Combinaisons linéaires de $\frac{\zeta(s)}{\Pi^s}$ sur $\mathbf{F}_q(x)$, pour $1 \leq s \leq q-2$.

Valérie Berthé
Laboratoire de Mathématiques Discrètes
CNRS-UPR 9016
Case 930-163 avenue de Luminy
F13288 Marseille Cedex 9
France

Résumé : Carlitz a défini sur $\mathbf{F}_q$ une fonction ζ et une série formelle Π, analogues respectivement à la fonction ζ de Riemann et au réel π. Yu a montré en utilisant les modules de Drinfeld, que $\frac{\zeta(s)}{\Pi^s}$ est transcendant, sur $\mathbf{F}_q(x)$, pour tout s non divisible par $q-1$. Nous montrons ici, en utilisant les automates finis et le théorème de Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy, l'indépendance linéaire, sur $\mathbf{F}_q(x)$, de quotients de la forme $\frac{\zeta(s)}{\Pi^s}$, pour s entier compris entre 1 et $q-2$.

Abstract : Carlitz defined both a function ζ and a formal power series Π over $\mathbf{F}_q$, analogous to the Riemann function ζ and to the real number π. Yu used Drinfeld modules to show the fraction $\frac{\zeta(s)}{\Pi^s}$ is transcendental over $\mathbf{F}_q(x)$, when s is an integer not divisible by $q-1$. Inthis paper we use the automata theory and Christol, Kamae,Mendès France and Rauzy theorem to prove the linear independence over $\mathbf{F}_q(x)$ of the fraction $\frac{\zeta(s)}{\Pi^s}$, for all integers s in $[1, q-2]$.

1 Introduction

Soit $\mathbf{F}_q$ le corps de cardinal q. Soit p sa caractéristique. Carlitz a défini sur le corps $\mathbf{F}_q((1/x))$ des séries formelles de Laurent, à coefficients dans $\mathbf{F}_q$, une fonction ζ analogue à la fonction ζ de Riemann, définie de la manière suivante :

$$\zeta(m) = \sum_{G \in \mathbf{F}_q[x] \text{ et } G \text{ unitaire}} 1/G^m \ , \quad m \geq 1.$$

Carlitz a ainsi établi dans [5] que, pour s divisible par $(q-1)$, les quotients $\zeta(s)/\Pi^s$ appartiennent à $\mathbf{F}_q(x)$, avec

$$\Pi = \prod_{j=0}^{+\infty}(1 - \frac{x^{q^j}-x}{x^{q^{j+1}}-x}).$$

Cette propriété est l'équivalent du résultat d'Euler sur les valeurs paires de la fonction ζ de Riemann, à savoir $\zeta(2n)/\pi^{2n}$ est rationnel pour n non nul, la série formelle Π jouant le rôle du réel π. Il existe, en effet, une fonction ψ définie par Carlitz analogue à l'exponentielle et dont la période est égale à Π, à un algébrique près.

Le premier résultat de transcendance concernant ces fonctions a été établi, en 1941, par Wade, qui prouve dans [19] la transcendance de Π sur $\mathbf{F}_q(x)$. On en déduit la transcendance de $\zeta(s)$ pour $s \equiv 0\ (q-1)$. Il faut attendre quarante ans pour obtenir simultanément plusieurs propriétés concernant la fonction ζ. Ainsi, en 1986-87, Thakur établit-il, dans [17], voir aussi [18], des résultats d'irrationalité pour $1 \leq s \leq q^2$ ainsi que la transcendance de $\zeta(s)$, pour $s \leq q$, par la méthode de Wade, alors que Damamme montre l'irrationalité de $\zeta(s)$ pour $1 \leq s \leq q$, ([10]). En 1988, Damamme et Hellegouarch prouvent la transcendance de $\zeta(s)$ pour $1 \leq s \leq q^2$, également par la méthode de Wade, ([13]). Enfin, en 1989, Damamme établit dans [11], voir aussi [12], la preuve de la transcendance de $\zeta(s)$ pour tout s. Parallèlement, Yu prouve en 1988, par une méthode utilisant les modules de Drinfeld, qui sont une généralisation des courbes elliptiques, (voir [15] ou [16], ainsi que [20]) et en reprenant un résultat d'Anderson et Thakur, (voir [2]), les résultats suivants : pour tout entier s non nul, $\zeta(s)$ est transcendant et pour tout entier s non divisible par $q-1$, $\zeta(s)/\Pi^s$ est transcendant, (la preuve est parue dans [21]). Notons que Chérif et de Mathan ont trouvé des résultats effectifs concernant la fonction ζ : ils ont notamment obtenu des mesures d'irrationalité de $\zeta(1)$ sur $\mathbf{F}_2(T)$, (voir [6], [7] et [8]).

Par ailleurs, en 1989, Allouche donne dans [1] une preuve élémentaire de la transcendance de Π par les automates, c'est-à-dire en utilisant le théorème de Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy, (voir [9]), énoncé ci-dessous :

Théorème 1 (Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy)
Soit $(u(n))_{n\in\mathbf{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbf{F}_q$. Il y a équivalence entre les deux conditions suivantes :
1) la série formelle $\sum_{n\geq 0} u(n)x^{-n}$ est algébrique sur $\mathbf{F}_q(x)$,
2) l'ensemble $\mathcal{U}$ de sous-suites de la suite $(u(n))_{n\in\mathbf{N}}$ défini par

$$\mathcal{U} = \{(u(q^k n + r))_{n\in\mathbf{N}};\ k \geq 0;\ 0 \leq r \leq q^k - 1\}$$

est fini.

En généralisant la méthode d'Allouche, je donne ici une preuve "automatique" du résultat suivant :

Théorème 2 *Toute combinaison linéaire, à coefficients dans* $\mathbf{F}_q(x)$, *de* $\frac{\zeta(s)}{\Pi^s}$, *pour* $1 \leq s \leq q-2$ *et* $q \neq 2$, *est transcendante sur* $\mathbf{F}_q(x)$.

On en déduit le corollaire suivant (voir [3] et [4]) :

Corollaire 1 *Pour* $q \neq 2$ *et* $1 \leq s \leq q-2$, $\frac{\zeta(s)}{\Pi^s}$ *est transcendant sur* $\mathbf{F}_q(x)$.

Ce résultat est également démontré par de Mathan, dans [14] : il obtient, de plus, la transcendance de certaines combinaisons polynomiales de $\frac{\zeta(s)}{\Pi^s}$, pour $1 \leq s \leq q-2$, en utilisant un critère de transcendance lié aux mesures d'irrationalité.

2 Quelques développements en série formelle

Il suffit, pour montrer le théorème 2, de considérer des combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbf{F}_q[x]$. Considérons une telle combinaison linéaire $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{C} = \sum_{s=1}^{q-2} B_s \frac{\zeta(s)}{\Pi^s}, \text{avec } B_s \in \ \mathbf{F}_q[x].$$

Soit $\alpha = \prod_{j=0}^{+\infty}(1 - \frac{x^{q^j}}{x^{q^{j+1}}})$. Il est plus facile de travailler sur le développement en série formelle de $\zeta(s)\frac{\alpha^s}{\Pi^s}$ que sur celui de $\frac{\zeta(s)}{\Pi^s}$ (voir [1], [3] et [4]). Multiplions alors $\mathcal{C}$ par α^{q-2}. Comme α est algébrique (il suffit d'élever α à la puissance q pour s'en convaincre), cette opération est sans effet sur la transcendance de $\mathcal{C}$. On obtient alors : $\alpha^{q-2}\mathcal{C} = \sum_{s=1}^{q-2} B_s \alpha^{(q-2)-s}\zeta(s)\frac{\alpha^s}{\Pi^s}$.

Posons $c = (q-2) - s$ et définissons la suite e_s par :

$$\alpha^c \zeta(s) \frac{\alpha^s}{\Pi^s} = \sum_{n \geq 0} e^s(n) x^{-n}.$$

Écrivons B_s sous la forme $B_s = \sum_{l \geq 0} \beta_s(l) x^l$, avec $\beta_s(l) \in \mathbf{F}_q$, pour $1 \leq s \leq q-2$, et $\beta_s(l) = 0$, pour l assez grand. On a, en convenant de poser, pour $n < 0$, $e^s(n) = 0$:

$$\begin{aligned} B_s \alpha^c \zeta(s) \frac{\alpha^s}{\Pi^s} &= (\sum_{l \geq 0} \beta_s(l) x^l)(\sum_{n \geq 0} e^s(n) x^{-n}) \\ &= \sum_{l,n} \beta_s(l) e^s(n) x^{-(n-l)} \\ &= \sum_{l \geq 0, n \geq -l} \beta_s(l) e^s(n+l) x^{-n} \end{aligned}$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty}(\sum_{l\geq 0}\beta_s(l)e^s(n+l))x^{-n}.$$

Par conséquent,

$$\sum_{1\leq s\leq q-2} B_s\alpha^c\zeta(s)\frac{\alpha^s}{\Pi^s} = \sum_{-\infty}^{+\infty} x^{-n}(\sum_{l\geq 0 \text{ et } 1\leq s\leq q-2}\beta_s(l)e^s(n+l)).$$

Soit E la suite définie sur $\mathbf{Z}$ par :

$$E(n) = \sum_{l\geq 0 \text{ et } 1\leq s\leq q-2}\beta_s(l)e^s(n+l).$$

Soit $L = \sup\{l\ ;\ \beta_s(l)\neq 0,\ \text{pour } 1\leq s\leq q-2\}$. On a alors :

$$E(n) = \sum_{0\leq l\leq L \text{ et } 1\leq s\leq q-2}\beta_s(l)e^s(n+l).$$

Il en résulte que, pour $n < -L$, $E(n) = 0$ et $\displaystyle\sum_{s=1}^{q-2} B_s\alpha^c\zeta(s)\frac{\alpha^s}{\Pi^s} = \sum_{n\geq -L} E(n)x^{-n}$.

Nous aurons besoin des développements en série formelle de $\frac{\alpha^s}{\Pi^s}\zeta(s)$ (paragraphe 2.1) et de α^c (paragraphe 2.2), puis nous introduirons en 2.3 quelques suites auxiliaires. Enfin, nous établirons en 2.4 quelques propriétés concernant le développement de $\alpha^c\frac{\alpha^s}{\Pi^s}\zeta(s)$.

2.1 Développement en série formelle de $\frac{\alpha^s}{\Pi^s}\zeta(s)$

Thakur a établi dans [17], que pour $1\leq s\leq q$,

$$\zeta(s) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{ks}\prod_{j=1}^{k}(\frac{1}{x^{q^j}-x})^s.$$

On a

$$\alpha = \prod_{j=0}^{+\infty}(1-(\frac{x^{q^j}}{x^{q^{j+1}}})) \text{ et } \Pi = \prod_{j=0}^{+\infty}(1-(\frac{x^{q^j}-x}{x^{q^{j+1}}-x})).$$

On obtient alors

$$\frac{\alpha}{\Pi} = \prod_{j=1}^{+\infty}(1-(\frac{1}{x})^{q^j-1}).$$

Par conséquent,

$$\frac{\alpha^s}{\Pi^s}\zeta(s) = \frac{\alpha^s}{\Pi^s} + \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{ks}(\frac{1}{x})^{s(q+\ldots+q^k)}\prod_{j=k+1}^{+\infty}(1-(\frac{1}{x})^{q^j-1})^s.$$

Nous allons développer séparément, en série formelle, les termes $\frac{\alpha^s}{\Pi^s}$ et $\frac{\alpha^s}{\Pi^s}(\zeta(s)-1)$. On a alors les propositions suivantes, qui correspondent aux propositions 6 et 7 de [4] :

Proposition 1 *Soit* $a^s = (a^s(n))_{n\in\mathbf{N}}$ *la suite définie par*

$$\frac{\alpha^s}{\Pi^s} = \sum_{n\geq 0} a^s(n)x^{-n}.$$

Si n *s'écrit*

$$n = \sum_{j=1}^{+\infty} \mu_j(q^j-1) \text{ avec } \mu_j \in \{0,1,...,s\}, \mu_j = 0 \text{ pour } j \text{ assez grand},$$

alors

$$a^s(n) = (-1)^{\sum_{j=1}^{+\infty}\mu_j} \prod_{j=1}^{+\infty} \overline{\binom{\mu_j}{s}},$$

sinon $a^s(n) = 0$.

Proposition 2 *Soit* $b^s = (b^s(n))_{n\in\mathbf{N}}$ *la suite définie par*

$$\frac{\alpha^s}{\Pi^s}(\zeta(s)-1) = \sum_{n\geq 0} b^s(n)x^{-n}$$

Si n *s'écrit*

$$n = s(q+...+q^i)+\sum_{j\geq i+1}^{+\infty} \mu_j(q^j-1) \text{ avec } i\geq 1,\ \mu_j \in \{0,1,...,s\},\ \mu_j = 0 \text{ pour } j \text{ assez grand},$$

alors

$$b^s(n) = (-1)^{si}(-1)^{\sum_{j=i+1}^{+\infty}\mu_j} \prod_{j=i+1}^{+\infty} \overline{\binom{\mu_j}{s}},$$

sinon $b^s(n) = 0$.

$\prod_{j=k+1}^{+\infty} \overline{\binom{\mu_j}{s}}$ désigne la valeur modulo p de $\prod_{j=k+1}^{+\infty} \binom{\mu_j}{s}$, où p est la caractéristique de $\mathbf{F}_q$.

Soit $c^s = (c^s(n))_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $\frac{\alpha^s}{\Pi^s}\zeta(s) = \sum_{n\geq 0} c^s(n)x^{-n}$. On a $c^s = a^s + b^s$.

2.2 Développement en série formelle de α^c

On a

$$\alpha = \prod_{j=0}^{+\infty}(1 - \frac{x^{q^j}}{x^{q^{j+1}}}) = \sum_{n\geq 0} d(n)x^{-n}.$$

On note que, si n s'écrit sous la forme

$$n = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon_k(q^{k+1} - q^k) \text{ avec } \varepsilon_k = 0 \text{ ou } 1, \varepsilon_k = 0 \text{ pour } k \text{ assez grand,}$$

une telle décomposition est unique. On a, en effet, pour tout entier r strictement positif :

$$\sum_{k=1}^{r}(q^{k+1} - q^k) + q^{r+1} \leq 2q^{r+1} - 1 < q^{r+2}.$$

Par conséquent,

$$\sum_{k=1}^{r}(q^{k+1} - q^k) < q^{r+2} - q^{r+1}.$$

Il suffit alors de comparer les indices des plus grands termes non nuls de chacune de deux telles décompositions. Ils sont nécessairement égaux. On en déduit, par une récurrence simple, le résultat souhaité.

On en déduit la proposition suivante :

Proposition 3 *Soit $(d(n))_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par*

$$\alpha = \prod_{j=0}^{+\infty}(1 - \frac{x^{q^j}}{x^{q^{j+1}}}) = \sum_{n\geq 0} d(n)x^{-n}$$

Si n s'écrit

$$n = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon_k(q^{k+1} - q^k) \text{ avec } \varepsilon_k = 0 \text{ ou } 1, \varepsilon_k = 0 \text{ pour } k \text{ assez grand,}$$

alors

$$d(n) = (-1)^{\sum_{k=0}^{+\infty}\varepsilon_k},$$

sinon $d(n) = 0$.

Considérons le développement en série formelle de α^c, avec $1 \leq c \leq q-2$. Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 1 *Si n s'écrit sous la forme*

$$n = \sum_{j=0}^{+\infty} \mu_j(q^{j+1} - q^j) \text{ avec } \mu_j \in \{0, 1, ..., c\},\ \mu_j = 0 \text{ pour } j \text{ assez grand,} \quad (1)$$

une telle décomposition est unique.

Preuve Considérons une décomposition de n sous forme (1).
Si n est nul, on a nécessairement, pour tout j, $\mu_j = 0$. Supposons alors n non nul.
Soit M tel que $\mu_M \neq 0$ et tel que pour tout j strictement supérieur à M, $\mu_j = 0$. On a, pour tout entier r strictement positif :

$$(q-1)\sum_{i=1}^{r}(q^{i+1}-q^{i}) < q^{r+2}-q^{r+1}.$$

D'où

$$\sum_{j=0}^{M}\mu_j(q^{j+1}-q^{j}) < q^{M+2}-q^{M+1}.$$

Par conséquent, si n admet deux telles décompositions, les indices des plus grands termes non nuls seront égaux. Supposons alors qu'il existe $(\delta_i)_{0\leq i\leq M}$ à coefficients dans $\{0,1,...,c\}$ tels que

$$n = \sum_{j=0}^{M}\mu_j(q^{j+1}-q^{j}) = \sum_{i=0}^{M}\delta_i(q^{i+1}-q^{i}), \text{ avec } \mu_M \neq 0 \text{ et } \delta_M \neq 0.$$

Supposons, de plus, que $\delta_M \neq \mu_M$ et que, par exemple, $\mu_M > \delta_M$. On a alors

$$n - \delta_M(q^{M+1}-q^{M}) \geq q^{M+1}-q^{M} > \sum_{i=0}^{M-1}\delta_i(q^{i+1}-q^{i}) = n - \delta_M(q^{M+1}-q^{M}),$$

ce qui est impossible. Par conséquent $\delta_M = \mu_M$. On montre ainsi, par récurrence, qu'une décomposition de n sous la forme (1) est unique.

On en déduit le développement en série formelle de α^c :

Proposition 4 *Soit* $(d^c(n))_{n\in\mathbf{N}}$ *la suite définie par*

$$\alpha^c = \sum_{n\geq 0} d^c(n)x^{-n}.$$

Si n *s'écrit*

$$n = \sum_{j=0}^{+\infty}\mu_j(q^{j+1}-q^{j}) \textit{ avec } \mu_j \in \{0,1,...,c\}, \mu_j = 0 \textit{ pour } j \textit{ assez grand,}$$

alors

$$d^c(n) = (-1)^{\sum_{j=0}^{+\infty}\mu_j}\prod_{j=0}^{+\infty}\overline{\binom{\mu_j}{c}},$$

sinon $d^c(n) = 0$.

Preuve Soit $k \geq 0$. On a

$$\begin{aligned}\prod_{j=0}^{+\infty}(1-\frac{x^{q^j}}{x^{q^{j+1}}})^c &= (\sum_{n\geq 0} d(n)x^{-n})^c \\ &= \sum_{n\geq 0} x^{-n}(\sum_{n_i\geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^c n_i=n} \prod_{i=1}^c d(n_i)).\end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbf{N}$. Soient $n_1, ..., n_c$ tels que

$$n=\sum_{i=1}^c n_i,\ \prod_{i=1}^c d(n_i)\neq 0 \text{ et pour tout } i,\ n_i\geq 0.$$

Par conséquent, il existe $(\varepsilon_{i,j})$ avec $\varepsilon_{i,j}=0$ ou 1, tels que pour tout i, $\varepsilon_{i,j}=0$ pour j assez grand et $n_i=\sum_{j=0}^{+\infty}\varepsilon_{i,j}(q^{j+1}-q^j)$.

Nécessairement, n s'écrit sous la forme suivante :

$$n=\sum_{j=0}^{+\infty}\mu_j(q^{j+1}-q^j) \text{ avec } \mu_j\in\ \{0,1,...,c\}, \mu_j=0 \text{ pour } j \text{ assez grand.}$$

Réciproquement, soit n pouvant s'écrire sous cette forme. Considérons un c-uplet tel que

$$n=\sum_{i=1}^c n_i,\ \prod_{i=1}^c d(n_i)\neq 0 \text{ et pour tout } i,\ n_i\geq 0.$$

Pour un tel c-uplet, il existe $(\varepsilon_{i,j})$ avec $\varepsilon_{i,j}=0$ ou 1, tels que pour tout i, $\varepsilon_{i,j}=0$ pour j assez grand et $n_i=\sum_{j=0}^{+\infty}\varepsilon_{i,j}(q^{j+1}-q^j)$.

Or $n=\sum_{i=1}^c n_i=\sum_{i=1}^c\sum_{j=0}^{+\infty}\varepsilon_{i,j}(q^{j+1}-q^j)=\sum_{j=0}^{+\infty}(\sum_{i=1}^c\varepsilon_{i,j})(q^{j+1}-q^j)$.

Il résulte du lemme 1 que, pour tout j : $\sum_{i=1}^c\varepsilon_{i,j}=\mu_j$.

Par conséquent, il existe $\prod_{j=k+1}^{+\infty}\binom{\mu_j}{c}$ c-uplets de la forme cherchée.

On a alors

$$\prod_{i=1}^c d(n_i)=\prod_{i=1}^c(-1)^{\sum_{j=k+1}^{+\infty}\varepsilon_{i,j}}=(-1)^{\sum_{i,j}\varepsilon_{i,j}}=(-1)^{\sum_{j=k+1}^{+\infty}\mu_j}.$$

Pour achever la preuve de la proposition 4, il suffit d'ajouter que l'on est en caractéristique p.

2.3 Quelques notations

On a vu, au paragraphe 2.1, que :

$$\zeta(s)\frac{\alpha^s}{\Pi^s} = \sum_{n\geq 0} a^s(n)x^{-n} + \sum_{n\geq 0} b^s(n)x^{-n},$$

$$\text{avec } \frac{\alpha^s}{\Pi^s} = \sum_{n\geq 0} a^s(n)x^{-n}.$$

Par conséquent,

$$\alpha^c\zeta(s)\frac{\alpha^s}{\Pi^s} = (\sum_{n\geq 0} d^c(n)x^{-n})(\sum_{n\geq 0} a^s(n)x^{-n}) + (\sum_{n\geq 0} d^c(n)x^{-n})(\sum_{n\geq 0} b^s(n)x^{-n}),$$

c'est-à-dire

$$\alpha^c\zeta(s)\frac{\alpha^s}{\Pi^s} = \sum_{n\geq 0}(\sum_{k=0}^{n} a^s(k)d^c(n-k))x^{-n} + \sum_{n\geq 0}(\sum_{k=0}^{n} b^s(k)d^c(n-k))x^{-n}.$$

On définit les suites f^s et g^s de la manière suivante :

$$f^s(n) = \sum_{k=0}^{n} a^s(k)d^c(n-k),$$

$$g^s(n) = \sum_{k=0}^{n} b^s(k)d^c(n-k).$$

On a alors $e^s = f^s + g^s$, où $\sum_{n\geq 0} e^s(n)x^{-n} = \alpha^c\zeta(s)\frac{\alpha^s}{\Pi^s}$.

On définit également sur $\mathbf{Z}$ les suites F^s et G^s de la manière suivante :

$$F^s(n) = \sum_{l\geq 0} \beta_s(l)f^s(n+l),$$

$$G^s(n) = \sum_{l\geq 0} \beta_s(l)g^s(n+l).$$

On a vu que $E(n) = \sum_{l\geq 0 \text{ et } 1\leq s\leq q-2} \beta_s(l)e^s(n+l)$. Il en résulte que : $E = \sum_{1\leq s\leq q-2}(F^s + G^s)$.

2.4 Quelques propriétés

On a la proposition suivante concernant les suites f^s et g^s, à s fixé dans l'intervale $[1, q-2]$:

Proposition 5 *1. Si $f^s(n) \neq 0$ alors n s'écrit sous la forme*

$$n = \sum_{i=1}^{+\infty} \delta_i(q^i - 1) + \sum_{j=0}^{+\infty} \mu_j(q^{j+1} - q^j), \tag{2}$$

$$\textit{avec } 0 \leq \mu_j \leq c \textit{ et } 0 \leq \delta_i \leq s, \textit{ pour tous } i, j.$$

2. Si $g^s(n) \neq 0$ alors n s'écrit sous la forme

$$n = s(q + ... + q^i) + \sum_{j=i+1}^{+\infty} \delta_j(q^j - 1) + \sum_{j=0}^{+\infty} \mu_j(q^{j+1} - q^j), \tag{3}$$

avec $i \geq 1$, $0 \leq \delta_j \leq s$ et $0 \leq \mu_j \leq c$, pour tout j.

3. Si $n = \sum_{i=1}^{+\infty} \delta_i(q^i - 1) + \sum_{j=0}^{+\infty} \mu_j(q^{j+1} - q^j)$, avec $\mu_j = 0$ ou c et $\delta_j = 0$ ou s, pour tout j, et si n se décompose de manière unique sous la forme (2) alors $f^s(n) \neq 0$.

Preuve :

- **Preuve de 1 :**

  Soit n tel que $f^s(n) \neq 0$. On a : $f^s(n) = \sum_{l=0}^{n} a^s(l) d^c(n-l)$. Soit l tel que $0 \leq l \leq n$ et tel que $a^s(l)d^c(n-l) \neq 0$. On a alors, d'après les propositions 1 et 4 :

  $$l = \sum_{i=1}^{+\infty} \delta_i(q^i - 1), \text{ avec } \delta_i \in \{0, ..., s\}, \ \delta_i = 0 \text{ pour } i \text{ assez grand},$$

  $$n - l = \sum_{j=0}^{+\infty} \mu_j(q^{j+1} - q^j), \text{ avec } \mu_j \in \{0, ..., c\}, \ \mu_j = 0 \text{ pour } j \text{ assez grand}.$$

  Par conséquent,

  $$n = \sum_{i=1}^{+\infty} \delta_i(q^i - 1) + \sum_{j=0}^{+\infty} \mu_j(q^{j+1} - q^j), \text{ avec } 0 \leq \mu_j \leq c \text{ et } 0 \leq \delta_i \leq s, \text{ pour tous } i, j.$$

- **Preuve de 2 :**
Soit n tel que $g^s(n) \neq 0$. On a $g^s(n) = \sum_{l=0}^{n} b^s(l)d^c(n-l)$. Supposons, pour $0 \leq l \leq n$, que $b^s(l)d^c(n-l) \neq 0$. D'après les propositions 2 et 4, il existe :

$$i \geq 1,\ (\delta_j)_{j\in\mathbf{N}} \text{ avec } \delta_j \in \{0, ..., s\}, \delta_j = 0 \text{ pour } j \text{ assez grand, tels que}$$

$$l = s(q + ... + q^i) + \sum_{j=i+1}^{+\infty} \delta_j(q^j - 1),$$

$$(\mu_j)_{j\in\mathbf{N}} \text{ avec } \mu_j \in \{0, ..., c\}, \mu_j = 0 \text{ pour } j \text{ assez grand, tels que}$$

$$n - l = \sum_{j=0}^{+\infty} \mu_j(q^{j+1} - q^j).$$

Par conséquent,

$$n = s(q + ... + q^i) + \sum_{j=i+1}^{+\infty} \delta_j(q^j - 1) + \sum_{j=0}^{+\infty} \mu_j(q^{j+1} - q^j),$$

avec $i \geq 1$, $0 \leq \delta_j \leq s$ et $0 \leq \mu_j \leq c$, pour tout j.

- **Preuve de 3 :**
Soit $n = \sum_{i=1}^{+\infty} \delta_i(q^i - 1) + \sum_{j=0}^{+\infty} \mu_j(q^{j+1} - q^j)$, avec $\mu_j = 0$ ou c et $\delta_j = 0$ ou s, pour tout j, et tel que n se décompose de manière unique sous la forme (2). Il existe alors un unique l tel que $0 \leq l \leq n$ et tel que $a^s(l)d^c(n-l) \neq 0$. En effet, si J est l'ensemble des indices j tels que $\mu_j \neq 0$ et si I est l'ensemble des indices i tels que $\delta_i \neq 0$, on a, comme n se décompose de manière unique sous la forme (2) et d'après les propositions 1 et 4 :

$$l = \sum_{i\in I} s(q^i - 1),$$

$$n - l = \sum_{j\in J} c(q^{j+1} - q^j).$$

On en déduit que $f^s(n) = a^s(l)d^c(n-l) \neq 0$, ce qui achève la preuve de 3.

3 Schéma de la preuve du théorème 2

Nous supposerons, jusqu'à la fin, $q \neq 2$.

On va montrer que l'ensembles des sous-suites $(E(q^k n + r_k))_{n \in \mathbf{N}}$ est infini quand k décrit $\mathbf{N}$ et que r_k est choisi dépendant convenablement de k, afin d'appliquer le théorème de Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy, pour montrer la transcendance de $\displaystyle\sum_{1 \leq s \leq q-2} B_s \alpha^c \zeta(s) \frac{\alpha^s}{\Pi^s}$.

On a $E(n) = \displaystyle\sum_{l \geq 0 \text{ et } 1 \leq s \leq q-2} \beta_s(l) e^s(n+l)$, avec $e^s(n) = f^s(n) + g^s(n)$, pour tout n. Nous allons donc étudier les sous-suites $(f^s(q^k n + r_k + l))_{n \in \mathbf{N}}$ et $(g^s(q^k n + r_k + l))_{n \in \mathbf{N}}$, à s et l fixés, avec $l \geq 0$ et $1 \leq s \leq q-2$, et montrer les deux lemmes suivants, aux paragraphes 4 et 5. On conviendra de poser, si $k < i$: $\displaystyle\sum_{j=i}^{k} q^j = 0$.

Lemme 2 *Soit $k \geq c+2$, soit $r_k = h + (q-2)(q + ... + q^{k-1})$, avec $1 \leq h \leq q-2$. (On a donc $r_k \leq q^k - 1$). Soient $u(k)$ et $v(k)$ les reste et quotient de la division euclidienne de $-r_k - l + q^k - \displaystyle\sum_{j=k-c}^{k-1} q^j$ par s. On a, pour k assez grand, $u(k) \geq 1$.*
Soit, pour un tel k, $m^{s,l}(k) = -1 + s(1 + ... + q^{u(k)-1}) + v(k) q^{u(k)}$.
On a, pour tout $n < m^{s,l}(k)$: $f^s(q^k n + r_k + l) = 0$.

Lemme 3 *Soit $k \geq c+3$, soit $r_k = h + (q-2)(q + ... + q^{k-1})$. Soient $x(k)$ et $y(k)$ les reste et quotient de la division euclidienne de $-r_k - l + q^k - \displaystyle\sum_{j=k-c}^{k-1} q^j - cq$ par s. On a, pour k assez grand, $x(k) \geq 1$. Soit, pour un tel k, $n^{s,l}(k) = -1 + s(1 + ... + q^{x(k)-1}) + y(k) q^{x(k)}$.*
On a, pour tout $n < n^{s,l}(k)$: $g^s(q^k n + r_k + l) = 0$.

On a, comme $c \leq q-3$, $m^{s,l}(k) < n^{s,l}(k)$. On a, de plus, $e^s = f^s + g^s$. Le lemme suivant résulte donc des lemmes 2 et 3 :

Lemme 4 *On a, pour tout $n < m^{s,l}(k)$: $e^s(q^k n + r_k + l) = 0$.*

Or $E(n) = \displaystyle\sum_{0 \leq l \leq L \text{ et } 1 \leq s \leq q-2} \beta_s(l) e^s(n+l)$, d'où la proposition 6 :

Proposition 6 *Soit, pour k assez grand, $m(k) = \inf\{m^{s,l}(k);\ 1 \leq s \leq q-2$ et $0 \leq l \leq L\}$.*
On a, pour tout $n < m(k)$: $E(q^k n + r_k) = 0$.

Pour tous s, l, la suite $(m^{s,l}(k))_{k\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$. Par conséquent, la suite $(m(k))_{k\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$. Les sous-suites $(E(q^k n + r_k)_{n\in\mathbf{N}}$, avec $r = h + (q-2)(q+...+q^{k-1})$, commencent donc par une plage de 0 (non forcément maximale) dont la longueur tend vers $+\infty$.

On montre, de plus, au paragraphe 6, en choisissant h convenablement, qu'il existe un entier $n_0(k)$ tel que, pour une infinité de k, $E(q^k n_0(k) + r_k) \neq 0$, avec $r_k = h + (q-2)(q + ... + q^{k-1})$. Or on a le lemme suivant, dont la preuve est laissée au lecteur :

Lemme 5 *Soit $(v_k)_{k\in\mathbf{N}} = ((v_k(n))_{n\in\mathbf{N}})_{k\in\mathbf{N}}$ une famille de sous-suites de la suite $v = (v(n))_{n\in\mathbf{N}}$ telle que :*

1. *Il existe un entier $m(k)$ tel que l'on ait, pour tout $n < m(k)$: $v_k(n) = 0$.*
2. *La suite $(m(k))_{k\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$.*
3. *Les suites v_k sont non identiquement nulles pour une infinité de k.*

L'ensemble $\{v_k;\ k \in \mathbf{N}\}$ est alors infini.

Il résulte alors de ce lemme que l'ensemble $\{(E(q^k n + r_k)_{n\in\mathbf{N}}\}$ est infini. Du théorème de Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy, on déduit la transcendance de $\displaystyle\sum_{1\leq s\leq q-2} B_s \alpha^c \zeta(s) \frac{\alpha^s}{\Pi^s}$ sur $\mathbf{F}_q(x)$ pour $q \neq 2$ et, par conséquent, celle de $\displaystyle\sum_{1\leq s\leq q-2} B_s \zeta(s) \frac{\alpha^s}{\Pi^s}$, ce qui achève la preuve du théorème 2.

Remarque : On sait que $\frac{\zeta(q-1)}{\Pi^{q-1}}$ est rationnel. Les propositions 1 et 2, concernant le développement en série formelle de $\frac{\zeta(s)}{\Pi^s}$ sont encore valables, quand $s = q-1$. En revanche, on ne peut trouver de familles de sous-suites de la forme $(E(q^k n + r))_{n\in\mathbf{N}}$, avec $0 \leq r \leq q^k - 1$, vérifiant les conditions du lemme 5.

4 Preuve du lemme 2

Soient $1 \leq s \leq q-2$, $l \geq 0$ et $h \geq 1$ fixés. Rappelons que $c + s = q - 2$. Soit $k \geq c+2$.
Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $f^s(q^k n + h + l + (q-2)(q+...+q^{k-1})) \neq 0$. Il existe, selon la proposition 5.1, une suite $(\mu_j)_{j\in\mathbf{N}}$ avec $\mu_j \in \{0, ..., c\}$ et $\mu_j = 0$ pour j assez grand, et une suite $(\delta_i)_{i\in\mathbf{N}}$
avec $\delta_i \in \{0, ..., s\}$ et $\delta_i = 0$ pour i assez grand, tels que

$$q^k n + h + l + (q-2)(q + ... + q^{k-1}) = \sum_{i=1}^{+\infty} \delta_i (q^i - 1) + \sum_{j=0}^{+\infty} \mu_j (q^{j+1} - q^j).$$

On pose $\sigma = \sum_{i=1}^{+\infty} \delta_i$ et $h' = h + l$. On a

$$q^k n + h' + (q-2)(q + ... + q^{k-1}) = \sum_{1 \leq i \leq k-1} \delta_i q^i + \sum_{l \geq k} \delta_l q^l + \sum_{j=0}^{+\infty} \mu_j (q^{j+1} - q^j) - \sigma.$$

On en déduit que

$$\sigma = \lambda q^k - h' + \sum_{1 \leq i \leq k-1} (\delta_i - (q-2)) q^i + \sum_{j=0}^{k-1} \mu_j (q^{j+1} - q^j),$$

avec

$$\lambda = -n + \sum_{l \geq k} \delta_l q^{l-k} + \sum_{j=k}^{+\infty} \mu_j (q^{j+1-k} - q^{j-k}).$$

Autrement dit,

$$n = -\lambda + \sum_{l \geq k \text{ et } \sum_{l \geq k} \delta_l = \mathcal{S}} \delta_l q^{l-k} + \sum_{j=k}^{+\infty} \mu_j (q^{j+1-k} - q^{j-k}), \tag{4}$$

$$\text{avec} \quad \mathcal{S} = \sigma - \sum_{i<k} \delta_i,$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{S} = \lambda q^k - h' + \sum_{1 \leq i \leq k-1} (\delta_i - (q-2)) q^i + \sum_{j=0}^{k-1} \mu_j (q^{j+1} - q^j) - \sum_{1 \leq i \leq k-1} \delta_i. \tag{5}$$

$\mathcal{S}$ s'écrit encore :

$$\mathcal{S} = \lambda q^k - h' - \mu_0 + \mu_{k-1} q^k + \sum_{1 \leq i \leq k-1} \gamma_i q^i - \sum_{1 \leq i \leq k-1} \delta_i, \tag{6}$$

$$\text{avec } \gamma_i = \delta_i - (q-2) + \mu_{i-1} - \mu_i.$$

On a, pour $1 \leq i \leq q-1$: $-(q-2) - c \leq \gamma_i \leq 0$.

Nous allons montrer, pour k assez grand, que si n s'écrit sous la forme (4), n vérifie l'inégalité $n \geq m^{s,l}(k)$, avec

$$m^{s,l}(k) = -1 + s(1 + ... + q^{u(k)-1}) + v(k) q^{u(k)},$$

où $u(k)$ et $v(k)$ sont les reste et quotient de la division euclidienne par s de la quantité

$q^k - h' - (q-1)\displaystyle\sum_{j=k-c}^{k-1} q^j - (q-2)(q^{k-c-1} + ... + q)$. On en déduira, selon la proposition 5.1, que pour tout $n < m^{s,l}(k)$: $f^s(q^k n + h' + (q-2)(q + ... + q^{k-1})) = 0$.

Supposons k assez grand pour que : $q^k - h' - (q-1)\displaystyle\sum_{j=k-c}^{k-1} q^j - (q-2)(q^{k-c-1} + ... + q) \geq 0$.

Notons qu'une condition nécessaire pour que n s'écrive sous la forme (4) est : $\mathcal{S} \geq 0$. On a donc $\lambda + \mu_{k-1} \geq 1$, sinon $\mathcal{S} < 0$.

Nous allons raisonner selon la valeur de $\lambda + \mu_{k-1}$.

- Supposons que $\lambda + \mu_{k-1} \geq 2$. On a alors, d'après (5),

$$\mathcal{S} \geq (\lambda + \mu_{k-1})q^k - h' - \mu_{k-1}q^{k-1} - (q-2)(q^{k-1} + ... + q).$$

  Or $\mu_{k-1}q^{k-1} \leq q^k$, d'où

$$\mathcal{S} \geq (\lambda + \mu_{k-1} - 1)q^k - h' - (q-2)(q^{k-1} + ... + q).$$

  Par conséquent, si n s'écrit sous la forme (4), avec $\lambda + \mu_{k-1} \geq 2$, on obtient $n \geq -\lambda + s(1 + ... + q^{u'(k)-1}) + v'(k)q^{u'(k)}$, où $u'(k)$ et $v'(k)$ sont les reste et quotient de la division euclidienne de $(\lambda + \mu_{k-1} - 1)q^k - h' - (q-2)(q^{k-1} + ... + q)$ par s. Or on vérifie que $m^{s,l}(k) < -\lambda + s(1 + ... + q^{u'(k)-1}) + v'(k)q^{u'(k)}$.

- Supposons alors $\lambda + \mu_{k-1} = 1$. On a donc $-\lambda \geq -1$.
  Montrons qu'on a alors, si $\mathcal{S} \geq 0$,

$$\mathcal{S} \geq q^k - h' - (q-1)\sum_{j=k-c}^{k-1} q^j - (q-2)(q^{k-c-1} + ... + q).$$

  On en déduira que si n s'écrit sous la forme (4), avec $\lambda + \mu_{k-1} = 1$, n vérifie $n \geq m^{s,l}(k)$.

  On a, si $c = 0$, $\mu_i = 0$, pour tout i. On obtient alors, d'après (5) :

$$\mathcal{S} \geq q^k - h' - (q-2)(q^{k-1} + ... + q).$$

  Supposons donc $c \neq 0$ et distinguons les cas suivant les valeurs des γ_i, pour $1 \leq i \leq q-1$.

  - Supposons qu'il existe i tel que $k - c \leq i \leq k-1$ et tel que $\gamma_i \geq -(q-2)$.
    Soit i_0 le plus grand i tel que l'on ait $\gamma_i \geq -(q-2)$. On a alors $\gamma_j =$

$-(q-1)$ pour $j \geq i_0+1$, sinon $\mathcal{S} < 0$. On a, de plus, $\gamma_i \geq -(q-2)-c$, pour tout i, par définition. On en déduit, d'après (6), que :

$\mathcal{S} \geq q^k - h' - \mu_0 - (q-1)(q^{k-1}+...+q^{i_0+1}) - q^{i_0}(q-2) - ((q-2)+c)(q^{i_0-1}+...+q).$

Or $(q-1)(q+...+q^{i_0-1}) < q^{i_0}$. D'où

$\mathcal{S} \geq q^k - h' - \mu_0 - (q-1)(q^{k-1}+...+q^{i_0+1}) - q^{i_0}(q-1) - (c-1)(q^{i_0-1}+...+q).$

On a alors, comme $i_0 \geq k-c$,

$$\mathcal{S} \geq q^k - h' - (q-1)\sum_{j=k-c}^{k-1} q^j - (q-2)(q^{k-c-1}+...+q).$$

- Supposons donc que pour tout i tel que $k-c \leq i \leq k-1$, on ait $\gamma_i \leq -(q-1)$.
S'il existe i dans $[k-c, k-1]$ tel que $\gamma_i < -(q-1)$, on a alors $\mathcal{S} < 0$. En effet, soit i_0 le plus grand i tel que l'on ait $\gamma_i < -(q-1)$. On a, comme les γ_i sont négatifs,

$$\mathcal{S} \leq q^k - h' - \mu_0 - (q-1)(q^{k-1}+...+q^{i_0+1}) - q^{i_0}q < 0.$$

Par conséquent, pour tout i tel que $k-c \leq i \leq k-1$, on a $\gamma_i = -(q-1)$, c'est-à-dire $\gamma_i = \delta_i - (q-2) + \mu_{i-1} - \mu_i = -(q-1)$, pour $k-c \leq i \leq k-1$. En additionnant ces c égalités, on obtient :

$$-c = \delta_{k-1} + ... + \delta_{k-c} - \mu_{k-1} + \mu_{k-c-1}.$$

Or $\mu_{k-1} \leq c$, $\delta_j \geq 0$, pour tout j et $\mu_{k-c-1} \geq 0$. On a donc $\mu_{k-1} = c$, $\mu_{k-c-1} = 0$ et $\delta_j = 0$, pour $k-c \leq j \leq k-1$. Revenons à l'écriture (5). On a alors :

$$\mathcal{S} = q^k - h' - (q-1)\sum_{j=k-c}^{k-1} q^j + \sum_{1\leq i\leq k-c-1} (\delta_i - (q-2))q^i - \sum_{1\leq i\leq k-c-1} \delta_i + \sum_{j=0}^{k-c-2} \mu_j(q^{j+1}-q^j).$$

Par conséquent,

$$\mathcal{S} \geq q^k - h' - (q-1)\sum_{j=k-c}^{k-1} q^j - (q-2)(q^{k-c-1}+...+q).$$

En conclusion, nous avons donc montré, dans tous les cas, l'inégalité $n \geq m^{s,l}(k)$, pour n vérifiant (4).

5 Preuve du lemme 3

Soient $1 \leq s \leq q-2$, $l \geq 0$ et $h \geq 1$ fixés. Soit $k \geq c+3$.
Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $g^s(q^k n + h + l + (q-2)(q + ... + q^{k-1})) \neq 0$. Il existe, selon la proposition 5.2, un entier $i \geq 1$, une suite $(\delta_j)_{j\in\mathbf{N}}$ avec $\delta_j \in \{0, ..., s\}$ et $\delta_j = 0$ pour j assez grand, et une suite $(\mu_j)_{j\in\mathbf{N}}$ avec $\mu_j \in \{0, ..., c\}$ et $\mu_j = 0$ pour j assez grand, tels que

$$q^k n+h+l+(q-2)(q+...+q^{k-1}) = s(q+...+q^i)+\sum_{j=i+1}^{+\infty} \delta_j(q^j-1)+\sum_{j=0}^{+\infty} \mu_j(q^{j+1}-q^j).$$

On pose $\sigma = \displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \delta_j$ et $h' = h + l$.

Nous allons distinguer trois cas suivant la position de i par rapport à k :

Cas 1 : Si $i \geq k$, on a

$$q^k n+h'+(q-2)(q+...+q^{k-1}) = s(q+...+q^{k-1})+s\sum_{j=k}^{i} q^j+\sum_{j=i+1}^{+\infty} \delta_j q^j+\sum_{j=0}^{+\infty} \mu_j(q^{j+1}-q^j)-\sigma.$$

On en déduit que

$$\sigma = \lambda q^k - h' + (s-(q-2))(q+...+q^{k-1}) + \sum_{1\leq j\leq k-1} \mu_j(q^{j+1}-q^j),$$

$$\text{avec } \lambda = -n + s\sum_{j=k}^{i} q^{j-k} + \sum_{j\geq i+1} \delta_j q^{j-k} + \sum_{j=k}^{+\infty} \mu_j(q^{j+1-k}-q^{j-k}).$$

Or $s-(q-2) = -c$. Autrement dit,

$$n = -\lambda + s\sum_{j=k}^{i} q^{j-k} + \sum_{l\geq i+1 \text{ et } \sum_{l\geq i+1}\delta_l = \mathcal{S}} \delta_l q^{l-k} + \sum_{j=k}^{+\infty} \mu_j(q^{j+1-k}-q^{j-k}), \quad (7)$$

$$\text{avec } \mathcal{S} = \sigma = \lambda q^k - h' - c(q+...+q^{k-1}) + \sum_{1\leq j\leq k-1} \mu_j(q^{j+1}-q^j). \quad (8)$$

On a donc

$$\mathcal{S} = \lambda q^k - h' - \mu_0 + \mu_{k-1}q^k + \sum_{1\leq i\leq k-1} \gamma_i q^i,$$

$$\text{avec } \gamma_i = -c + \mu_{i-1} - \mu_i.$$

Nous allons montrer que si n s'écrit sous la forme (7), n vérifie l'inégalité $n \geq n_1(k)$, pour k assez grand, avec

$$n_1(k) = -1 + s(1 + ... + q^{x_1(k)}) + y_1(k)q^{x_1(k)+1},$$

où $x_1(k)$ et $y_1(k)$ sont les reste et quotient de la division euclidienne par s de la quantité

$q^k - h' - (q-1)\sum_{j=k-\alpha}^{k-1} q^j - (q-2)q^{k-\alpha-1} - c(q^{k-\alpha-2} + ... + q)$, et α le reste de la division euclidienne de c par $s+1$.

Supposons k assez grand pour que l'on ait :

$$q^k - h' - (q-1)\sum_{j=k-\alpha}^{k-1} q^j - (q-2)q^{k-\alpha-1} - c(q^{k-\alpha-2} + ... + q) \geq 0.$$

Supposons, de plus, $\mathcal{S} \geq 0$. On a donc $\lambda + \mu_{k-1} \geq 1$, sinon $\mathcal{S} < 0$.

Nous allons distinguer deux cas selon la valeur de $\lambda + \mu_{k-1}$.

- Supposons $\lambda + \mu_{k-1} \geq 2$. On a alors, d'après (8),

$$\mathcal{S} \geq (\lambda + \mu_{k-1})q^k - h' - \mu_{k-1}q^{k-1} - c(q^{k-1} + ... + q).$$

Or $\mu_{k-1}q^{k-1} \leq q^k$, d 'où

$$\mathcal{S} \geq (\lambda + \mu_{k-1} - 1)q^k - h' - c(q^{k-1} + ... + q).$$

Par conséquent, si n s'écrit sous la forme (7) avec $\lambda + \mu_{k-1} \geq 2$, on obtient $n \geq -\lambda + s(1 + ... + q^{x'_1(k)}) + y'_1(k)q^{x'_1(k)+1}$, où $i = k$ et où $x'_1(k)$ et $y'_1(k)$ sont les reste et quotient de la division euclidienne par s de $(\lambda + \mu_{k-1} - 1)q^k - h' - c(q^{k-1} + ... + q)$. Or on vérifie que $n_1(k) < -\lambda + s(1 + ... + q^{x'_1(k)}) + y'_1(k)q^{x'_1(k)+1}$.

- Supposons $\lambda + \mu_{k-1} = 1$. On a donc $-\lambda \geq -1$.
Montrons que si $\mathcal{S} \geq 0$, on a

$$\mathcal{S} \geq q^k - h' - (q-1)\sum_{j=k-\alpha}^{k-1} q^j - (q-2)q^{k-\alpha-1} - c(q^{k-\alpha-2} + ... + q).$$

On en déduira que si n s'écrit sous la forme (7), avec $\lambda + \mu_{k-1} = 1$, n vérifie $n \geq n_1(k)$, obtenu pour $i = k$.

Supposons $c \leq s$. D'après (8) on a, comme $\lambda + \mu_{k-1} = 1$,

$$\mathcal{S} \geq q^k - h' - \mu_{k-1}q^{k-1} - c(q^{k-1} + ... + q).$$

Or $\mu_{k-1} \leq c$ et $2c \leq q-2$, car $c \leq s$. On obtient donc :

$$\mathcal{S} \geq q^k - h' - (q-2)q^{k-1} - c(q^{k-2} + ... + q).$$

Supposons donc $c \geq s+1$ et distinguons les cas selon les valeurs des γ_i, pour $1 \leq i \leq k-1$.

- Supposons qu'il existe i tel que $k-\alpha \leq i \leq k-1$ et tel que $\gamma_i \geq -(q-2)$.

  Soit i_0 le plus grand i tel que l'on ait $\gamma_i \geq -(q-2)$. On a alors $\gamma_j = -(q-1)$ pour $j \geq i_0+1$, sinon $\mathcal{S} < 0$. On a, de plus, $\gamma_i \geq -2c$, pour tout i, par définition. On en déduit que :

$$\mathcal{S} \geq q^k - h' - \mu_0 - (q-1)\sum_{j=i_0+1}^{k-1} q^j - q^{i_0}(q-2) - (2c)(q^{i_0-1} + ... + q).$$

  Or $2c \geq q-1$, car $c \geq s+1$ et $(q-1)(q + ... + q^{i_0-1}) < q^{i_0}$. D'où

$$\mathcal{S} \geq q^k - h' - \mu_0 - (q-1)\sum_{j=i_0+1}^{k-1} q^j - q^{i_0}(q-1) - (2c-(q-1))(q^{i_0-1} + ... + q).$$

  On a alors, comme $i_0 \geq k-\alpha$ et comme $c \leq q-2$,

$$\mathcal{S} \geq q^k - h' - (q-1)(q^{k-1} + ... + q^{k-\alpha}) - (q-2)q^{k-\alpha-1} - c(q^{k-\alpha-2} + ... + q).$$

- Supposons donc que pour tout i tel que $k-\alpha \leq i \leq k-1$, on ait $\gamma_i \leq -(q-1)$.

  S'il existe i tel que $\gamma_i < -(q-1)$, on a alors $\mathcal{S} < 0$. Par conséquent, pour tout i tel que $k-\alpha \leq i \leq k-1$, on a $\gamma_i = -(q-1)$, c'est-à-dire $\gamma_i = -c + \mu_{i-1} - \mu_i = -(q-1)$, pour $k-\alpha \leq i \leq k-1$. En additionnant ces α égalités, on obtient, comme $s+c = q-2$: $-\alpha(s+1) = -\mu_{k-1} + \mu_{k-\alpha-1}$. On a donc : $\mu_{k-\alpha-1} \leq c - \alpha(s+1)$. Revenons à l'écriture (8) :

$$\mathcal{S} = q^k - h' - (q-1)(q^{k-1} + ... + q^{k-\alpha}) - \mu_{k-\alpha-1}q^{k-\alpha-1} + \sum_{i=1}^{k-\alpha-2} \mu_j(q^{j+1} - q^j) - c(q^{k-\alpha-1} + ... + q).$$

  Or $\mu_{k-\alpha-1} + c \leq c - \alpha(s+1) + c \leq s + c$. Par conséquent,

$$\mathcal{S} \geq q^k - h' - (q-1)(q^{k-1} + ... + q^{k-\alpha}) - (q-2)q^{k-\alpha-1} - c(q^{k-\alpha-2} + ... + q).$$

Nous avons donc montré, dans tous les cas , l'inégalité $n \geq n_1(k)$, pour n vérifiant (7).

Cas 2 : Si $i = k-1$, on a

$$q^k n + h' + (q-2)(q + ... + q^{k-1}) = s(q + ... + q^{k-1}) + \sum_{j=k}^{+\infty} \delta_j q^j + \sum_{j=0}^{+\infty} \mu_j(q^{j+1} - q^j) - \sigma.$$

On en déduit que

$$\sigma = \lambda q^k - h' + (s-(q-2))(q+...+q^{k-1}) + \sum_{0\leq j\leq k-1} \mu_j(q^{j+1}-q^j),$$

$$\text{avec } \lambda = -n + \sum_{j\geq k} \delta_j q^{j-k} + \sum_{j=k}^{+\infty} \mu_j(q^{j+1-k}-q^{j-k}).$$

Or $s-(q-2) = -c$. Autrement dit,

$$n = -\lambda + \sum_{l\geq k \text{ et } \sum_{l\geq k}\delta_l = \mathcal{S}} \delta_l q^{l-k} + \sum_{j=k}^{+\infty} \mu_j(q^{j+1-k}-q^{j-k}), \tag{9}$$

$$\text{avec } \mathcal{S} = \sigma = \lambda q^k - h' - c(q+...+q^{k-1}) + \sum_{0\leq j\leq k-1} \mu_j(q^{j+1}-q^j).$$

On montre, de même qu'au cas précédent que, pour k assez grand, si n s'écrit sous la forme (9), on obtient alors $n \geq n_2(k)$ avec

$$n_2(k) = -1 + s(1+...+q^{x_1(k)-1}) + y_1(k)q^{x_1(k)},$$

où $x_1(k)$ et $y_1(k)$ sont les reste et quotient de la division euclidienne par s de la quantité
$q^k - h' - (q-1)\displaystyle\sum_{j=k-\alpha}^{k-1} q^j - (q-2)q^{k-\alpha-1} - c(q^{k-\alpha-2}+...+q)$, et α le reste de la division euclidienne de c par $s+1$.

Cas 3 : Si $1 \leq i \leq k-2$, on a

$$q^k n + h' + (q-2)(q+...+q^{k-1}) = s(q+...+q^i) + \sum_{j=i+1}^{+\infty} \delta_j q^j + \sum_{j=0}^{+\infty} \mu_j(q^{j+1}-q^j) - \sigma.$$

On en déduit que

$$\sigma = \lambda q^k - h' + (s-(q-2))(q+...+q^i) + \sum_{i+1\leq j\leq k-1} (\delta_j - (q-2))q^j + \sum_{0\leq j\leq k-1} \mu_j(q^{j+1}-q^j),$$

$$\text{avec } \lambda = -n + \sum_{j\geq k} \delta_j q^{j-k} + \sum_{j=k}^{+\infty} \mu_j(q^{j+1-k}-q^{j-k}).$$

Autrement dit,

$$n = -\lambda + \sum_{l \geq k \text{ et } \sum_{l \geq k} \delta_l = \mathcal{S}} \delta_l q^{l-k} + \sum_{j=k}^{+\infty} \mu_j (q^{j+1-k} - q^{j-k}), \tag{10}$$

avec

$$\mathcal{S} = \lambda q^k - h' - c(q + ... + q^i) + \sum_{i+1 \leq j \leq k-1} (\delta_j - (q-2)) q^j - \sum_{i+1 \leq j \leq k-1} \delta_j + \sum_{0 \leq j \leq k-1} \mu_j (q^{j+1} - q^j). \tag{11}$$

On a

$$\mathcal{S} = \lambda q^k - h' - \mu_0 + \mu_{k-1} q^k + \sum_{1 \leq i \leq k-1} \gamma_i q^i - \sum_{1 \leq i \leq k-1} \delta_i$$

avec $\gamma_j = \delta_j - (q-2) + \mu_{j-1} - \mu_j$, si $j \geq i+1$ et $\gamma_j = -c + \mu_{j-1} - \mu_j$, si $j \leq i$.

Nous allons montrer que si n s'écrit sous la forme (10), n vérifie l'inégalité $n \geq n_3(k)$, pour k assez grand, avec

$$n_3(k) = -1 + s(1 + ... + q^{x_3(k)-1}) + y_3(k) q^{x_3(k)},$$

où $x_3(k)$ et $y_3(k)$ sont les reste et quotient de la division euclidienne par s de la quantité

$$q^k - h' - (q-1) \sum_{j=k-c}^{k-1} q^j - (q-2)(q^{k-c-1} + ... + q^2) - cq.$$

Supposons k assez grand pour que : $q^k - h' - (q-1) \sum_{j=k-c}^{k-1} q^j - (q-2)(q^{k-c-1} + ... + q^2) - cq \geq 0$.

Supposons, de plus, $\mathcal{S} \geq 0$. On a donc $\lambda + \mu_{k-1} \geq 1$, sinon $\mathcal{S} < 0$.

Nous allons raisonner, ici encore, selon la valeur prise par $\lambda + \mu_{k-1}$.

- Supposons que $\lambda + \mu_{k-1} \geq 2$. On a alors, d'après (11), en posant $i = 1$,

  $$\mathcal{S} \geq (\lambda + \mu_{k-1} - 1) q^k - h' - (q-2)(q^{k-1} + ... + q^2) - cq,$$

  Par conséquent, si n s'écrit sous la forme (10) avec $\lambda + \mu_{k-1} \geq 2$, on obtient
  $n \geq -\lambda + s(1 + ... + q^{x'_3(k)-1}) + y'_3(k) q^{x'_3(k)}$, où $x'_3(k)$ et $y'_3(k)$ sont les reste et quotient de la division euclidienne par s de $(\lambda + \mu_{k-1} - 1) q^k - h' - (q-2)(q^{k-1} + ... + q^2) - cq$. Or on vérifie que $n_3(k) < -\lambda + s(1 + ... + q^{x'_3(k)-1}) + y'_3(k) q^{x'_3(k)}$.

- Supposons alors $\lambda + \mu_{k-1} = 1$. On a donc $-\lambda \geq -1$.
  Montrons qu'on a alors, si $\mathcal{S} \geq 0$,

  $$\mathcal{S} \geq q^k - h' - (q-1) \sum_{j=k-c}^{k-1} q^j - (q-2)(q^{k-c-1} + ... + q^2) - cq.$$

On en déduira que si n s'écrit sous la forme (10), avec $\lambda + \mu_{k-1} = 1$, n vérifie alors $n \geq n_3(k)$.

Nous allons distinguer deux cas suivant les valeurs prises par i.

- Supposons $i+1 \leq k-c-1$.
  On démontre, de même qu'aux paragraphes 4 et 5.1, que

$$\mathcal{S} \geq q^k - h' - (q-1)\sum_{j=k-c}^{k-1} q^j - (q-2)(q^{k-c-1} + ... + q^{i+1}) - c(q^i + ... + q).$$

  En attribuant à i la valeur 1, on obtient finalement :

$$\mathcal{S} \geq q^k - h' - (q-1)\sum_{j=k-c}^{k-1} q^j - (q-2)(q^{k-c-1} + ... + q^2) - cq.$$

- Supposons $i+1 \geq k-c$. On a alors $c \neq 0$, car on a supposé $i \leq k-2$.
  S'il existe j tel que $k-c \leq j \leq k-1$ et tel que $\gamma_j \geq -(q-2)$, on montre, de même qu'aux paragraphes 4 et 5.1, que l'on a bien :

$$\mathcal{S} \geq q^k - h' - (q-1)\sum_{j=k-c}^{k-1} q^j - (q-2)(q^{k-c-1} + ... + q^2) - cq.$$

  Sinon, pour tout $k-c \leq j \leq k-1$, on a $\gamma_j = -(q-1)$. On a les égalités suivantes : pour $i+1 \leq j \leq k-1$, $\delta_j - (q-2) + \mu_{i-1} - \mu_i = -(q-1)$ et pour $k-c \leq j \leq i$, $-c + \mu_{j-1} - \mu_j = -(q-1)$. En additionnant ces c égalités, on obtient :

$$-c \leq \delta_{k-1} + ... + \delta_{i+1} - \mu_{k-1} + \mu_{k-c-1}.$$

  On en déduit que $\mu_{k-c-1} = 0$ et que $\delta_j = 0$, pour tout j.
  Revenons alors à l'écriture (11). On a, comme $\mu_{k-c-1} = 0$:

$$\mathcal{S} = q^k - h' - (q-1)(q^{k-1} + ... + q^{k-c}) - c\sum_{1 \leq j \leq k-c-1} q^j + \sum_{j=0}^{k-c-2} \mu_j(q^{j+1} - q^j).$$

  On en déduit que l'on a bien

$$\mathcal{S} \geq q^k - h' - (q-1)\sum_{j=k-c}^{k-1} q^j - (q-2)(q^{k-c-1} + ... + q^2) - cq.$$

Nous avons donc montré, dans tous les cas , l'inégalité $n \geq n_3(k)$, pour n vérifiant (10).

On a $n_1(k) > n_2(k) > n_3(k)$. Soit $n^{s,l}(k) = n_3(k)$. On a donc montré que, pour tout $n < n^{s,l}(k)$: $g^s(q^k n(k) + h' + (q-2)(q + .. + q^{k-1})) = 0$, ce qui achève la preuve du lemme 3.

6 Non-nullité des suites $(E(q^k n(k) + r_k)))_{n\in\mathbf{N}}$

Nous allons construire un entier $n_0(k)$ tel que l'on ait $E(q^k n_0(k) + r_k)) \neq 0$, pour une infinité de k, avec $r_k = h + (q-2)(q + ... + q^{k-1})$. Pour cela, nous allons définir $n_0(k)$ en 6.1, puis nous exhiberons un entier s_0 tel que l'on ait, pour $N_0(k) = q^k n_0(k) + r_k$, $F^{s_0}(N_0(k)) \neq 0$ (6.2), $G^{s_0}(N_0(k)) = 0$ (6.3), et pour $s \neq s_0$, $F^s(N_0(k)) = 0$ (6.4) et $G^s(N_0(k)) = 0$ (6.5). On en déduira que $E(N_0(k)) \neq 0$, pour une infinité de k, puisque $E = \sum_{1\leq s\leq q-2} (F^s + G^s)$.

6.1 Définition de l'entier $n_0(k)$

Soit s_0 le plus grand s tel que $B_s \neq 0$. Soit l_0 le plus grand l tel que $\beta_{s_0}(l) \neq 0$. On pose $c_0 = q - 2 - s_0$.

Considérons n tel que $f^{s_0}(q^k n + h + l_0 + (q-2)(q + ... + q^{k-1})) \neq 0$. On a vu, au paragraphe 4, qu'un tel n s'écrit, pour k assez grand, sous la forme :

$$n = -\lambda + \sum_{l\geq k \text{ et } \sum_{l\geq k}\delta_l = \mathcal{S}} \delta_l q^{l-k} + \sum_{j=k}^{+\infty} \mu_j (q^{j+1-k} - q^{j-k}),$$

avec $\mathcal{S} = \lambda q^k - h - l_0 + \sum_{1\leq j\leq k-1} (\delta_j - (q-2))q^j - \sum_{1\leq j\leq k-1} \delta_j + \sum_{j=0}^{k-1} \mu_j (q^{j+1} - q^j)$,

$$\text{où } 0 \leq \delta_j \leq s_0,\ 0 \leq \mu_j \leq c_0, \text{ pour tout } j.$$

Posons $\lambda = 1$, $\mu_j = 0$ et $\delta_j = 0$, pour $1 \leq j \leq k-1$. On a alors :

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_k = q^k - h - l_0 - (q-2)(q + ... + q^{k-1}).$$

On peut trouver $1 \leq h \leq s_0$ tel que pour une infinité de k, $\mathcal{S}_k$ soit divisible par s_0. Nous allons donc fixer ainsi la valeur de h et supposer, pour la suite, k à valeurs dans un ensemble infini et tel que $\mathcal{S}_k$ soit divisible par s_0.

On définit M_k tel que $\mathcal{S}_k = s_0 M_k$. Soient $n_0(k) = -1 + s_0 \sum_{j=1}^{M_k} q^j + c_0 \sum_{j=0}^{M_k-1} (q^{j+1} - q^j)$ et $N_0(k) = q^k n_0(k) + h + (q-2)(q + ... + q^{k-1})$. On pose $N_k = M_k + k$. On a alors

$N_0(k) + l_0 = s_0 \sum_{j=k+1}^{N_k} (q^j - 1) + c_0 \sum_{j=k}^{N_k-1} (q^{j+1} - q^j)$.

6.2 Preuve de la non-nullité de $F^{s_0}(N_0(k))$

On a $F^{s_0}(n) = \sum_{l \geq 0} \beta_s(l) f^{s_0}(n+l)$. Nous allons montrer que $f^{s_0}(N_0(k)+l_0) \neq 0$ et que $f^{s_0}(N_0(k)+l) = 0$, pour $l \neq l_0$. On en déduira que $F^{s_0}(N_0(k)) \neq 0$.

Supposons qu'il existe l tel que $f^{s_0}(N_0(k)+l) \neq 0$. On a alors, d'après la proposition 5.1,

$$N_0(k) + l = \sum_{i=1}^{+\infty} \delta_i (q^i - 1) + \sum_{j=0}^{+\infty} \mu_j (q^{j+1} - q^j), \tag{12}$$

avec $0 \leq \delta_i \leq s_0$ et $0 \leq \mu_j \leq c_0,$ pour tous i, j. Rappelons que

$$N_0(k) + l_0 = s_0 \sum_{i=k+1}^{N_k} (q^i - 1) + c_0 \sum_{j=k}^{N_k - 1} (q^{j+1} - q^j).$$

On a donc $N_0(k) + l_0 < s_0(q + ... + q^{N_k - 1}) + (c_0 + s_0) q^{N_k}$. Or $c_0 + s_0 = q - 2$ et $l \leq l_0$. Il en résulte que $N_0(k) + l < q^{N_k + 1} - q^{N_k}$.

Par conséquent, si I et J sont les plus grands indices tels que l'on ait respectivement $\delta_i \neq 0$ et $\mu_j \neq 0$, on a alors $I \leq N_k$ et $J \leq N_k - 1$. On en déduit l'égalité suivante :

$$s_0 \sum_{i=k+1}^{N_k} (q^i - 1) + c_0 \sum_{j=k}^{N_k - 1} (q^{j+1} - q^j) = \sum_{i=1}^{N_k} \delta_i (q^i - 1) + \sum_{j=0}^{N_k - 1} \mu_j (q^{j+1} - q^j) + l_0 - l,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{i=k+1}^{N_k} (s_0 - \delta_i)(q^i - 1) + \sum_{j=k}^{N_k - 1} (c_0 - \mu_j)(q^{j+1} - q^j) = \sum_{j=1}^{k} \delta_j (q^j - 1) + \sum_{j=0}^{k-1} \mu_j (q^{j+1} - q^j) + l_0 - l.$$

Supposons que l'on ait $\sum_{i=k+1}^{N_k} (s_0 - \delta_i)(q^i - 1) \neq 0$ ou $\sum_{j=k}^{N_k - 1} (c_0 - \mu_j)(q^{j+1} - q^j) \neq 0$. On a alors $\sum_{i=k+1}^{N_k} (s_0 - \delta_i)(q^i - 1) + \sum_{j=k}^{N_k - 1} (c_0 - \mu_j)(q^{j+1} - q^j) \geq q^{k+1} - q^k$. La différence $l_0 - l$ étant majorée indépendamment de k, on a, pour k assez grand :

$$\sum_{j=1}^{k} \delta_j (q^j - 1) + \sum_{j=0}^{k-1} \mu_j (q^{j+1} - q^j) + l_0 - l < q^{k+1} - q^k.$$

Par conséquent, on a $\sum_{i=k+1}^{N_k}(s_0-\delta_i)(q^i-1)=0$ et $\sum_{j=k}^{N_k-1}(c_0-\mu_j)(q^{j+1}-q^j)=0$.

On en déduit que $\sum_{i=1}^{+\infty}\delta_i(q^i-1)+\sum_{j=0}^{+\infty}\mu_j(q^{j+1}-q^j)+l_0-l=0$. Or $l_0-l\geq 0$. Ceci n'est donc possible que pour $l=l_0$ et on a alors unicité de la décomposition sous forme (12), pour $N_0(k)+l_0$.

Par conséquent, d'après la proposition 5, on a $f^{s_0}(N_0(k)+l_0)\neq 0$ et $f^{s_0}(N_0(k)+l)=0$, pour $l\neq l_0$. On a donc montré que $F^{s_0}(N_0(k))\neq 0$.

6.3 Preuve de l'égalité $G^{s_0}(N_0(k))=0$

On a $G^{s_0}(n)=\sum_{l\geq 0}\beta_{s_0}(l)g^{s_0}(n+l)$. Montrons que $g^{s_0}(N_0(k)+l)=0$, pour tout l. On en déduira que $G^{s_0}(N_0(k))=0$.

Supposons qu'il existe l tel que $g^{s_0}(N_0(k)+l)\neq 0$. On a alors, d'après la proposition 5.2 ,

$$N_0(k)+l=s_0(q+...+q^t)+\sum_{j=t+1}^{+\infty}\delta_j(q^j-1)+\sum_{j=0}^{+\infty}\mu_j(q^{j+1}-q^j),$$

avec $t\geq 1$, $\delta_j\in\{0,...,s_0\},\delta_j=0$ pour j assez grand, $\mu_j\in\{0,...,c_0\},\mu_j=0$ pour j assez grand.

Si $\delta_j=0$, pour tout j, on pose $I=t$. On montre , de même qu'au paragraphe 6.2, que si I et J sont les plus grands indices tels que l'on ait respectivement $\delta_i\neq 0$ et $\mu_j\neq 0$, on a alors $I\leq N_k$ et $J\leq N_k-1$. En particulier, on a $t\leq N_k$. Nous allons distinguer deux cas selon les valeurs prises par t.

- Supposons $t\leq k$. On a l'égalité suivante :

$$\sum_{j=k+1}^{N_k}(s_0-\delta_j)(q^j-1)+\sum_{j=k}^{N_k-1}(c_0-\mu_j)(q^{j+1}-q^j)=s_0(q+...+q^t)+\sum_{j=t+1}^{k}\delta_j(q^j-1)+\sum_{j=0}^{k-1}\mu_j(q^{j+1}-q^j)+l_0-l.$$

  Supposons que l'on ait $\sum_{j=k+1}^{N_k}(s_0-\delta_j)(q^j-1)+\sum_{j=k}^{N_k-1}(c_0-\mu_j)(q^{j+1}-q^j)\neq 0$.

  On a alors $\sum_{j=k+1}^{N_k}(s_0-\delta_j)(q^j-1)+\sum_{j=k}^{N_k-1}(c_0-\mu_j)(q^{j+1}-q^j)\geq q^{k+1}-q^k$.

Or, pour k assez grand, on obtient $s_0(q+...+q^t)+\sum_{j=t+1}^{k}\delta_j(q^j-1)+\sum_{j=0}^{k-1}\mu_j(q^{j+1}-q^j)+l_0-l<q^{k+1}-q^k$.

On a donc $\sum_{j=k}^{N_k}(s_0-\delta_j)(q^j-1)+\sum_{j=k}^{N_k-1}(c_0-\mu_j)(q^{j+1}-q^j)=0$. Il en résulte que

$s_0(q+...+q^t)+\sum_{j=t+1}^{k-1}\delta_j(q^j-1)+\sum_{j=0}^{k-1}\mu_j(q^{j+1}-q^j)+l_0-l=0$. Or $l_0\geq l$. On obtient donc une contradiction.

- Supposons $t\geq k+1$. On est ramené à l'égalité suivante :

$$\sum_{j=t+1}^{N_k}(s_0-\delta_j)(q^j-1)+\sum_{j=k}^{N_k-1}(c_0-\mu_j)(q^{j+1}-q^j)=s_0(q+...+q^k)+s_0(t-k)+\sum_{j=0}^{k-1}\mu_j(q^{j+1}-q^j)+l_0-l.$$

Supposons que $\sum_{j=t+1}^{N_k}(s_0-\delta_j)(q^j-1)\neq 0$. On en déduit que $\sum_{j=t+1}^{N_k}(s_0-\delta_j)(q^j-1)\geq q^{t+1}-1$. Or on a, pour k assez grand,

$$s_0(q+...+q^k)+s_0(t-k)+\sum_{j=0}^{k-1}\mu_j(q^{j+1}-q^j)+l_0-l<q^{t+1}-1.$$

Par conséquent, il en résulte que $\sum_{j=t+1}^{N_k}(s_0-\delta_j)(q^j-1)=0$. On en déduit que

$$s_0(q+...+q^k)+s_0(t-k)+\sum_{j=0}^{k-1}\mu_j(q^{j+1}-q^j)+l_0-l=\sum_{j=k}^{N_k-1}(c_0-\mu_j)(q^{j+1}-q^j).$$

Supposons alors que l'on ait $\sum_{j=k}^{N_k-1}(c_0-\mu_j)(q^{j+1}-q^j)\neq 0$. On en déduit que
$\sum_{j=k}^{N_k-1}(c_0-\mu_j)(q^{j+1}-q^j)\geq q^{k+1}-q^k$. On a $t\leq N_k$. Or

$$s_0N_k=S_k+s_0k=q^k-h-l_0-(q-2)(q+...+q^{k-1})+s_0k.$$

On en déduit que, pour k assez grand et comme $r \neq 0$,

$$s_0(q + ... + q^k) + s_0(t-k) + \sum_{j=0}^{k-1} \mu_j(q^{j+1} - q^j) + l_0 - l < q^{k+1} - q^k.$$

On obtient ici encore une contradiction.

Par conséquent, on a $g^{s_0}(N_0(k) + l) = 0$, pour tout l. On a donc montré que $G^{s_0}(N_0(k)) = 0$.

6.4 Preuve de l'égalité $F^s(N_0(k)) = 0$, pour tout $s \neq s_0$

Soit $s \neq s_0$ tel que $B_s \neq 0$; on a, par définition, $s < s_0$. On a, de plus, $F^s(n) = \sum_{l \geq 0} \beta_s(l) g^s(n+l)$. Montrons que $f^s(N_0(k)+l) = 0$, pour tout l. On en déduira que $F^s(N_0(k)) = 0$.

Supposons qu'il existe l tel que $f^s(N_0(k) + l) \neq 0$. On a alors, d'après la proposition 5.1,

$$N_0(k) + l = \sum_{j=1}^{+\infty} \delta_j(q^j - 1) + \sum_{j=0}^{+\infty} \mu_j(q^{j+1} - q^j),$$

avec $\delta_j \in \{0, ..., s\}, \delta_j = 0$ pour j assez grand, $\mu_j \in \{0, ..., c\}, \mu_j = 0$ pour j assez grand.

Rappelons que

$$N_0(k) + l_0 = s_0 \sum_{i=k+1}^{N_k} (q^i - 1) + c_0 \sum_{j=k}^{N_k - 1} (q^{j+1} - q^j).$$

On a donc $N_0(k) + l_0 < s_0(q + ... + q^{N_k - 1}) + (c_0 + s_0) q^{N_k}$. Or $c_0 + s_0 = q - 2$ et la différence $l - l_0$ est majorée indépendamment de k. Il en résulte que, pour k assez grand, $N_0(k) + l < q^{N_k + 1} - q^{N_k}$.

Par conséquent, si I et J sont les plus grands indices tels que l'on ait respectivement $\delta_i \neq 0$ et $\mu_j \neq 0$, on a alors $I \leq N_k$ et $J \leq N_k - 1$. D'où l'égalité suivante :

$$\sum_{j=k+1}^{N_k} (s_0 - \delta_j)(q^j - 1) + \sum_{j=k}^{N_k - 1} (c_0 - \mu_j)(q^{j+1} - q^j) = l_0 - l + \sum_{j=1}^{k} \delta_j(q^j - 1) + \sum_{j=0}^{k-1} \mu_j(q^{j+1} - q^j).$$

On a, comme $\delta_j \leq s < s_0$ et $\mu_j \leq c$:

$$\sum_{j=k+1}^{N_k} (s_0 - \delta_j)(q^j - 1) + \sum_{j=k}^{N_k - 1} (c_0 - \mu_j)(q^{j+1} - q^j) \geq (s_0 - s)(q^{k+1} - 1).$$

Or on a, pour k assez grand,

$$l_0 - l + \sum_{j=1}^{k} \delta_j (q^j - 1) + \sum_{j=0}^{k-1} \mu_j (q^{j+1} - q^j) < q^{k+1} - 1.$$

On obtient donc une contradiction.

Par conséquent, on a $f^s(N_0(k) + l) = 0$, pour tout l. On a donc montré que $F^s(N_0(k)) = 0$.

6.5 Preuve de l'égalité $G^s(N_0(k)) = 0$, pour tout $s \neq s_0$

On a $G^s(n) = \sum_{l \geq 0} \beta_s(l) g^s(n + l)$. Montrons que $g^s(N_0(k) + l) = 0$, pour tout l. On en déduira que $G^s(N_0(k)) = 0$.

Supposons qu'il existe l tel que $g^s(N_0(k) + l) \neq 0$. On a alors, d'après la proposition 5.2,

$$N_0(k) + l = s(q + ... + q^t) + \sum_{j=t+1}^{+\infty} \delta_j (q^j - 1) + \sum_{j=0}^{+\infty} \mu_j (q^{j+1} - q^j),$$

avec $t \geq 1$, $\delta_j \in \{0, ..., s\}, \delta_j = 0$ pour j assez grand, $\mu_j \in \{0, ..., c\}, \mu_j = 0$ pour j assez grand.

On montre, de même qu'au paragraphe 6.4, que si I et J sont les plus grands indices tels que l'on ait respectivement, $\delta_i \neq 0$ et $\mu_j \neq 0$, on a alors $I \leq N_k$ et $J \leq N_k - 1$. On a, en particulier, $t \leq N_k$. Nous allons, ici encore, distinguer deux cas selon la valeur de k.

- Supposons $t \leq k$. On a alors l'égalité suivante :

  $$\sum_{j=k+1}^{N_k} (s_0 - \delta_j)(q^j - 1) + \sum_{j=k}^{N_k - 1} (c_0 - \mu_j)(q^{j+1} - q^j) = s(q + ... + q^t) + \sum_{j=t+1}^{k} \delta_j (q^j - 1) + \sum_{j=0}^{k-1} \mu_j (q^{j+1} - q^j) + l_0 - l.$$

  On a, de même qu'en 6.4, pour k assez grand :

  $$s(q + ... + q^t) + \sum_{j=t+1}^{k} \delta_j (q^j - 1) + \sum_{j=0}^{k-1} \mu_j (q^{j+1} - q^j) + l_0 - l < q^{k+1} - q^k,$$

  $$\sum_{j=k+1}^{N_k} (s_0 - \delta_j)(q^j - 1) + \sum_{j=k}^{N_k - 1} (c_0 - \mu_j)(q^{j+1} - q^j) \geq q^{k+1} - q^k.$$

  On aboutit donc à une contradiction.

- Supposons $t \geq k+1$. On a alors l'égalité suivante :

$$s_0 \sum_{j=k+1}^{t} (q^j - 1) + \sum_{j=t+1}^{N_k} (s_0 - \delta_j)(q^j - 1) + \sum_{j=k}^{N_k - 1} (c_0 - \mu_j)(q^{j+1} - q^j) = s(q + ... + q^t) + \sum_{j=0}^{k-1} \mu_j (q^{j+1} - q^j) + l_0 - l.$$

Supposons $t < N_k$. On a, pour k assez grand :

$$s(q + ... + q^t) + \sum_{j=0}^{k-1} \mu_j (q^{j+1} - q^j) + l_0 - l < s_0(q^t - 1),$$

$$s_0 \sum_{j=k+1}^{t} (q^j - 1) + \sum_{j=t+1}^{N_k} (s_0 - \delta_j)(q^j - 1) + \sum_{j=k}^{N_k - 1} (c_0 - \mu_j)(q^{j+1} - q^j) \geq s_0(q^t - 1).$$

On aboutit donc à une contradiction.

Supposons alors $t = N_k$. On a, de même, pour k assez grand :

$$s(q + ... + q^t) + \sum_{j=0}^{k-1} \mu_j (q^{j+1} - q^j) + l_0 - l < sq^t + s_0(q^{t-1} - 1),$$

$$s_0 \sum_{j=k+1}^{t} (q^j - 1) + \sum_{j=t+1}^{N_k} (s_0 - \delta_j)(q^j - 1) + \sum_{j=k}^{N_k - 1} (c_0 - \mu_j)(q^{j+1} - q^j) \geq sq^t + s_0(q^{t-1} - 1).$$

On aboutit donc ici encore à une contradiction.

Par conséquent, on a $g^s(N_0(k) + l) = 0$, pour tout l. On a donc montré que $G^s(N_0(k)) = 0$.

Bibliographie

[1] J.-P. ALLOUCHE, Sur la transcendance de la série formelle Π, *Sém. de Théorie des Nombres de Bordeaux* **2** (1990), 103–117.

[2] G. W. ANDERSON et D. S. THAKUR, Tensor powers of the Carlitz module and zeta values, *Annals of Math.* **132** (1990), 159–191.

[3] V. BERTHÉ, De nouvelles preuves "automatiques" de transcendance pour la fonction zêta de Carlitz, Journées Arithmétiques de Genève, *Astérisque* **209** (1992), 159–168.

[4] V. BERTHÉ, Fonction zêta de Carlitz et automates, *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux* **5** (1993), 53–77.

[5] L. CARLITZ, On certain functions connected with polynomials in a Galois field, *Duke Math. J.* **1** (1935), 137–168.

[6] H. CHÉRIF, Mesure d'irrationalité de valeurs de la fonction zêta de Carlitz sur $\mathbf{F}_q[T]$, *C. R. Acad. Sci. Paris* **310, Série I** (1990), 23–26.

[7] H. CHÉRIF et B. de MATHAN, Irrationality measures of Carlitz zeta values in positive characteristic, *J. Number Theory* **44** (1993), 260-272.

[8] H. CHÉRIF et B. de MATHAN, Mesure d'irrationalité de la valeur en 1 de la fonction zêta de Carlitz, relative à $\mathbf{F}_2(T)$, *C. R. Acad. Sci. Paris* **305, Série I** (1987), 761–763.

[9] G. CHRISTOL, T. KAMAE, M. MENDÈS FRANCE et G. RAUZY, Suites algébriques, automates et substitutions, *Bull. Soc. math. France* **108** (1980), 401–419.

[10] G. DAMAMME, Irrationalité de $\zeta(s)$ dans le corps des séries formelles $\mathbf{F}_q((\frac{1}{t}))$, *C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada* **9** (1987), 207–212.

[11] G. DAMAMME, Transcendance de la fonction zêta de Carlitz par la méthode de Wade, Thèse, Caen (1990).

[12] G. DAMAMME et Y. HELLEGOUARCH, Transcendence of the values of the Carlitz zeta function by Wade's method, *J. Number Theory* **39** (1991), 257– 278.

[13] G. DAMAMME et Y. HELLEGOUARCH, Propriétés de transcendance des valeurs de la fonction zêta de Carlitz, *C. R. Acad. Sci. Paris* **307, Série I** (1988), 635–637.

[14] B. de MATHAN, Irrationality measures and transcendance in positive characteristic, *prépublication*.

[15] V. G. DRINFELD, Elliptic modules, *Mat. Sbornik* **94** (1974), 594–627 ; trad. angl. : *Math. USSR Sbornik* **23** (1974), 561–592.

[16] E. U. GEKELER, "Drinfeld modular curves", Springer Lecture Notes in Math. **1231** (1986).

[17] D. S. THAKUR, Gauss functions and Gauss sums for function fields and periods of Drinfeld modules, Ph. D. Thesis, Harvard (1987).

[18] D. S. THAKUR, Number fields and function fields, *in* Proc. conf. on p-adic analysis, Hengelhoef 1986, 149–157, publi. Vrije Universiteit, Brussels, N. De Grande-De Kimpe, L. Van Hamme (eds).

[19] L. J. WADE, Certain quantities transcendental over $GF(p^n, x)$, *Duke Math. J.* **8** (1941), 701–720.

[20] M. WALDSCHMIDT, Transcendence problems connected with Drinfeld modules, *Istanbul Üniv. Fen Fak. Mat. Der.* **49** (1990), 57–75.

[21] J. YU, Transcendence and Special Zeta Values in Characteristic p, *Annals of Mathematics* **134** (1991), 1–23.