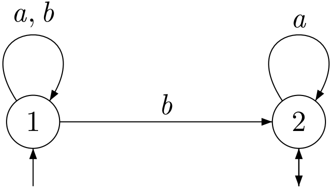

FIGURE: Exemple d'automate non déterministe

$$L^+(\mathcal{A}) = (a+b)^+ = A^* \setminus \{\varepsilon\}$$

Exemple

Soit $\mathcal{A}$ l'automate représenté ci-dessous. Cet automate n'est pas déterministe.

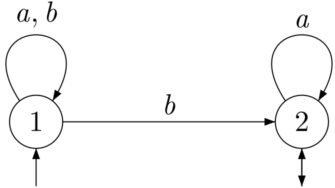

FIGURE: Exemple d'automate non déterministe

$L^{+}(\mathcal{A}) = (a+b)^{+} = A^{*} \setminus \{\varepsilon\}$
$L^{\omega}(\mathcal{A}) = (a+b)^{*} a^{\omega}$, ensemble des mots comportant un nombre fini de b.

Théorème de Kleene

Théorème

L'ensemble des langages reconnus par un automate de Büchi est exactement l'ensemble des langages ω-rationnels.

Déterminisation des automates de Büchi

Théorème

L'ensemble des langages reconnaissables par un automate de Büchi déterministe est strictement inclus dans l'ensemble des langages ω-rationnels.

Caractérisation des langages reconnaissables par un automate de Büchi déterministe

Caractérisation

Un sous-ensemble X de A^ω est reconnaissable par un automate de Büchi déterministe (resp. déterministe fini) si et seulement si il existe un sous-ensemble (resp. rationnel) L de A^* tel que X soit l'ensemble des mots ayant une infinité de préfixes dans L.

Justification

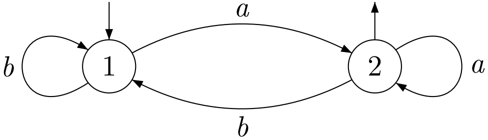

FIGURE: Un automate.

Justification

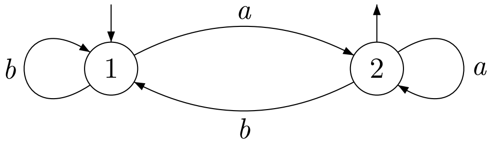

FIGURE: Un automate.

$L^\omega(\mathcal{A}) = (b^* a)^\omega$, ensemble des mots contenant une infinité de a.

Justification

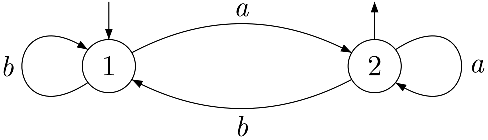

FIGURE: Un automate.

$L^{\omega}(\mathcal{A}) = (b^* a)^{\omega}$, ensemble des mots contenant une infinité de a.
$L^{+}(\mathcal{A}) = (a+b)^* a$, ensemble des mots se terminant par un a.

Exemple

Exemple

Le langage de premier exemple $(a+b)^* \, a^\omega$ n'est pas reconnaissable par un automate de Büchi déterministe.

Définition

Un automate de Muller est un quintuplet $\mathcal{A} = (Q, A, E, i, \mathcal{T})$, parfois noté $\mathcal{A} = (E, i, \mathcal{T})$ où (Q, A, E) est un automate fini *déterministe*, i l'état initial et $\mathcal{T}$ un ensemble de parties de Q, appelé table de l'automate.
Etant donné un chemin p dans l'automate, on note $\mathrm{Inf}(p)$ l'ensemble des états visités une infinité de fois dans le chemin. Un mot est reconnu par l'automate $\mathcal{A}$ si et seulement si il définit un chemin p partant de i et tel que $\mathrm{Inf}(p) \in \mathcal{T}$.

Exemple

Exemple

L'automate représenté ci-dessous, avec la table $\mathcal{T} = \{\{2\}\}$, reconnaît le même langage que l'automate précédent, l'ensemble des mots contenant un nombre fini de b.

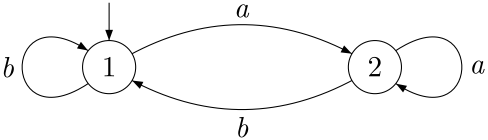

FIGURE: Automate de Muller reconnaissant X

Théorème de McNaughton

Théorème

L'ensemble des langages reconnaissables par un automate de Muller est exactement l'ensemble des langages ω-rationnels.

Section

1. Mots infinis et langages ω-rationnels

2. Reconnaissance des mots infinis
   - Automates de Büchi
   - Automates de Muller

3. Propriétés de clôture des langages ω-rationnels

Propriétés de clôture des langages ω-rationnels

Théorème

Les langages ω-rationnels ont les mêmes propriétés de clôture que les langages rationnels : par opérations booléennes (réunion, intersection, complémentation), par morphisme et morphisme inverse.

Ces stabilités peuvent toutes se démontrer sans utiliser le théorème de McNaughton.