Motifs Inévitables

Première partie

Introduction

Nous avons tous été confronté, dans notre vie foisonnante, à un moment ou à un autre à un motif : que ce soit celui-ci de la nappe de votre mémé ou le refrain de votre groupe de rock préféré, que vous vous intéressiez à la physique des réseaux cristallins ou plus prosaïquement à la manière dont vous souhaiteriez disposer vos plan de mimosas pour qu'ils forment un dodécaèdre régulier, les motifs sont partout. Vous avez déjà eu l'impression qu'un air de musique vous était familier, ou que vous aviez déjà vécu une situation : c'est parce que certains motifs sont inévitables, et par suite il se répètent, et ne font que se répéter sans cesse. Ce qui nous intéresse ici est de savoir si nous sommes voués à les subir ou non, c'est-à-dire s'ils sont évitables ou non.

La nature des motifs inévitables sera établie rigoureusement dans la première partie. On cherche ensuite à donner un moyen systématique pour déterminer si un motif est ou non inévitable. Enfin, on verra comment la nature inévitable du motif dépend de l'ensembe sur lequel il agit : un bassiste ne pouvant gratter que quatre cordes aura beaucoup plus de facilité à répéter des séquences (c'est d'ailleurs pour ça qu'on le paye) qu'un pianiste (qui est, par ailleurs, lui aussi payé pour ça).

Table des matières

Deuxième partie
Définitions

Définition

On utilisera deux alphabets. Le premier A={a,b,c...} est l'alphabet usuel, fini et composé de lettres. Le deuxième $E = \{\alpha, \beta, \gamma, ...\}$ est composé de variables. Les mots de E sont appelés des **motifs**

Définition

Soit A un alphabet. Le langage associé à un motif p, noté $p(A^+)$, est le langage composé de tous les mots de la forme h(p), où h est un morphisme non-effaçant de E^* dans A^* qui à chaque variable associe un élément de A^*.

Exemple

Le langage associé à $\alpha\alpha$ est $\{uu$, où $u \in A^*\}$

Définition

On dit qu'un mot rencontre un motif p si un de ses facteurs est dans $p(A^+)$. Sinon on dit qu'il évite p.

Définition

Soient 2 motifs p et p'. On dit que p divise p' (noté p|p') si en considérant p' comme un mot, il rencontre le motif p.

Si p|p' et p'|p, on dit que p et p' sont équivalents. (exemple : $\alpha\beta$ et $\beta\alpha$)

Définition

On dit que p est évitable sur un alphabet A si et seulement s'il existe une infinité de mot de A evitant p. Ceci est équivalent à l'existence d'un mot infini sur A évitant p (lemme de König). S'il n'existe pas d'alphabet évitant p, on dit que p est inévitable. S'il en existe un, on dit que p est évitable

Définition

On dit que p est k-évitable s'il est évitable sur un alphabet contenant k-lettres (le nom des lettres étant sans importance). Sinon il est dit k-inévitable

Troisième partie
Evitabilité absolue

1 Exemple : puissance d'une unique variable

La classe la plus simple de motifs est celle des puissances d'une unique variable α^0 et α^1 sont trivialement inévitables. Les choses se compliquent un peu pour de plus grandes puissances.

1.1 Proposition

1. $\alpha\alpha$ est 2-inévitable et 3-évitable
2. Pour tout $k > 2$, α^k est 2-évitable

Preuve

1. $\alpha\alpha$ est trivialement 2-inévitable. Le mot infini u = abcacbabcbac... stable par le morphisme h : a->abc , b->ac , c->b évite $\alpha\alpha$ (laissé en exercice)
2. Le mot infini de Thue-Morse t = abbabaab.. stable par le morphisme h : a->ab ,b->ba évite α^3 (De même) et par conséquent α^k pour tout $k > 2$.

2 Mots de Zimin

2.1 Proposition

Soit p un motif inévitable sur A, et ψ une variable n'apparaissant pas dans p. Alors le motif pψp est encore inévitable sur A.

Preuve Soit k = Card(A). Soit p un motif inévitable. Il existe un entier l tel que tout mot $w \in A^l$ rencontre p. Cet ensemble contient k^l éléments. Posons N= $(k^l + 1)l + k^l$. Soit $w \in A^N$

w peut être vu comme une série de $k^l + 1$ mots de A^l séparés par une lettre. Parmi ces $k^l + 1$ mots deux sont obligatoirement identiques. On peut donc écrire $w = u_0vu_1vu_2$ avec $v \in A^l$ et $|u_1| \geq 1$. Il existe un morphisme h et deux mots v_0 et v_1 tels que $v = v_0$h(p)v_1. En posant h(ψ)=$v_1u_1v_0$ on voit que w a h(pψp) comme facteur.
Donc pψp est inévitable.

2.2 Définition

On définit les mots de Zimin par récurrence :

Soient $(\alpha_n)_{n\in N}$ différentes variables de E. On pose $Z_0 = \epsilon$ et pour tout $n > 0$ $Z_n = Z_{n-1}\alpha_{n-1}Z_{n-1}$

2.3 Proposition

Les mots de Zimin sont tous inévitables

Preuve Découle de la proposition précédente

3 Algorithme de Zimin

Pour montrer que le problème de l'évitabilité est décidable, nous allons montrer que c'est équivalent à une propriété de reductibilité

3.1 Processus de réduction

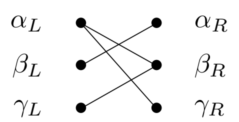
On va tout d'abord définir le processus de réduction d'un motif :

Soit p$\in E^*$ un motif. Le *graphe d'adjacence* de p, noté AG(p) , est constitué de deux colonnes de sommets qui sont des copies de E et que l'on notera E_L et E_R. Une arête relie deux sommets α_L et β_R si et seulement si $\alpha\beta$ est un facteur de p.

Aucune arête ne relie deux sommets de E_L ou deux sommets de E_R.

3.1.1 Exemple

Le graphe de p=$\alpha\beta\alpha\gamma\beta\alpha$ est :



3.2 Définition

Un sous-ensemble F de E^* est dit *libre* si pour tout α et β appartenant à F il n'existe pas de chemin reliant α_L et β_R.

Soit p un motif et F un sous-ensemble libre de E^*. On dit que p se réduit en q en une étape, noté p->q , en supprimant dans p toutes les variables contenues dans F.

On dit que p est réductible s'il existe une série de réduction en une étape menant de p à ϵ (la notion d'irréductibilité est laissée au lecteur aguéri).

Dans l'exemple précédent en supprimant l'ensmble libre $\{\alpha\}$ on obtient $\beta\gamma\beta$. En supprimant ensuite l'ensemble libre $\{\beta\}$ on obtient γ qui se réduit enfin au mot vide. Cependant, si l'on avait commencer par supprimer l'ensemble libre $\{\beta\}$, on aurait obtenu $\alpha\alpha\gamma\alpha$ qui est irréductible. L'algorithme de Zimin consiste donc à explorer toutes les séquences possibles de réduction en une étape. En pratique l'arbre à explorer peut être grand et cette méthode est plutôt inefficace.

3.3 Théorème

Un motif est évitable si et seulement s'il est irréductible.
La preuve repose sur de nombreux lemmes. On ne la traitera pas ici.

Quatrième partie
Evitabilité sur un alphabet de cardinal fixé

3.4 Définition

On appelle index d'évitabilité d'un motif p, le plus petit entier k tel que p soit k-évitable (∞ si celui-ci n'existe pas). L'index d'évitabilité indique la facilité avec laquelle le motif peut être évité. Il est noté $\mu(p)$.

Il n'existe pas d'algorithme permettant de trouver l'index d'évitabilité d'un motif p. Par exemple, on ne sait toujours pas si l'index d'évitabilité de $\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma$ est égal à deux ou à trois.

3.5 Le cas binaire

On s'intéresse maintenant au cas où les motifs contiennent uniquement deux variables (E=$\{\alpha, \beta\}$).
Il n'y a qu'un nombre fini de motifs non divisible par $\alpha\alpha$, et ceux-ci sont tous inévitables. Ainsi, les motifs binaires se regroupent en trois catégories : ceux d'index d'évitabilité égal à deux, trois ou ∞.

3.6 Majorant de la taille d'un motif 2-inévitable

3.6.1 Définition

Soit n et k > 0. On note l_{nk} le plus petit entier l (∞ si celui-ci n'existe pas) tel que tout motif de longueur supérieure à l contenant n variables soit k-évitable. On étend cette notion à k=∞ avec la convention que ∞-évitable veut dire évitable. Trivialement, $l_{nk} \leq l_{n'k'}$ si n$\leq$n' et k$\geq$k' $l_{n1} = \infty$ car tout motif est 1-inévitable .
D'après la proposition 1.1 $l_{12} = 3$ et $l_{1k} = 2$ pour tout $k \geq 3$.

3.6.2 Proposition

$l_{n\infty} = 2^n$

preuve Tout d'abord $l_{n\infty} \geq 2^n$ car le motif de Zimin Z_n est inévitable, contient n variables et est de longueur $2^n - 1$. Montrons par récurrence que si un motif p contient n variables et que p est inévitable alors $|p| < 2^n$. Pour p contenant 1 variable le résultat est vrai d'après la Proposition 1.1. Supposons que le résultat est vrai pour n. Soit p un motif inévitable contenant $n+1$ variables. Il existe une variable α n'apparaissant qu'une seule fois dans p (sinon p ne pourrait pas se réduire à l'ensemble vide). On peut donc écrire p $=p_1 \alpha p_2$ et p_1 et p_2 contiennent n variables. Comme p_1 et p_2 sont inévitables (car ce sont des diviseurs de p) d'après l'hypothèse de récurrence $|p_1| < 2^n$ et $|p_2| < 2^n$ donc $|p| < 2^{n+1}$.

3.7 Théorème

Pour tout $n \geq 1$, $l_{n2} < 200.5^n$

Bibliographie

M. Lothaire , Algebraic Combinatorics on Words