De la trajectoire de la boule dans un billard vide et sans trous

S. Bizien

1 Définitions géométriques des mots sturmiens

1.1 Le billard

Introduction au problème Considérons une table de billard, sur laquelle il n'y a qu'une boule, pas de trous, et pas de frottements (de sorte que la trajectoire de la boule sera infinie, et constituée de segments).
Après qu'un joueur a lancé la boule, codons sa trajectoire de la façon suivante : notons 1 dès que la boule rebondit contre un grand côté (la longueur), et 0 quand la boule rebondit contre un petit côté (la largeur) (cf figure 1).
Nous obtenons ainsi un mot infini. C'est un *mot sturmien*.

Définition Un *mot sturmien* est mot infini représentant la trajectoire d'une boule de billard, c'est-à-dire tel qu'il existe un trajet sur le billard (une suite de segments vérifiant les lois de la réflexion) dont le mot est la description.

Remarques

- Une rapide observation nous permet de comprendre que l'ensemble des mots sturmiens ne dépend pas des dimensions du billard choisi pour les définir : si l'on élargit deux côtés parallèles, on obtiendra les mêmes mots sturmiens. Il semblerait même que seuls peu de paramètres (parmi tout ceux du problème initial : dimension du billard, point de départ, angle de la trajectoire, ...) suffisent à décrire un mot sturmien. Identifier les paramètres pertinents est l'objet du paragraphe suivant.
- Un tel mot a un comportement à peu près prévisible : dans la plupart des cas, connaissant les n premières lettres du mot, on peut déduire la $n+1^{\text{e}}$. Par exemple, sur la figure 1, on a l'intuition que 13^{e}lettre sera forcément un 0. Cela sera montré plus loin.
  Pour autant, de tels mots sont-ils périodiques, ou ultimement périodiques ? Une autre vision du problème nous permet de répondre à cette question.

1.2 Discrétisation de la droite

Considérations géométriques Il est clair que, s'il n'y avait pas les bords du billard, la trajectoire de la boule serait une droite. Comme les rebonds ne font que "renverser" la trajectoire, on peut considérer qu'on a là une droite du plan, en copiant et renversant le billard autant de fois que nécessaire.
En identifiant le billard (et ses copies) aux pavés $[n; n+1] \times [m; m+1]$ du plan, on obtient alors une droite dont les intersections avec les axes d'abscisses (respectivement d'ordonnées) fixes sont codées par des 0 (respectivement : des 1). Cela est représenté sur la figure 2.
Pour simplifier les calculs, nous supposerons dorénavant que les droites considérées n'atteignent pas des coins, c'est-à-dire qu'elles n'intersectent pas simultanément deux droites de la forme $y = n$ et $x = m$ où n et m sont entiers. On pourrait se passer de cette condition, en prenant la convention que de telles intersections sont codées par 01.
Nous pouvons alors introduire une nouvelle définition des mots sturmiens plus adaptée pour prouver quelques propriétés de ces mots :

Seconde définition Soit α un réel positif, β réel compris strictement entre 0 et 1, $D_{\alpha,\beta}$ la droite définie par l'équation $y = \alpha x + \beta$. Soit $(x_n, y_n) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{N}^* \cup \mathbb{N}^* \times \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ la suite des points d'intersection de $D_{\alpha,\beta}$ avec l'ensemble $\mathbb{N}^2$ du plan, dans l'ordre des valeurs de x_n croissantes.

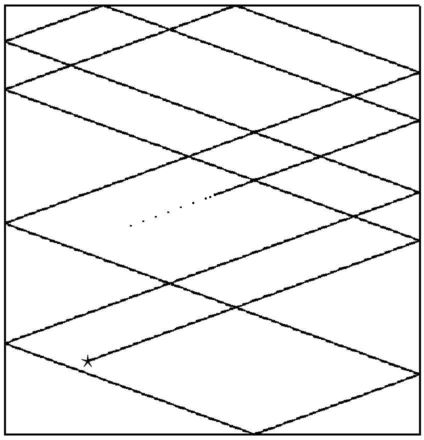

FIG. 1 – La trajectoire d'une boule sur la table de billard : 001000100010...

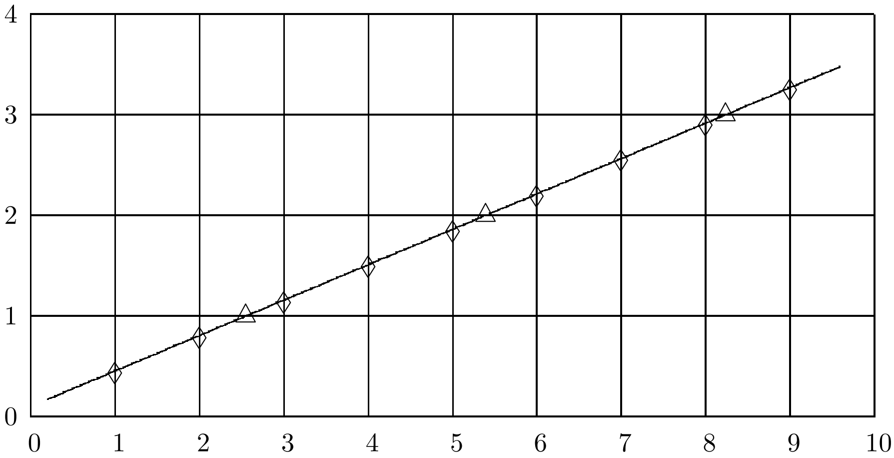

FIG. 2 – La droite discrétisée : 001000100010...

Le mot sturmien $\omega_{\alpha,\beta} = (w_n)_{n\geq 1}$ est alors défini par :

$$w_n = \begin{cases} 0 \text{ si } x_n \in \mathbb{N} \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$$

Remarques

Équivalence des définitions : D'après les considérations précédentes, tout mot sturmien est de la forme $\omega_{\alpha,\beta}$: si la boule part de la position (x_0, y_0) du billard (assimilé au pavé $[0;1] \times [0;1]$) avec l'angle θ par rapport à l'horizontale, la trajectoire définie correspondra au mot défini par : $\alpha = \tan(\theta)$ et $\beta = y_0 - \tan(\theta)x_0$. On constate alors que deux paramètres réels suffisent à décrire un mot sturmien.

– Nous pouvons considérer les points de l'ensemble $\mathbb{N}^2$ plutôt que des points de la droite, pour approcher la droite : pour $n \geq 1$, définissons le point $P_n(s_n, t_n)$ par :

$$(s_n, t_n) = \begin{cases} (x_n + 1, \lfloor y_n \rfloor) \text{ si } x_n \in \mathbb{N} \\ (\lceil x_n \rceil, y_n) \text{ sinon} \end{cases}$$

En reliant ces points, nous obtenons la suite continue de segments juste sous la courbe (figure 3).

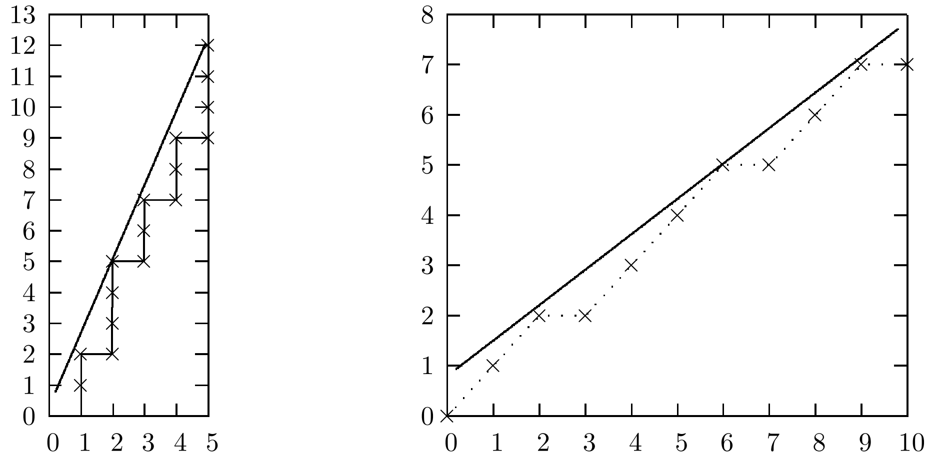

FIG. 3 – Représentation par segments inférieurs du mot : $\Lambda = 1101110110110111\ldots$

– Ces points étant introduits, remarquons que nous pouvons définir le mot $\omega_{\alpha,\beta}$ à partir des points P_n (en ajoutant le point $P_0 = (1, 0)$:

$$w_n = \begin{cases} 0 \text{ si } P_{n-1} \text{ et } P_n \text{ forment un segment horizontal} \\ 1 \text{ si } P_{n-1} \text{ et } P_n \text{ forment un segment vertical} \end{cases}$$

Cette définition va nous permettre de donner une formule définissant les w_n.

Proposition Pour $\omega_{\alpha,\beta} = (w_n)_{n\geq 1}$ un mot sturmien, on a :

$$w_n = \left[\frac{1}{\alpha+1}(\alpha(n+2)+\beta)\right] - \left[\frac{1}{\alpha+1}(\alpha(n+1)+\beta)\right]$$

où $[x]$ désigne la partie entière du réel x.

Preuve Considérons l'application du plan dans lui-même : $f : (x, y) \mapsto (x + y - 1, y)$. L'image de $D_{\alpha,\beta}$ par f est la droite définie par l'équation : $y = \frac{1}{\alpha+1}(\alpha(x + 1) + \beta)$.
Alors, en notant $Q_n(s'_n, t'_n) = f(P_n)$, on remarque que, en reliant les points Q_n, on obtient une suite de segments horizontaux ou diagonaux, juste en-dessous de la courbe (cf figure 3).
Par ailleurs, $s'_n = n$ (car $s'_0 = 0$ et $s'_{n+1} = s'_n + 1$) et $t'_n = \left[\frac{1}{\alpha+1}(\alpha(n+1)+\beta)\right]$. Nous trouvons donc :

$$\begin{aligned} w_n = 1 &\Leftrightarrow P_{n-1} \text{ et } P_n \text{ forment un segment vertical} \\ &\Leftrightarrow s_{n+1} = s_n \text{ et } t_{n+1} = t_n + 1 \\ &\Leftrightarrow s'_{n+1} = s'_n + 1 \text{ et } t'_{n+1} = t'_n + 1 \\ &\Leftrightarrow \left[\tfrac{1}{\alpha+1}(\alpha(n+1)+\beta)\right] - \left[\tfrac{1}{\alpha+1}(\alpha n+\beta)\right] = 1 \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} w_n = 0 &\Leftrightarrow t'_{n+1} = t'_n \\ &\Leftrightarrow \left[\tfrac{1}{\alpha+1}(\alpha(n+1)+\beta)\right] - \left[\tfrac{1}{\alpha+1}(\alpha n+\beta)\right] = 0 \end{aligned}$$

Remarques

– Les mots construits par la définition donnée dans la proposition sont appelés les *mots de Christoffel*.
– Grâce à cette définition, nous allons pouvoir montrer que les mots définis par un paramètre α irrationel sont apériodiques. Pour cela, nous allons construire une suite qui converge vers $\frac{\alpha}{\alpha+1}$

Définition Pour $w = (w_i)_{i \leq n}$ un mot fini sur l'alphabet $\{0, 1\}$, on définit la *hauteur* de w par :

$$h(w) = \sum_{i=1}^{n} w_i$$

Le *préfixe* de longueur n d'un mot infini w est le mot fini constitué des n premières lettres de w, noté $w(n)$.

Proposition Un mot sturmien $\omega_{\alpha,\beta}$ est (ultimement) périodique, si et seulement si α est rationnel.

Lemme La hauteur des préfixes de longueur n d'un mot sturmien défini par α et β est équivalente à $\frac{\alpha}{\alpha+1}n$ (quand n tend vers l'infini) :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{h(\omega_{\alpha,\beta}(n))}{n} = \frac{\alpha}{\alpha+1}$$

Preuve du lemme Il s'agit d'un simplification de sommes :

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{n}h(\omega_{\alpha,\beta}(n)) &= \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\alpha+1}(\alpha(i+2)+\beta)\right] - \left[\frac{1}{\alpha+1}(\alpha(i+1)+\beta)\right] \\ &= \tfrac{1}{n}\left(\left[\tfrac{\alpha}{\alpha+1}(n+2)+\tfrac{\beta}{\alpha+1})\right] - \left[\tfrac{1}{\alpha+1}(2\alpha+\beta)\right]\right) \end{aligned}$$

Dont la limite est bien $\frac{\alpha}{\alpha+1}$.

Preuve de la proposition

Sens direct : Si $\omega_{\alpha,\beta}$ est ultimement périodique, de la forme $\omega = p \cdot u \cdot u \cdot u \cdots$, alors la suite de préfixes de ω $(p \cdot u^n)_{n\geq 1}$ converge vers ω.
Or : $h(pu^n) = h(p) + nh(u)$. Donc : $\frac{h(pu^n)}{|pu^n|} = \frac{h(p)+nh(u)}{|p|+n|u|} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{h(u)}{|u|}$.
Par unicité de la limite : $\frac{\alpha}{\alpha+1} = \frac{h(u)}{|u|}$, donc α est rationnel.

Sens réciproque : Si α est rationnel, notons : $\alpha = \frac{p}{q}$ où p et q sont entiers. Alors :
$\alpha(x+q)+\beta = \alpha x + \beta + 1$. En nous plaçant dans la première représentation sous forme de droite que nous avons décrite, et en notant u le préfixe de ω correspondant aux intersections prises entre les axes $x = 0$ (exclus) et $x = q$ (inclus), nous trouvons :
$\omega_{\alpha,\beta} = u \cdot \omega_{\alpha,\beta+1} = u \cdot \omega_{\alpha,\beta}$, car décaler β d'un entier ne change rien à la définition du mot. Il apparait donc que ω est périodique.

2 Propriétés combinatoires

2.1 Mots équilibrés

Définition Un *facteur* d'un mot infini $w = (w_i)_{i\geq 1}$ sur l'alphabet {0,1} est un mot fini de la forme : $f = (f_i)_{1\leq i\leq n} = (w_{i+k})_{1\leq i\leq n}$, où k et n sont entiers. C'est une suite finie de lettres consécutives du mot w.
Un mot infini est dit équilibré si, pour tout couple (f, g) de facteurs de ce mot de même longueur, le nombre d'occurences de la lettre 1 diffère d'au plus un :

$$|h(f) - h(g)| \leq 1$$

Remarque Si un mot est équilibré, le nombre de 0 dans deux facteurs de même longueur diffère aussi d'au plus 1.

Proposition Un mot sturmien est équilibré.

Preuve Notons $\omega_{\alpha,\beta}$ un mot sturmien, $\gamma = \frac{\alpha}{\alpha+1}$ et $\delta = \frac{\beta}{\alpha+1}$, choisissons n un entier, et f et g facteurs de $\omega_{\alpha,\beta}$ de taille n, définis à partir des entiers $k_f + 1$ et $k_g + 1$.
Supposons : $h(f) \geq h(g) + 2$:

$$\begin{array}{rcl} h(f) & = & \displaystyle\sum_{i=k_f+1}^{k_f+n} [\gamma(i+2)+\delta] - [\gamma(i+1)+\delta] \\ & = & [\gamma(n+k_f+2)+\delta] - [\gamma(k_f+2)+\delta] \\ & < & \gamma(n+k_f+2)+\delta-\gamma(k_f+2)-\delta+1 \\ & < & \gamma n + 1 \\ h(g) & = & \displaystyle\sum_{i=k_g+1}^{k_g+n} [\gamma(i+2)+\delta] - [\gamma(i+1)+\delta] \\ & = & [\gamma(n+k_g+2)+\delta] - [\gamma(k_g+2)+\delta] \\ & > & \gamma(n+k_g+2)+\delta-1-\gamma(k_g+2)-\delta \\ & > & \gamma n - 1 \end{array}$$

Alors : $\gamma n + 1 > 2 + \gamma n - 1$, soit $2 > 2$, ce qui est absurde.
Donc : $h(f) \leq h(g)+1$. Symétriquement : $h(g) \leq h(f)+1$, ce qui nous montre que $\omega_{\alpha,\beta}$ est équilibré.

Proposition Réciproquement, tout mot équilibré est sturmien.

Idées de la preuve La preuve étant longue, voici les idées principales :
- On montre que la suite $\frac{h(w(n))}{n}$ est de Cauchy : elle converge alors vers une valeur que l'on appelle γ, correspondant à $\frac{\alpha}{\alpha+1}$.
- On montre ensuite, par l'absurde, que pour tout τ réel, on a : $\forall n \geq 1, h(w(n)) \leq [\gamma n + \tau]$ ou $\forall n \geq 1, h(w(n)) \geq [\gamma n + \tau]$. On pose ensuite δ la borne supérieure des τ vérifiant la première condition.
- On montre enfin que : $w_n = [\gamma(n+1)+\delta] - [\gamma n + \delta]$, en utilisant la formule : $w_n = h(w(n+1)) - h(w(n))$.

La preuve complète est disponible dans [2].

Remarques
- Cela nous permet de montrer que la 13$^{\text{e}}$lettre du premier mot sturmien observé (figure 1) est forcément un 0. En effet, 000 étant facteur du mot, 101 ne peut pas l'être. Un 1 ne peut donc pas suivre une séquence 10. Ce sera donc un 0.
- 00 et 11 ne peuvent pas être simultanément facteurs d'un mot sturmien : la boule ne peut pas, dans un même parcours, rebondir successivement contre les deux bandes verticales, puis, plus loin, rebondir successivement contre les deux bandes horizontales.
- Ce résultat nous permet aussi de majorer le nombre de facteurs de longueur fixée d'un mot sturmien : pour n entier, si on a un facteur de longueur n et de hauteur h, et un autre de hauteur $h+1$, alors on a au plus $\binom{h}{n} + \binom{h+1}{n}$ facteurs de longueur n de ce mot. En fait, on peut trouver une borne bien plus petite.

2.2 Nombre de facteurs de mots sturmiens

Définition Pour w un mot sur un alphabet quelconque, on note $p(w,n)$ le nombre de facteurs distincts de longueur n de w. La *complexité* de w est alors la suite : $n \mapsto p(w,n)$.

Remarques
- La complexité d'un mot infini est une suite croissante.
- Le mot de complexité traduit bien le sens intuitif du terme. Notamment, on attend d'un mot aléatoire que sa complexité soit de la forme : $p(w,n) = t^n$ (où t est le cardinal de l'alphabet). Parallèlement, on va observer que la complexité des mots sturmiens est faible.
- Avant de montrer des résultats sur la complexité des mots sturmiens, montrons un résultat fondamental de l'étude de la complexité des mots :

Proposition Soit w un mot infini. Il existe n tel que $p(w,n) = p(w,n+1)$ si et seulement si w est ultimement périodique.

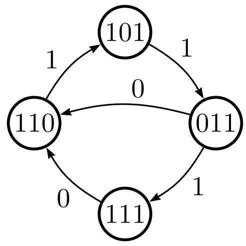

FIG. 4 – Graphe des facteurs de taille 3 de Λ

Preuve
Sens réciproque : Si w ultimement périodique : notons $w = p \cdot u \cdot u \cdots$.

Pour $n \geq |p| + |u|$, on a au plus les $|p|$ premiers facteurs, puis $|u|$ facteurs constitués de répétitions du mot u pris à partir d'un lettre arbitraire : $p(w,n) \leq |p| + |u|$. La complexité est donc une suite croissante et majorée d'entiers : elle est finalement constante.

Sens direct : S'il existe n tel que $p(w,n) = p(w,n+1)$.

Le mot étant infini, de chaque facteur de longueur n est préfixe d'au moins un facteur de longueur $n+1$: on a ainsi au moins $p(w,n)$ facteurs distincts de longueur $n+1$.

Par ailleurs, s'il existait un facteur préfixe de deux facteurs de longueur $n+1$, on aurait un $(p(w,n)+1)^{\text{e}}$facteur de longueur $n+1$. Ce n'est pas le cas : chaque facteur de longueur n est donc préfixe d'un seul facteur de longueur $n+1$.

Considérons alors le graphe orienté dont les sommets sont le facteurs de longueur n du mot, et tel qu'il existe une arête de f à g si et seulement si les $n-1$ dernières lettres de f sont les $n-1$ premières lettres de g. Étiquetons chaque arête par la dernière lettre du facteur dont elle est la destination (cf figure 4).

Intuitivement, lire le mot consiste à passer de sommets en sommets sur ce graphe comme on le ferait sur un automate : on lit la lettre étiquetant l'arête pour passer d'un facteur à l'autre. D'après les considérations précédents, une et une seule arête part de chaque sommet : le parcours du graphe correspond donc à un circuit. La lecture du mot (à partir de la n^{e}lettre au moins) correspondant à un parcours (infini) du graphe, celui-ci est constitué d'un cycle, et le parcours est ultimement périodique (le long de ce cycle).

Le mot w est donc ultimement périodique.

Corollaires

1. La complexité d'un mot infini est ou strictement croissante, ou ultimement constante.
2. S'il existe n tel que : $p(w,n) \leq n$, alors le mot est ultimement périodique.

Preuve

1. Immédiat.
2. Si $p(w,1) = 1$, le mot n'est constitué que d'une lettre : il est périodique. Sinon, $p(w,k)$ étant croissante il existe $k \leq n$ tel que : $p(w,k) = p(w,k+1)$. Le mot est alors ultimement périodique.

Proposition La complexité d'un mot équilibré w vérifie : $p(w,n) \leq n+1$ pour tout entier n.

Preuve Montrons la propriété par récurrence sur n :
Pour $n = 1$: un mot équilibré étant défini sur un alphabet de deux lettres, il apparaît : $p(w,1) \leq 2$. Supposons que l'on ait $p(w,n) \leq n+1$ pour n enter non nul. Montrons qu'il existe au plus $n+2$ facteurs de longueur $n+1$ de w.
Chaque facteur de longueur n est préfixe d'un facteur de longueur $n+1$, mais si deux facteurs distincts f et g de longueur n sont tels que $f0$, $f1$, $g0$ et $g1$ soient facteurs de w (de longueur $n+1$), alors :

- Si $h(f) = h(g)+1$: $h(f1) = h(g0)+2$. Ce n'est pas possible (car w est équilibré).
- De même, il n'est pas possible d'avoir $h(g) = h(f)+1$.
- Si $h(f) = h(g)$: f et g étant distincts, on peut en extraire des suffixes f' et g' de même longueur, mais de hauteur différente (en considérant, par exemple, le suffixe commençant après la première lettre où f et g diffèrent). Par le raisonnement ci-dessus, appliqué à $f'0$, $f'1$, $g'0$ et $g'1$, on trouve deux facteurs distincts dont les hauteurs sont écartées de 2 unités.

Cette situation est donc impossible : il y a au plus un facteur de longueur n qui est facteur de deux facteurs de longueur $n+1$: on a donc au plus $n+2$ facteurs de longueur $n+1$.

Remarques

- Il existe des mots dont la complexité est exactement la suite $n+1$: les mots sturmiens apériodiques. En effet, puisqu'ils ne sont pas ultimement périodiques, on a $p(\omega,n) > n$ pour tout entier n, et puisqu'ils sont équilibrés : $p(\omega,n) \leq n+1$. D'où : $p(\omega,n) = n+1$ pour tout entier n.
  Cela traduit l'intuition que nous pouvions avoir au début du problème : le codage de la trajectoire d'une boule dans un billard est à peu près prévisible, même si elle n'est pas périodique.
- On peut aussi montrer que, réciproquement, tout mot infini dont la complexité est égale à la suite $n+1$ est équilibré (la preuve est aussi en [2]). D'ailleurs, on définit souvent les mots sturmiens comme étant ceux dont la complexité est égale à $n+1$ (les mots périodiques ne sont alors pas sturmiens).

2.3 Langage des facteurs d'un mot sturmien

Notation Pour ω un mot sturmien, notons $F(\omega)$ le langage constitué par ses facteurs.

Proposition Pour f facteur d'un mot sturmien défini par les réels α et β :

$$\left|\frac{h(f)}{|f|} - \frac{\alpha}{\alpha+1}\right| \leq \frac{1}{|f|}$$

Preuve Soit f facteur de $\omega_{\alpha,\beta}$. Pour tout facteur g de longueur $|f|$: $\left|\frac{h(f)}{|f|} - \frac{h(g)}{|g|}\right| \leq \frac{1}{|f|}$.
Considérons la sous-suite $\frac{h(\omega_{\alpha,\beta}(n|f|))}{n|f|}$ extraite de $\frac{h(\omega_{\alpha,\beta}(n))}{n}$ (qui converge vers $\gamma = \frac{\alpha}{\alpha+1}$). Pour n entier plus grand que 1, $\omega_{\alpha,\beta}(n|f|)$ se décompose en $g_1,...g_n$ facteurs de longueur $|f|$. Alors :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{h(f)}{|f|} - \frac{h(\omega_{\alpha,\beta}(n|f|))}{n|f|}\right| &= \left|\frac{h(f)}{|f|} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{g_i}{|f|}\right| \\
&= \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{h(f)}{|f|} - \frac{g_i}{|f|}\right| \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|f|} \\
&\leq \frac{1}{|f|}
\end{aligned}$$

Cela étant vrai pour tout entier n, par convergence de la suite $\frac{h(\omega_{\alpha,\beta}(n|f|))}{n|f|}$ vers γ :

$$\left|\frac{h(f)}{|f|} - \gamma\right| \leq \frac{1}{|f|}$$

Remarque Pour la trajectoire de la boule sur le billard, ce résultat s'interprète de la façon suivante : si on connaît le début du codage de la trajectoire de la boule, on peut en déduire que la pente est dans un certain intervalle. Plus la partie que l'on connaît est longue, plus l'intervalle est petit.

Corollaire 1 Pour $\omega_{\alpha,\beta}$ et $\omega_{\alpha',\beta'}$ deux mots sturmiens et F et F' l'ensemble de leurs facteurs : si $F = F'$, alors $\alpha = \alpha'$.

Preuve Supposons : $\alpha \neq \alpha'$.
Soit $n > \frac{2}{|\gamma-\gamma'|}$, et f facteur de longueur n de $\omega_{\alpha,\beta}$. Si f est aussi facteur de $\omega_{\alpha',\beta'}$, alors :

$$\begin{aligned}
|\gamma-\gamma'| &\leq \left|\gamma - \frac{h(f)}{|f|}\right| + \left|\gamma' - \frac{h(f)}{|f|}\right| \\
&\leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \\
&< |\gamma-\gamma'|
\end{aligned}$$

Cette inégalité est absurde : si f est facteur de $\omega_{\alpha,\beta}$, il n'est pas facteur de $\omega_{\alpha',\beta'}$. On a donc : $F \neq F'$.

Corollaire 2 Pour $\omega_{\alpha,\beta}$ un mot sturmien : le langage $F(\omega_{\alpha,\beta})$ est rationnel si et seulement si α est rationnel.

Preuve

Sens direct : Supposons $F(\omega_{\alpha,\beta})$ rationnel. Par le lemme de l'étoile, on peut considérer x, u et y des mots tels que u soit non nul et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, xu^n y \in F(\omega_{\alpha,\beta})$$

Alors, la suite $\frac{h(xu^n y)}{|xu^n y} = \frac{h(x)+h(y)+nh(u)}{|x|+|y|+n|u|}$ converge vers une valeur γ rationnelle. Par la proposition : $\gamma = \frac{\alpha}{\alpha+1}$, donc α est rationnel.

Sens réciproque : Si α est rationnel, $\omega_{\alpha,\beta}$ est périodique. Notons $\omega_{\alpha,\beta} = u \cdot u \cdot \cdots$. Ses facteurs sont alors de la forme : $au^n b$ où a suffixe de u et b préfixe de u. Le langage $F(\omega_{\alpha,\beta})$ est donc rationnel.

Remarque En fait, on peu montrer que, pour certains α irrationnels, l'appartenance au langage $F(\omega_{\alpha,\beta})$ est reconnaissable par une machine de Turing non déterministe en temps linéaire (prouvé dans [1]).

Conclusion

Résultats Nous savons maintenant que, lorsque nous lançons une boule dans un billard vide et sans trous :

- la boule aura un trajet cyclique si et seulement si la pente avec laquelle nous l'envoyons est rationnelle ;
- si nous enregistrons n chocs successifs contre les bords du billard à partir de deux moments différents, les deux séquences comporteront autant de chocs sur des bords horizontaux (à une unité près) ;
- si la trajectoire n'est pas périodique, la description de cette trajectoire correspondra à un mot de complexité minimale, parmi les mots apériodiques ;
- cependant, malgré cette faible complexité, un automate fini est incapable de reconnaître le code d'un morceau du trajet.

Autres propriétés Les mots sturmiens vérifient de nombreuses autres propriétés combinatoires et algébriques, et constituent encore un thème de recherche. On peut notamment s'intéresser à différents aspects :

- les morphismes de $\{0,1\}^*$ tels que l'image d'un mot sturmien est encore un mot sturmien ;
- le rapport des mots sturmiens avec le développement en fractions continues de réels
- les propriétés du mot de Fibonacci (qui est un mot sturmien)
- les mots épisturmiens, dont la complexité est égale à $n + k$ (pour $k \geq 2$), qui forment une généralisation des mots sturmiens sur des alphabets plus grands.

Références

[1] F. Blanchard et P. Kůrka. Language complexity of rotations and sturmian sequences. *Theoretical computer science*, 209 :179–193, 1998.

[2] J. Berstel et P. Séébold. *Algebraic combinatorics on words*, volume 90 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, chapter Sturmian Words. Cambridge University Press, 2002.