Groupes de Hotz

Laurent BULTEAU

Table des matières

1 Groupe de Hotz

Une question des plus intéressantes à propos des grammaires est de savoir si elles sont équivalentes. Malheureusement, elle est indécidable. On cherche donc des propriétés moins précises pour les grammaires, des propriétés qui seraient seulement impliquées par l'équivalence de deux gramaires. C'est le cas de l'équivalence des groupes de Hotz (d'une grammaire). Nous construisons ces groupes à partir du groupe libre d'un alphabet.

Définition 1.1 (Groupe libre)**.** *Pour un ensemble A, le* groupe libre $F(A)$ *de A est le quotient :*

$$F(A) = \frac{(A \cup \bar{A})^*}{\delta}$$

où :

- $\bar{A} = \{\bar{a} \mid a \in A\}$ *est un ensemble disjoint de A*
- δ *est la relation qui consiste à assimiler $a\bar{a}$ et $\bar{a}a$ à ϵ :*
$$a\bar{a} \equiv \bar{a}a \equiv \epsilon \ [\delta]$$

Remarque : C'est bien un groupe (ϵ est neutre et, pour $u = a_1 \dots a_n$, $\bar{u} = \bar{a_n} \dots \bar{a_1}$, on a $u\bar{u} \equiv \bar{u}u \equiv \epsilon$)

Définition 1.2 (Groupe de Hotz)**.** *Soit $G = (A, V, P)$ une grammaire. Le* groupe de Hotz *de G est :*

$$\mathcal{H}(G) = \frac{F(V \cup A)}{[P]}$$

où $[P]$ est la relation de congruence qui consiste à assimiler u et v si on peut passer de l'un l'autre par une série de productions ou d'inverse de productions :

$$\begin{aligned} u \equiv v[P] \quad \Leftrightarrow \quad & \exists w_0 = u,\, w_1,\, \dots,\, w_k = v \\ & \forall i \in \{0, \dots, k-1\}\, w_i \to w_{i+1}\, ou\, w_{i+1} \to w_i \end{aligned}$$

On note $a \to b$ quand on obtient b à partir de a par une production de P, ou $\bar{b}$ à partir de $\bar{a}$ par une production de P

EXEMPLE 1.1. *Soit* $G = (V, A, P)$ *avec :* $S \to aSb + \epsilon$ *Alors*
Equivalence de $a^n b^p$ *:*

$$\begin{array}{ccc}
Pour\ n \geq p & \quad & Pour\ n < p \\
a^n b^p & & a^n b^p \\
\uparrow & & \uparrow \\
a^n S b^p & & a^n S b^p \\
\uparrow & & \uparrow \\
a^{n-1} S b^{p-1} & & a^{n-1} S b^{p-1} \\
\uparrow & & \uparrow \\
\dots & & \dots \\
\uparrow & & \uparrow \\
a^{n-p} S & & S b^{p-n} \\
\downarrow & & \downarrow \\
a^{n-p} & & b^{p-n} \\
 & & \uparrow \\
 & & b^{p-n} \bar{S} \\
 & & \uparrow \\
 & & b^{p-n} \bar{b} \bar{S} \bar{a} \\
 & & \uparrow \\
 & & \dots \\
 & & \uparrow \\
 & & b^{p-n} \bar{b}^{p-n} \bar{S} \bar{a}^{p-n} = \bar{S} \bar{a}^{p-n} \\
 & & \downarrow \\
 & & \bar{a}^{p-n} = a^{n-p}
\end{array}$$

Finalement :

$$a^{n_1} b^{p_1} \dots a^{n_k} b^{p_k} \equiv a^{\sum (n_k - p_k)}$$

d'où

$$\mathcal{H}(G) = \mathbf{N}$$

2 Groupe d'Effondrement

DÉFINITION 2.1 (Groupe d'effondrement)**.** *Soit* $L \subset A^*$ *un langage, le* groupe d'effondrement *de* L *est le quotient*

$$\mathcal{C}(L) = \frac{F(A)}{[L \times L]}$$

du groupe libre par la relation d'équivalence de groupe la plus fine qui assimile deux mots de L *dans la même classe.*

REMARQUE : Le groupe d'effondrement porte sur un langage, et non sur une grammaire qui aurait pu l'engendrer.

Théorème 2.1. *Soit G une grammaire* réduite *et $L = L(G)$. Alors*

$$\mathcal{C}(L) \cong \mathcal{H}(G)$$

Notations : Pour $G = (A, V, P)$ une grammaire réduite, on note l'équivalence modulo $[P]$ par $\sim$ (sur $F(V \cup A)$), et l'équivalence modulo $[L \times L]$ par $\equiv$ (sur $F(A)$ seulement).

Preuve : On montre, pour tout $u, v \in F(A)$ l'équivalence :

$$u \equiv v \Leftrightarrow u \sim v$$

$\boxed{\Rightarrow}$

Prenons $w, w' \in L$.
Alors $S \twoheadrightarrow w$ et $S \twoheadrightarrow w'$
D'où $w \twoheadleftarrow S \twoheadrightarrow w'$, et donc $w \sim w'$. Par induction, on obtient donc bien

$$u \equiv v \Rightarrow u \sim v$$

$\boxed{\Leftarrow}$

Choisissons $X \in V$, et $w, w' \in L_G(X)$.
Étant donné que la grammaire est réduite, il existe $u, v \in A^*$ tels que

$$uwv \in L, uw'v \in L$$

et donc

$$uwv \equiv uw'v$$

Comme il s'agit d'une relation d'équivalence sur un groupe,

$$\begin{aligned} \bar{u}uwv\bar{v} &\equiv \bar{u}uw'v\bar{v} \\ w &\equiv w' \end{aligned}$$

Ainsi, chaque $L_G(X)$ est inclus dans une seule classe d'effondrement.
Construisons maintenant un morphisme $\phi : (A + V)^* \to A^*$ tel que :

- Pour $a \in A$, $\phi(a) = a$
- Pour $X \in V$, on fixe $\phi(X) \in L_G(X)$

et nous étendons alors ϕ en un morphisme de $F(A \cup V)$ dans $F(A)$
Pour toute production $X \to \alpha \in P$, on a, d'après la remarque précédente, $\phi(X) \equiv \phi(\alpha)$ (car $\phi(X), \phi(\alpha) \in L_G(X)$).
Choisissons maintenant $u, v \in F(A)$ tels que $u \sim v$: il existe $w_0, w_1, \ldots, w_k \in F(V \cup A)$ tels que $w_0 = u$, $w_k = v$ et $\phi(w_i) \equiv \phi(w_{i+1})$.
On en déduit donc $u = \phi(u) \equiv \phi(v) = v$, et la seconde implication :

$$u \equiv v \Leftarrow u \sim v$$

Nous avons ainsi montré : $\dfrac{F(A)}{\equiv} = \dfrac{F(A)}{\sim}$
Rappelons que $\mathcal{C}(L) = \dfrac{F(A)}{\equiv}$ et $\mathcal{H}(G) = \dfrac{F(V \cup A)}{\sim}$

Pour conclure, notons p la surjection canonique $p : F(V \cup A) \to \dfrac{F(V \cup A)}{\sim}$
Il ne reste plus qu'à remarquer que $\mathcal{H}(G) = p(F(A))$.
En effet : $\forall w \in F(V \cup A)$, $\exists w' \in F(A), w \sim w'$ (prendre $w' = \phi(w)$)
Finalement :
$$\mathcal{H}(G) = p(F(A)) \cong \frac{F(A)}{\sim} = \frac{F(A)}{\equiv} = \mathcal{C}(L)\square$$

3 Conclusion

Théorème 3.1. *Soient G_1, G_2 deux grammaires réduites. Alors*
$$L(G_1) = L(G_2) \Rightarrow \mathcal{H}(G_1) \simeq \mathcal{H}(G_2)$$

C'est un corrollaire du théorème 2.1 ($\mathcal{H}(G_1) \simeq \mathcal{C}(L(G_1)) = \mathcal{C}(L(G_2)) \simeq \mathcal{H}(G_2)$)

On a bien la propriété annoncée sur le groupe de Hotz : les groupes de Hotz de grammaires équivalentes sont égaux.

Bien sûr, la réciproque est fausse :

Exemple 3.1. *Choisissons :*
$$G_1 = (\{S\}, \{a, b\}, S \to aSb + \epsilon)$$
et
$$G_2 = (\{S\}, \{a, b\}, S \to bSa + \epsilon)$$
Alors
$$\mathcal{H}(G_1) \simeq \mathbf{N} \simeq \mathcal{H}(G_2)$$
et
$$L(G_1) = \{a^n b^n\} \neq \{b^n a^n\} = L(G_2)$$