Langages rationnels et automates sur les mots infinis

KIRCHNER Thibaut

13 février 2007

Table des matières

1 Mots infinis, langages de mots infinis

Pour commencer, nous devons introduire les notations, qui reprennent et généralisent pour la plupart les notations portant sur les mots finis.

Définition 1.1 *Alphabet, lettre*

On appellera alphabet un ensemble fini, auquel cas ses éléments seront appelés lettres.

Définition 1.2 *Mot*

Soit A un alphabet. On appellera mot fini sur A une suite finie $(x_0, ..., x_{n-1})$ de lettres de A ; il sera noté $x_0...x_{n-1}$. On notera $\varepsilon = ()$ le mot vide. On appellera mot infini sur A une suite infinie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de lettres de A, il pourra aussi être noté $x_0...x_n...$.

Exemple. Sur l'alphabet a, b, le mot $w = ababab...$ (où la suite ab est répétée indéfiniment), ou $w' = aabaaaaa...$ (où, après le b, ne se trouvent plus que des a). On introduira bientôt des notations qui éviteront le recours aux points de suspension.

Définition 1.3 *Soit A un alphabet. On notera A^* l'ensemble des mots finis sur A, et A^ω l'ensemble des mots infinis sur A. On pose enfin $A^\infty = A^* \cup A^\omega$, l'ensemble de tous les mots sur A.*

Définition 1.4 *Langage*

Soit A un alphabet. On appelle langage sur A une partie de A^∞, c'est-à-dire un ensemble de mots, finis ou infinis, sur A.

De même que pour les langages de mots finis, on assimilera un mot w et le langage $\{w\}$.

On peut généraliser le produit de concaténation sur les mots finis en une action $\cdot : A^* \times A^\infty \to A^\infty$ du monoïde libre A^* sur A^∞, définie par :

Définition 1.5 *Concaténation de mots*

Pour $u = u_0...u_{n-1} \in A^*$ et $v \in A^\infty$,

$$u \cdot v = uv = \begin{cases} u_0...u_{n-1}v_0...v_{p-1} & si\ v = v_0...v_{k-1} \in A^* \\ u_0...u_{n-1}v_0...v_k... & si\ v = v_0...v_k... \in A^\omega \end{cases}$$

On définit les notions de préfixes, suffixes et de facteurs de manière similaires aux mots finis :

Définition 1.6 *Préfixe, suffixe, facteur*

Soit $u, w \in A^\infty$.

- *On dit que u est préfixe de w lorsque $u \in A^*$ et qu'il existe $v \in A^\infty$ tel que $w = uv$.*
- *On dit que u est un suffixe de w lorsqu'il existe $v \in A^*$ tel que $w = vu$.*
- *On dit que u est un facteur de w lorsque $w \in A^*$ et qu'il existe $v \in A^*$ et $v' \in A^\infty$ tels que $w = vuv'$.*

Définition 1.7 *Opérations sur les langages*

Les opérations sur les langages de mots finis se généralisent également aux langages de mots infinis, en prenant garde à ne pas concaténer quelque chose derrière un mot infini.

Si K et L sont deux langages sur un même alphabet A, on pose $K + L = K \cup L$.

Si de plus $K \subset A^*$, c'est-à-dire si K ne contient que des mots finis, on pose $KL = K \cdot L = \{uv, u \in K, v \in L\}$.

On rappelle les opérations suivantes sur un langage K de mots finis sur un alphabet A : pour $n \in \mathbb{N}$, $K^n = \{w_0...w_{n-1}, \forall k \in \{0, ..., n-1\}, w_k \in K\}$, et $K^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K^n$.

On dispose également de nouvelles opérations, qui associent à un langage K de mots finis sur un alphabet A un langage de mots infinis :

- *l'itération infinie, définie ainsi : $K^\omega = \{w_0...w_n..., \forall n \in \mathbb{N}, w_n \in K \setminus \{\varepsilon\}\}$.*
- *la flèche, définie par : $\overrightarrow{K} = w \in A^\omega, w$ a une infinité de préfixes dans K.*

On peut encore ajouter : pour $K \subset A^*$, $K^\infty = K^* \cup K^\omega$.

Remarque. Ces notations sont cohérentes avec les notations A^ω et A^∞ introduites plus haut pour A alphabet.

Exemple. Sur l'alphabet $A = \{a, b\}$:

- Les deux mots de l'exemple précédent peuvent maintenant être notés $w = (ab)^\omega$ et $w' = aaba^\omega$, et ces écritures les définissent sans aucune ambiguïté possible.
- Si $K = a^*b$, alors $K^* = (a^*b)^* = A^*b + \varepsilon$ est l'ensemble des mots finis sur A tels que tout a est suivi, pas forcément immédiatement, par un b, K^ω est l'ensemble des mots contenant une infinité d'occurrences de b, et $\overrightarrow{K} = \emptyset$ (en effet, aucun mot n'est préfixe d'un autre dans K).
- Si $K = a^*b^*$, alors $K^* = A^*$, $K^\omega = A^\omega$, et $\overrightarrow{K} = a^\omega + a^*b^\omega$ (en effet, les a^n forment une infinité de préfixes de a^ω dans K, et pour $k \in \mathbb{N}$, les $a^k b^n$ forment une infinité de préfixes de $a^k b^\omega$ dans K, l'autre inclusion est laissée au lecteur).

2 Langages rationnels

A présent, nous sommes en mesure de définir et d'effectuer une première étude des langages rationnels.

Définition 2.1 *Langages rationnels*

Soit A un alphabet. On définit $Rat(A^\infty)$, la classe des langages rationnels sur A, comme étant la plus petite classe X de langages sur A, stable par somme, par concaténation d'un langage de mots finis par un autre langage, itération et itération infinie d'un langage de mots finis, et qui contient les langages de bases, ceux formés d'un unique mot, qui est lui même composé d'une unique lettre.

On pose ensuite $Rat(A^\omega) = Rat(A^\infty) \cap A^\omega$.

Remarque. A ce titre, les opérations de somme, concaténation, itération et itération infinie, sont appelées opérations rationnelles. Les trois premières seront également qualifiées d'opérations rationnelles finies pour leur rôle dans les langages rationnels de mots finis.

Voyons tout de suite une caractérisation des langages rationnels qui ramène leur étude à celle des langages rationnels de mots finis :

Théorème 2.1 *Soit A alphabet, et $K \subset A^\infty$ un langage sur A. Alors :*

$$K \in \mathit{Rat}(A^\infty) \Longleftrightarrow$$
$$\begin{cases} K \cap A^* \in \mathit{Rat}(A^*) \\ K \cap A^\omega \text{ est union finie de langages de la forme } XY^\omega \text{ avec } X, Y \in \mathit{Rat}(A^*) \end{cases}$$

Preuve. L'implication $\Leftarrow$ est évidente.

Pour prouver le sens direct, on va prouver que la classe R des langages définis par la condition à droite contient les langages de base, et est close par les opérations rationnelles.

- Les langages de base sont dans R.
- Si $K, L \in R$, alors $K + L \in R$.
- Si $K, L \in R$ avec $K \subset A^*$, $KL \in R$ car :

$$\begin{aligned}(KL) \cap A^* &= K(L \cap A^*) \in \mathit{Rat}(A^*) \text{ et} \\ (KL) \cap A^\omega &= K(L \cap A^\omega) = K(X_1 Y_1^\omega \cup ... \cup X_p Y_p^\omega) \\ &= (KX_1)Y_1^\omega \cup ... \cup (KX_p)Y_p^\omega\end{aligned}$$

- Si $K \in R$ avec $K \subset A^*$, alors $K \in \mathit{Rat}(A^*)$, donc $K^* \in \mathit{Rat}(A^*) \subset R$. De plus, $X^\omega \in R$.

D'où le résultat.

Propriété 2.2 *Morphismes*

Soient A et B deux alphabets. Soit $K \subset A^\infty$, et $f : A \to B^*$. f se prolonge de manière unique en un morphisme de A^* sur B^*, on peut encore le prolonger en une application de A^∞ sur B^∞, qui sera encore appelée morphisme, par $f(x_0...x_n...) = f(x_0)...f(x_n)...$ pour $x_0...x_n... \in A^\omega$.

Si K est rationnel, alors son image directe $f\langle K\rangle$ l'est aussi.

Preuve. On montre que la classe R des langages dont l'image directe par f est rationnelle contient les langages de base, et est stable par les opérations rationnelles.

On utilise pour cela le fait qu'un langage formé d'un unique mot fini est rationnel, et les identités :

$$\begin{aligned} f\langle K + L\rangle &= f\langle K\rangle + f\langle L\rangle \\ f\langle KL\rangle &= f\langle K\rangle f\langle L\rangle \\ f\langle K^*\rangle &= f\langle K\rangle^* \\ f\langle K^\omega\rangle &= f\langle K\rangle^\omega \end{aligned}$$

3 Automates

On peut maintenant introduire les automates. Ils fonctionnent essentiellement comme les automates pour mots finis, la principale différence étant la condition pour qu'un chemin soit considéré comme final.

3.1 Définitions

Définition 3.1 *Automate, automate fini, état, transition, étiquette d'une transition*

Un automate peut être vu comme étant un triplet $\mathcal{A} = (Q, A, \Delta)$, où :

- *Q est un ensemble a priori quelconque. L'automate est dit fini lorsque Q est fini, et on se restreindra rapidement à ce cas particulier. Les éléments de Q sont appelés états.*
- *A est un alphabet.*
- *Les éléments de $Q \times A \times Q$ seront appelés transitions. Une transition (p, a, q) pourra être notée $p \xrightarrow{a} q$. L'étiquette d'une telle transition est a. Δ est un ensemble de transitions appelées transitions dans $\mathcal{A}$, et on pourra noter $p \xrightarrow[\mathcal{A}]{a} q$ pour $(p, a, q) \in \Delta$.*

Remarque. Plutôt qu'à l'ensemble Δ des transitions d'un automate $\mathcal{A}$, on peut parfois s'intéresser à sa fonction de transition δ qui lui est associée par :

$$\delta : \begin{array}{ccc} Q \times A & \rightarrow & \mathcal{P}(Q) \\ (p, a) & \mapsto & \{q \in Q, p \xrightarrow[\mathcal{A}]{a} q\} \end{array}$$

Réciproquement, étant donnée une fonction de transition, on pourra retrouver l'ensemble des transitions qui lui est associé.

Définition 3.2 *Transitions consécutives, chemin, étiquette d'un chemin*

Soit $\mathcal{A} = (Q, A, \Delta)$ un automate.

On dit que les transitions $(p, a, q), (p', a', q') \in Q \times A \times Q$ sont consécutives (dans cet ordre) lorsque $q = p'$.

Un chemin p (dans $\mathcal{A}$) est une suite (finie ou infinie) de transitions consécutives (dans $\mathcal{A}$) $(q_0, a_0, q_1), (q_1, a_1, q_2), ..., (q_n, a_n, q_{n+1}), ...$.

L'étiquette d'un tel chemin est le mot sur A (fini ou infini) $w = a_0 a_1 ... a_n ....$

Définition 3.3 *Conditions d'acceptation, chemin initial, chemin final, chemin acceptant, mot accepté, langage accepté*

On se donne $\mathcal{A} = (Q, A, \Delta)$ un automate, $\mathcal{I}$ une propriété, appelée condition initiale, portant sur "le début" d'un chemin dans $\mathcal{A}$, et $\mathcal{F}$ une propriété, appelée condition finale, portant sur "la fin" d'un chemin dans $\mathcal{A}$. Ces deux conditions seront regroupées sous le nom de conditions d'acceptation.

Un chemin p dans $\mathcal{A}$ est dit initial (dans $(\mathcal{A}, \mathcal{I}, \mathcal{F})$) lorsque p vérifie la condition initiale $\mathcal{I}$, final (dans $(\mathcal{A}, \mathcal{I}, \mathcal{F})$) lorsqu'il vérifie la propriété finale $\mathcal{F}$, et acceptant (dans $(\mathcal{A}, \mathcal{I}, \mathcal{F})$) lorsqu'il est initial et final.

Un mot $w \in A^\infty$ est dit accepté (ou reconnu) par $(\mathcal{A}, \mathcal{I}, \mathcal{F})$ lorsqu'il existe un chemin acceptant (dans $(\mathcal{A}, \mathcal{I}, \mathcal{F})$) dont l'étiquette est w.

On pose enfin $\mathcal{L}^\infty(\mathcal{A}, \mathcal{I}, \mathcal{F})$ l'ensemble des mots acceptés par $(\mathcal{A}, \mathcal{I}, \mathcal{F})$, appelé langage accepté (ou reconnu) par $(\mathcal{A}, \mathcal{I}, \mathcal{F})$.

Définition 3.4 *Automate sur mots finis*

Nous connaissons déjà des types de conditions initiales ou finales pour un chemin fini, et on appellera désormais un automate sur mots finis un automate muni de ce type de conditions d'acceptation.

Pour un ensemble I d'états initiaux et un ensemble F d'états initiaux, on notera $(\mathcal{A}, I, F)$ l'automate sur mots finis ayant les conditions d'acceptations associées. On notera $\mathcal{L}^*(\mathcal{A}, I, F)$ le langage qu'il accepte.

Définition 3.5 *Conditions initiales pour les chemins infinis, conditions de Büchi, de Rabin, de Muller*

Pour un chemin infini, on conservera le même type de condition initiale que pour les chemins finis, à savoir :

On se fixe un ensemble I d'états qualifiés d'initiaux, et un chemin $p = (q_0, a_0, q_1), (q_1, a_1, q_2), ..., (q_n, a_n, q_{n+1}), ...$ est initial lorsque $p_0 \in I$.

On va présenter les trois principaux types de conditions finales portant sur les chemins infinis $p = (q_0, a_0, q_1), (q_1, a_1, q_2), ..., (q_n, a_n, q_{n+1}), ...$.

Pour $F \subset Q$, on dira que p passe infiniment souvent dans F lorsque $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \geq n, q_k \in F$.

Une condition de Büchi consiste à se donner une partie F de Q, dont les éléments seront appelés états finaux. Le chemin p sera dit final lorsqu'il passe infiniment souvent dans F.

Une condition de Rabin consiste à se donner $F \subset \mathcal{P}(Q)^2$. Le chemin p sera alors dit final lorsqu'il existe $(L, U) \in F$ tel que p passe infiniment souvent dans U, mais ne passe pas infiniment souvent dans L.

Une condition de Muller consiste à se donner $F \subset \mathcal{P}(Q)$. Le chemin p sera dit final lorsque l'ensemble $\lim p$ des états q tels que p passe infiniment souvent dans $\{q\}$ est un élément de F.

Remarque. Dans le cas où F est une partie finie de Q, il y a équivalence entre p passe infiniment souvent dans F et $\lim p \cap F \neq \emptyset$.

Ainsi, dans le cas d'automates finis, et on se placera désormais dans ce cas, les trois types de conditions pour qu'un chemin p soit final peuvent être exprimés à l'aide de $\lim p$.

3.2 Déterminisme, complétude

Comme dans le cas des automates sur mots finis, on dispose de notions de déterminisme et de complétude.

Définition 3.6 *Déterminisme et complétude, co-déterminisme et co-complétude, locaux, globaux et forts*

Soit $\mathcal{A} = (Q, A, \Delta)$, $\mathcal{I}, \mathcal{F}$ des conditions d'acceptations pour $\mathcal{A}$.

- *On dit que $\mathcal{A}$ est localement déterministe lorsque :*

$$\forall (q, a) \in Q \times A, |\delta(q, a)| \leq 1$$

  c'est-à-dire que pour chaque état q, et chaque lettre a lue, il existe au plus une transition (q, a, q') dans $\mathcal{A}$.
- *On dit que $\mathcal{A}$ est localement co-déterministe lorsque pour chaque état q, et chaque lettre a lue, il existe au plus une transition (q', a, q) dans $\mathcal{A}$, ou encore lorsque l'automate obtenu en renversant les transitions de $\mathcal{A}$ est localement déterministe.*
- *On dit que $(\mathcal{A}, \mathcal{I}, \mathcal{F})$, est globalement déterministe (resp. co-déterministe) lorsque, pour chaque $w \in A^\infty$, il existe au plus un chemin initial (resp. final) d'étiquette w.*
- *On dit que $(\mathcal{A}, \mathcal{I}, \mathcal{F})$ est (fortement) déterministe (resp. co-déterministe) lorsqu'il est localement et globalement déterministe (resp. co-déterministe).*

On définit de même les notions de complétude et co-complétude, locale, globale et forte, en remplaçant "au plus un" par "au moins un" et "déterministe" par "complet" dans les définitions précédentes.

Dans le cas des automates sur mots finis, on a les propriétés suivantes :

Propriété 3.1 *Soit $(\mathcal{A}, I, F)$ un automate sur mots finis.*

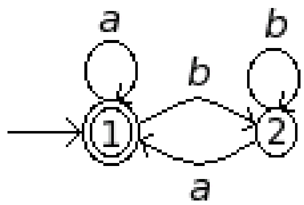
- *Pour que $(\mathcal{A}, I, F)$ soit déterministe (resp. complet), il suffit que $\mathcal{A}$ soit localement déterministe, et que $|I| \leq 1$ (resp. ≥ 1).*
- *Pour que $(\mathcal{A}, I, F)$ soit co-déterministe (resp. co-complet), il suffit que $\mathcal{A}$ soit localement co-déterministe, et que $|F| \leq 1$ (resp. ≥ 1).*

La première propriété reste vraie pour les trois types d'automates sur mots infinis puisqu'on n'a pas changé la condition de chemin initial, par contre la seconde n'est plus vérifiée.

Définition 3.7 *Automate de Büchi, automate de Rabin, automate de Muller*

- *Pour $I, F \subset Q$, on notera encore $(\mathcal{A}, I, F)$ l'automate sur mots infinis ayant la condition initiale associée à I, et la condition de finale de Büchi associée à F, et on le qualifiera d'automate de Büchi. On notera $\mathcal{L}^\omega(\mathcal{A}, I, F)$ le langage qu'il reconnaît.*

  Exemple. *L'automate de Büchi ci-dessous (on représente souvent les états finaux en les encerclant) reconnaît le langage $(b^*a)^\omega$ des mots qui contiennent une infinité de a.*

  Cet automate est déterministe et complet, mais n'est pas localement co-déterministe, ni localement co-complet, ni globalement co-complet, ni globalement co-déterministe.
- *Pour $I \subset Q$ et $F \subset \mathcal{P}(Q)^2$, on notera $(\mathcal{A}, I, F)$ l'automate sur mots infinis ayant la condition de chemin initial associée à I, et la condition de chemin final de Rabin associée à F, et on le qualifiera d'automate de Rabin. On notera encore $\mathcal{L}^\omega(\mathcal{A}, I, F)$ le langage qu'il reconnaît.*
- *Pour $I \subset Q$ et $F \subset \mathcal{P}(Q)$, on notera $(\mathcal{A}, I, F)$ l'automate sur mots infinis ayant la condition de chemin initial associée à I, et la condition de chemin final de Muller associée à F, et on le qualifiera d'automate de Muller. On utilisera encore la notation $\mathcal{L}^\omega(\mathcal{A}, I, F)$ pour désigner le langage qu'il accepte.*

4 Liens entre ces deux notions

4.1 Théorème de Kleene

On peut maintenant énoncer un nouveau théorème de Kleene qui relatif aux langages de mots infinis, et qui établit un lien entre automates et langages rationnels :

Théorème 4.1 *Kleene*

Soit $K \subset A^\omega$. K est rationnel si et seulement si il est reconnaissable par automate de Büchi, c'est-à-dire si et seulement s'il existe un automate de Büchi $(\mathcal{A}, I, F)$, tel que $K = \mathcal{L}^\omega(\mathcal{A}, I, F)$).

Preuve. Soit $(\mathcal{A}, I, F)$ un automate de Büchi. On a :

$$\mathcal{L}^\omega(\mathcal{A}, I, F) = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{f \in F} \mathcal{L}^*(\mathcal{A}, \{i\}, \{f\}) \mathcal{L}^*(\mathcal{A}, \{f\}, \{f\})^\omega$$

Par le théorème de Kleene pour les langages de mots finis, les $\mathcal{L}^*(\mathcal{A}, \{p\}, \{q\})$ sont rationnels, donc $\mathcal{L}^\omega(\mathcal{A}, I, F)$ l'est aussi.

Réciproquement, soit $K \in Rat(A^\omega)$.

K s'écrit comme union finie de XY^ω avec $X, Y \in Rat(A^*)$, et on peut imposer $\varepsilon \notin X$, $\varepsilon \notin Y$. On a, par conséquent, des automates sur mots finis normalisés reconnaissant X et Y. On en déduit aisément un automate de Büchi reconnaissant XY^ω. Pour passer à l'union finie, on fait l'union (disjointe) des états des automates correspondants, des ensembles de transitions, des ensembles d'états initiaux, des ensembles d'états finaux, et l'automate de Büchi obtenu reconnaît K.

4.2 Automates de Büchi déterministes

On sait que chaque automate sur mots finis a un automate sur mots finis déterministe équivalent, c'est-à-dire qui reconnaît le même langage. On a de plus un algorithme pour de déterminisation d'automates sur mots finis. Nous allons voire que la propriété n'est pas vraie sur les automates de Büchi, et trouver une condition pour qu'un langage reconnaissable par automate de Büchi (c'est-à-dire rationnel) soit reconnaissable par automate de Büchi déterministe.

Lemme 4.2 *Si $(\mathcal{A}, I, F)$ est un automate de Büchi déterministe, alors $\mathcal{L}^\omega(\mathcal{A}, I, F) = \overrightarrow{\mathcal{L}^*(\mathcal{A}, I, F)}$.*

Preuve. Soit $w \in \mathcal{L}^\omega(\mathcal{A}, I, F)$, et $p = (q_0, a_0, q_1), (q_1, a_1, q_2), ..., (q_n, a_n, q_{n+1}), ...$ un chemin acceptant dans $(\mathcal{A}, I, F)$, d'étiquette w. On a une extractrice ϕ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, q_{\phi(n)} \in F$. Alors les $a_0 ... a_{\phi(n)}$ sont une infinité de préfixes de w, tous appartenant à $\mathcal{L}^*(\mathcal{A}, I, F)$, donc $w \in \overrightarrow{\mathcal{L}^*(\mathcal{A}, I, F)}$.

Si, par contre, w a une infinité de préfixes dans $\mathcal{L}^*(()\mathcal{A}, I, F)$, alors par déterminisme global, il correspond à chacun de ces préfixes un chemin acceptant dans l'automate, et ces chemins sont eux-mêmes préfixes les uns des autres par déterminisme local. On en déduit ainsi un chemin d'étiquette w, passant une infinité de fois dans F, donc que $w \in \mathcal{L}^\omega(\mathcal{A}, I, F)$.

Théorème 4.3 *Soit $K \subset A^\omega$. K est reconnaissable par automate de Büchi déterministe si et seulement s'il existe $L \in Rat(A^*)$ tel que $K = \overrightarrow{L}$.*

Preuve. Le sens direct résulte du lemme précédent et du théorème de Kleene sur les langages de mots finis.

Pour le sens réciproque : si $K = \overrightarrow{L}$ avec $L \in Rat(A^*)$, alors en posant $(\mathcal{A}, \{i\}, F)$ un automate sur mots finis déterministe reconnaissant L, on a, par le lemme : $\mathcal{L}^\omega(\mathcal{A}, \{i\}, F) = \overrightarrow{L} = K$. D'où, K est reconnaissable par un automate de Büchi déterministe.

Exemple. Un exemple de langage rationnel qui ne soit pas de cette forme : $(a+b)^* a^\omega$, l'ensemble des mots infinis sur l'alphabet $\{a, b\}$ n'ayant qu'un nombre fini de b. Intuitivement, un automate déterministe ne peut pas être sûr qu'il n'y aura plus de b qui vont réapparaître ultérieurement.

Remarque. Avec des automates produits inspirés des automates produits sur mots finis, on parvient à prouver que la classe des langages reconnaissables par automates de Büchi déterministes est une sous-algèbre de Boole de $\mathcal{P}(A^\omega)$, c'est-à-dire qu'elle comprend le langage vide, A^ω, est stable par complémentation, intersection finie, union finie, différence, différence symétrique, ...

4.3 Automates de Muller déterministes

Passons maintenant aux automates de Muller, qui ont une condition d'acceptation beaucoup plus fine.

Théorème 4.4 *Soit $K \subset A^\omega$. K est rationnel si et seulement si K est reconnaissable par automate de Muller.*

Preuve. Si K est rationnel, alors il est reconnaissable par un automate de Büchi $(\mathcal{A}, I, F)$. Alors l'automate de Muller $(\mathcal{A}, I, \{X \subset Q, Q \cap F \neq \emptyset\})$ reconnaît K.

Réciproquement : si $(\mathcal{A}, I, F)$ est un automate de Muller reconnaissant K, on a :

$$K = \bigcup_{X \in F} \mathcal{L}^\omega(\mathcal{A}, I, \{X\})$$

Comme $Rat(A^\omega)$ est stable par union finie, il suffit de prouver le résultat dans le cas où F est un singleton, par exemple $F = \{X\} = \{\{x_1, ..., x_n\}\}$.

On pose $L_0 = \mathcal{L}^*(\mathcal{A}, I, \{x_1\})$, puis $L_k = \mathcal{L}^*(\mathcal{A}', \{x_k\}, \{x_{k+1}\})$ pour $1 \leq k < n$ et $L_n = \mathcal{L}^*(\mathcal{A}', \{x_n\}, \{x_1\})$, où $\mathcal{A}'$ est l'automate obtenu à partir de $\mathcal{A}$ en ne conservant que les sommets $x_1, ..., x_n$ et les transitions qui ne concernent que ces sommets.

Alors $K = L_0(L_1...L_n)^\omega \in Rat(A^\omega)$.

En vérité, on dispose d'un résultat beaucoup plus important : tout langage rationnel est reconnaissable par un automate de Muller déterministe.

Théorème 4.5 *Mc Naughton, admis*

Tout langage rationnel de mots infinis est reconnaissable par automate de Rabin déterministe.

On en déduit aisément que tout langage rationnel de mots infinis est reconnaissable par automate de Muller déterministe.

On peut enfin montrer que la classe des langages rationnels est close par les opérations boolénnes, ce qui n'était pas du tout évident avec la définition ou avec les automates de Büchi.

Théorème 4.6 *$Rat(A^\omega)$ est une sous-algèbre de Boole de $\mathcal{P}(A^\omega)$.*

Preuve.
- Les langages $\emptyset$ et A^ω sont rationnels.
- $Rat(A^\omega)$ est stable par union finie, par définition.
- $Rat(A^\omega)$ est stable par passage au complémentaire.
  En effet, si K est rationnel, alors on a un automate de Muller déterministe $(\mathcal{A}, I, F)$ qui reconnaît K. Or $\mathcal{L}^\omega(\mathcal{A}, I, \mathcal{P}(Q) \setminus F) = A^\omega \setminus K$, qui est donc rationnel.