Fonction ζ de Carlitz et automates.

Valérie Berthé

Résumé : Carlitz a défini sur $\mathbf{F}_q$ une fonction ζ et une série formelle Π, analogues respectivement à la fonction ζ de Riemann et au réel π. Yu a montré, en utilisant les modules de Drinfeld, que $\zeta(s)/\Pi^s$ est transcendant pour tout s non divisible par $q-1$. Nous donnons ici une preuve "automatique" de la transcendance de $\zeta(s)/\Pi^s$ pour $1 \leq s \leq q-2$, en utilisant le théorème de Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy.

1 Introduction

Soient p un nombre premier, q une puissance entière strictement positive de p et $\mathbf{F}_q$ le corps à q éléments. On note $\mathbf{F}_q[x]$ l'anneau des polynômes à une indéterminée sur $\mathbf{F}_q$ et $\mathbf{F}_q(x)$ le corps des fractions rationnelles en x. On définit sur $\mathbf{F}_q(x)$ une valeur absolue ultramétrique par :

$$\mid E \mid = q^k \text{ pour } E \in \mathbf{F}_q(x) \text{ et } d^\circ E = k.$$

La valuation associée est $v(E) = -d^\circ E$. Le complété de $\mathbf{F}_q(x)$, pour cette valuation, est le corps $\mathbf{F}_q((1/x))$ des séries formelles de Laurent, c'est-à-dire

$$\mathbf{F}_q((1/x)) = \{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{a_n}{x^n};\ a_n \in \mathbf{F}_q \text{ et les } (a_n)_{n<0} \text{ presque tous nuls}\}.$$

On définit la fonction ζ de Carlitz, à valeurs dans $\mathbf{F}_q((1/x))$, par :

$$\zeta(m) = \sum_{G \in \mathbf{F}_q[x] \text{ et } G \text{ unitaire}} 1/G^m\ , \quad m \geq 1.$$

La fonction ζ de Carlitz est l'analogue en caractéristique finie de la fonction ζ de Riemann. Carlitz a ainsi établi dans [2] que, pour s divisible par $(q-1)$, $\zeta(s)/\Pi^s \in \mathbf{F}_q(x)$, avec

$$\Pi = \prod_{j=0}^{+\infty} (1 - \frac{x^{q^j} - x}{x^{q^{j+1}} - x}).$$

Cette propriété est l'équivalent du résultat d'Euler sur les valeurs paires de la fonction ζ de Riemann, à savoir $\zeta(2n)/\pi^{2n}$ est rationnel pour n non nul.

En 1941, Wade prouve dans [9] la transcendance de Π sur $\mathbf{F}_q(x)$. On en déduit la transcendance de $\zeta(s)$ pour $s \equiv 0\ (q-1)$. En 1986-87, Thakur établit dans [8] des résultats d'irrationalité pour $1 \leq s \leq q^2$ alors que Damamme montre l'irrationalité de $\zeta(s)$ pour $1 \leq s \leq q$, ([4]). En 1988, Damamme et Hellegouarch prouvent la transcendance de $\zeta(s)$ pour $1 \leq s \leq q^2$ par la méthode de Wade, ([7]). Enfin, en 1989, Damamme établit dans [5], voir aussi [6], la preuve de la transcendance de $\zeta(s)$ pour tout s. Parallèlement, Yu prouve en 1988, par une méthode utilisant les modules de Drinfeld, que pour tout entier s non nul, $\zeta(s)$ est transcendant et pour tout entier s non divisible par $q-1$, $\zeta(s)/\Pi^s$ est transcendant, (la preuve est parue dans [10]).

Par ailleurs, en 1989, Allouche donne dans [1] une preuve élémentaire de la transcendance de Π par les automates, c'est-à-dire en utilisant le théorème de Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy, (voir [3]), énoncé ci-dessous :

Théorème 1 (Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy)
Soit $(u(n))_{n\in\mathbf{N}}$ *une suite à valeurs dans* $\mathbf{F}_q$. *Il y a équivalence entre les deux conditions suivantes :*
1) la série formelle $\sum_{n\geq 0} u(n)x^{-n}$ *est algébrique sur* $\mathbf{F}_q(x)$,
2) l'ensemble E *des sous-suites de la suite* $(u(n))_{n\in\mathbf{N}}$ *défini par*

$$E = \{(u(q^k n + r))_{n\in\mathbf{N}};\ k \geq 0;\ 0 \leq r \leq q^k - 1\}$$

est fini.

Allouche étudie, en fait, le quotient α/Π, avec

$$\alpha = \prod_{j=0}^{+\infty}(1 - \frac{x^{q^j}}{x^{q^{j+1}}}).$$

Notons que α est algébrique sur $\mathbf{F}_q(x)$, il suffit de considérer α^q pour s'en convaincre.

M'inspirant de l'article d'Allouche, je donne ici une preuve "automatique" de la transcendance de $\zeta(s)/\Pi^s$ pour $1 \leq s \leq q-2$. Il est, en effet, intéressant de multiplier $\zeta(s)/\Pi^s$ par α^s. On obtient ainsi une expression simple des coefficients du développement en série formelle de $\frac{\zeta(s)}{\Pi^s}\alpha^s$. L'étude des sous-suites de la forme $(u(q^k n + 1 + s(q + q^2 + ... + q^{k-1})))_{n\in\mathbf{N}}$, avec $(u(n))_{n\in\mathbf{N}}$ définie par

$$\frac{\zeta(s)}{\Pi^s}\alpha^s = \sum_{n\geq 0} u(n)x^{-n},$$

montre qu'il existe un nombre infini de telles suites. On déduit alors du théorème de Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy, les transcendances de $\frac{\zeta(s)}{\Pi^s}\alpha^s$ et de $\zeta(s)/\Pi^s$, α étant algébrique sur $\mathbf{F}_q(x)$.

Je vais dans une première partie de cet article me restreindre au cas où $s = 1$, puis je généraliserai la méthode employée au cas où $1 \leq s \leq q-2$.

2 Preuve de la transcendance de $\zeta(1)/\Pi$

L'objet de ce paragraphe est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 2 *Pour* $q \neq 2$, $\zeta(1)/\Pi$ *est transcendant sur* $\mathbf{F}_q(x)$.

Thakur a établi dans [8] que, pour $1 \leq s \leq q$,

$$\zeta(s) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{ks}\prod_{j=1}^{k}(\frac{1}{x^{q^j} - x})^s.$$

On a, en particulier, pour $s = 1$:

$$\zeta(1) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \prod_{j=1}^{k} (\frac{1}{x^{q^j} - x}).$$

Il en résulte que

$$\zeta(1) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k (\frac{1}{x})^{q+\ldots+q^k} \prod_{j=1}^{k} (\frac{1}{1 - (\frac{1}{x})^{q^j-1}}).$$

On a

$$\alpha = \prod_{j=0}^{+\infty} (1 - \frac{x^{q^j}}{x^{q^{j+1}}}) \text{ et } \Pi = \prod_{j=0}^{+\infty} (1 - \frac{x^{q^j} - x}{x^{q^{j+1}} - x}).$$

On obtient alors

$$\frac{\alpha}{\Pi} = \prod_{j=1}^{+\infty} (1 - (\frac{1}{x})^{q^j-1}).$$

Multiplions $\zeta(1)$ par α/Π :

$$\frac{\alpha}{\Pi}\zeta(1) = \frac{\alpha}{\Pi} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k (\frac{1}{x})^{q+\ldots+q^k} \prod_{j=k+1}^{+\infty} (1 - (\frac{1}{x})^{q^j-1}).$$

2.1 Développements en série formelle de $\frac{\alpha}{\Pi}\zeta(1)$ et de $\frac{\alpha}{\Pi}(\zeta(1) - 1)$

Pour appliquer le théorème de Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy, nous avons besoin du développement en série formelle de $\frac{\alpha}{\Pi}\zeta(1)$. Considérons, pour commencer, le développement de α/Π. On note que, si n s'écrit sous la forme

$$n = \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_k (q^k - 1) \text{ avec } \varepsilon_k = 0 \text{ ou } 1, \varepsilon_k = 0 \text{ pour } k \text{ assez grand},$$

une telle décomposition est unique. On a, en effet :

$$\forall r \in \mathbf{N}^* \ \sum_{k=1}^{r} (q^k - 1) < q^{r+1} - 1.$$

Il suffit alors de comparer les indices des plus grands termes non nuls de chacune de deux telles décompositions. Ils sont nécessairement égaux. On en déduit, par une récurrence simple, le résultat souhaité.

Il en résulte la proposition suivante :

Proposition 1 *Soit $(a(n))_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par*

$$\frac{\alpha}{\Pi} = \sum_{n\geq 0} a(n)x^{-n}$$

Si n s'écrit

$$n = \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_k(q^k - 1) \text{ avec } \varepsilon_k = 0 \text{ ou } 1, \varepsilon_k = 0 \text{ pour } k \text{ assez grand,}$$

$$\text{alors } a(n) = (-1)^{\sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_k},$$

sinon $a(n) = 0$.

Nous allons en déduire la proposition 2 :

Proposition 2 *Soit $(b(n))_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par*

$$\frac{\alpha}{\Pi}(\zeta(1) - 1) = \sum_{n\geq 0} b(n)x^{-n}$$

On a :

$$b(n) \neq 0 \text{ si et seulement si } n \text{ s'écrit sous la forme } n = q+...+q^i + \sum_{j=i+1}^{+\infty} \varepsilon_j(q^j - 1),$$

$$\text{avec } i \geq 1, \varepsilon_j = 0 \text{ ou } 1, \text{ et } \varepsilon_j = 0 \text{ pour } j \text{ assez grand.}$$

Preuve de la proposition 2 : Soit $k \in \mathbf{N}^*$. On définit $(a_k(n))_{n\in\mathbf{N}}$ par

$$\prod_{j=k+1}^{+\infty} (1 - (\frac{1}{x})^{q^j - 1}) = \sum_{n\geq 0} a_k(n)x^{-n}$$

Si n s'écrit

$$n = \sum_{i=k+1}^{+\infty} \varepsilon_i(q^i - 1) \text{ avec } \varepsilon_i = 0 \text{ ou } 1, \varepsilon_i = 0 \text{ pour } i \text{ assez grand,}$$

$$\text{alors } a_k(n) = (-1)^{\sum_{i=k+1}^{+\infty} \varepsilon_i},$$

sinon $a_k(n) = 0$.

On a, par ailleurs :

$$\frac{\alpha}{\Pi}(\zeta(1)-1)=\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k(\frac{1}{x})^{q+...+q^k}\sum_{n\geq 0}a_k(n)(\frac{1}{x})^n.$$

Par conséquent,

$$\frac{\alpha}{\Pi}(\zeta(1)-1)=\sum_{n\geq 0}(\frac{1}{x})^n\sum_{1\leq k \text{ tq } q+...+q^k\leq n}(-1)^k a_k(n-(q+...+q^k)).$$

La proposition 2 découle alors du lemme suivant :

Lemme 1 *Si n s'écrit sous la forme*

$$n=q+...+q^i+\sum_{j=i+1}^{+\infty}\varepsilon_j(q^j-1) \tag{1}$$

avec $i\geq 1, \varepsilon_j=0$ ou $1, \varepsilon_j=0$ pour j assez grand,

une telle décomposition est unique.

Preuve du lemme 1 : On a

$$\forall r\in\mathbf{N}^* \ \sum_{k=1}^{r}q^k<q^{r+1}-1.$$

Les indices des plus grands termes non nuls en "q^j-1" de chacune de deux telles décompositions, s'ils existent, sont donc nécessairement égaux. On est alors ramené au cas où :

$$n=q+...+q^i=q+...+q^l+\sum_{t\geq l+1}\delta_t(q^t-1) \text{ avec } i\geq 1,\ l\geq 1,\ \delta_t=0 \text{ ou } 1, \delta_t=0 \text{ pour } t \text{ assez grand.}$$

L'indice du plus grand coefficient non nul de $(\delta_t)_{t\in\mathbf{N}}$, s'il existe, est nécessairement i et donc $\delta_i=1$. On obtient alors que $l=i$ et $\forall\ t\geq l+1\quad \delta_t=0$. On en déduit l'unicité de la décomposition de n sous forme (1).

2.2 Schéma de la preuve du théorème 2

Soit $(c(n))_{n\in\mathbf{N}}$ définie par

$$\frac{\alpha}{\Pi}\zeta(1)=\sum_{n\geq 0}c(n)x^{-n}$$

On a

$$(c(n))_{n\in\mathbf{N}}=(a(n))_{n\in\mathbf{N}}+(b(n))_{n\in\mathbf{N}}$$

Nous allons considérer les sous-suites $(c(q^k n+1+q+...+q^{k-1}))_{n\in\mathbf{N}}$ pour $k\geq 3$ et démontrer la proposition suivante :

Proposition 3 *Soit* $k \geq 3$. *Soit* $f(k) = q^k - 1 - (1 + q + ... + q^{k-1})$.

L'indice du premier terme non nul de la sous-suite $(c(q^k n + 1 + q + ... + q^{k-1}))_{n \in \mathbf{N}}$ *est*
$n = q + q^2 + ... + q^{f(k)}$.

Pour cela, nous allons successivement étudier, aux paragraphes 2.3 et 2.4, les sous-suites $(a(q^k n+1+q+...+q^{k-1}))_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b(q^k n+1+q+...+q^{k-1}))_{n\in\mathbf{N}}$, puis établir les lemmes 2 et 3, énoncés ci-dessous :

Lemme 2 *Soit* $k \geq 2$. *Soit* $f(k) = q^k - 1 - (1 + q + ... + q^{k-1})$.

L'indice du premier terme non nul de la sous-suite $(a(q^k n + 1 + q + ... + q^{k-1}))_{n \in \mathbf{N}}$ *est*
$n = q + q^2 + ... + q^{f(k)}$.

Lemme 3 *Soit* $k \geq 3$. *Soit* $g(k) = q^k - 2 - (q^2 + ... + q^{k-1})$.

L'indice du premier terme non nul de la sous-suite $(b(q^k n + 1 + q + ... + q^{k-1}))_{n \in \mathbf{N}}$ *est*
$n = q + q^2 + ... + q^{g(k)}$.

On a $f(k) < g(k), \quad \forall k \geq 3$. On rappelle, de plus, que la suite $(c(n))_{n\in\mathbf{N}}$ est définie comme la somme des suites $(a(n))_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b(n))_{n\in\mathbf{N}}$. La proposition 3 résulte donc des lemmes 2 et 3.

Pour $q \neq 2$, la suite $(f(k))_{k\geq 3}$ est strictement croissante, ce qui implique que les sous-suites $(c(q^k n + 1 + q + ... + q^{k-1}))_{n\in\mathbf{N}}$ diffèrent par l'indice de leur premier terme non nul. Elles sont donc distinctes et l'ensemble $\{(c(q^k n + 1 + q + ... + q^{k-1}))_{n\in\mathbf{N}};\ k \geq 3\}$ est infini. L'ensemble $\{(c(q^k n + r))_{n\in\mathbf{N}};\ k \geq 0;\ 0 \leq r \leq q^k - 1\}$ l'est a fortiori aussi. Selon le théorème de Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy, on en déduit la transcendance de $\frac{\alpha}{\Pi}\zeta(1)$ sur $\mathbf{F}_q(x)$ pour $q \neq 2$ et, par conséquent, celle de $\frac{\zeta(1)}{\Pi}$, ce qui achève la preuve du théorème 2.

Remarque : Notons que les lemmes 2 et 3 permettent, de même, d'établir les transcendances de $\frac{\alpha}{\Pi}$ et de $\frac{\alpha}{\Pi}(\zeta(1) - 1)$ pour $q \neq 2$. Nous sommes alors confrontés à une somme de deux transcendants. Le fait de considérer les sous-suites, par le biais du théorème de Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy, permet néanmoins de lever cet obstacle.

2.3 Preuve du lemme 2

On pose $(\alpha_k(n))_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par :

$$\alpha_k(n) = a(q^k n + 1 + q + ... + q^{k-1}) \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Soit $k \geq 2$. Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $\alpha_k(n) \neq 0$. Selon la proposition 1,

$\exists\, (\varepsilon_j)_{j \in \mathbf{N}}$ avec $\varepsilon_j = 0$ ou $1, \varepsilon_j = 0$ pour j assez grand, tels que $q^k n + 1 + q + ... + q^{k-1} = \displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \varepsilon_j (q^j - 1)$.

On pose $\sigma = \displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \varepsilon_j$. On a

$$q^k n + 1 + q + ... + q^{k-1} = \sum_{1 \leq j \leq k-1} \varepsilon_j q^j + \sum_{l \geq k} \varepsilon_l q^l - \sigma.$$

Par conséquent,

$$\exists \lambda \geq 1 \text{ tel que } \sigma = \lambda q^k + \sum_{1 \leq j \leq k-1} (\varepsilon_j - 1) q^j - 1.$$

On en déduit que

$$n = (-\lambda + \varepsilon_k) + \sum_{l > k \text{ et } \sum_{l>k} \varepsilon_l = \sigma - \sum_{j \leq k} \varepsilon_j} \varepsilon_l q^{l-k}.$$

Autrement dit,

$$n = (-\lambda + \varepsilon_k) + \sum_{l > k \text{ et } \sum_{l>k} \varepsilon_l = \mathcal{S}} \varepsilon_l q^{l-k}, \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \text{avec } \mathcal{S} &= \sigma - \sum_{j \leq k} \varepsilon_j \\ &= \lambda q^k + \sum_{j=1}^{k-1} (\varepsilon_j - 1) q^j - \sum_{j \leq k} \varepsilon_j - 1. \end{aligned}$$

Réciproquement, soit n pouvant s'écrire sous la forme (2).
On a

$$\begin{aligned} q^k n + 1 + q + ... + q^{k-1} &= q^k(\varepsilon_k - \lambda) + \sum_{l>k} \varepsilon_l q^l - \sum_{l>k} \varepsilon_l + \sigma - \sum_{j \leq k} \varepsilon_j + 1 + ... + q^{k-1} \\ &= \varepsilon_k (q^k - 1) + \sum_{l>k} \varepsilon_l (q^l - 1) + \sum_{j<k} \varepsilon_j (q^j - 1). \end{aligned}$$

Selon la proposition 1, on obtient bien $\alpha_k(n) \neq 0$.
On vérifie, de plus, que

$$\lambda q^k - 2 - q - ... - q^{k-1} \leq \mathcal{S} \leq \lambda q^k - 1,$$

avec

$$\mathcal{S} = \lambda q^k + \sum_{j=1}^{k-1} (\varepsilon_j - 1) q^j - \sum_{j \leq k} \varepsilon_j - 1.$$

Par conséquent, la différence entre deux valeurs de $\mathcal{S}$ correspondant respectivement à $\lambda + 1$ et λ est supérieure à $q^k - 1 - q - ... - q^{k-1}$. On en déduit alors que le plus petit n pouvant s'écrire sous la forme (2) est nécessairement obtenu pour $\lambda = 1$.

Soit $m(k)$ le plus petit m tel que $\alpha_k(m) \neq 0$, c'est-à-dire le plus petit m pouvant s'écrire sous la forme (2). On a vu que $\lambda = 1$. On vérifie alors que $m(k)$ est obtenu pour

$$\varepsilon_j = 0 \text{ pour } 1 \leq j \leq k-1$$

$$\varepsilon_k = 1$$

$$\varepsilon_l = 1 \text{ pour } k+1 \leq l \leq k + q^k - 1 - (1 + ... + q^{k-1})$$

$$\varepsilon_l = 0 \text{ pour } l > k + q^k - 1 - (1 + ... + q^{k-1}).$$

On a alors $m(k) = q + ... + q^{f(k)}$ avec $f(k) = q^k - 1 - (1 + ... + q^{k-1})$, ce qui achève la preuve du lemme 2.

Remarque : On a vu que, pour $q \neq 2$, le lemme 2 permet d'établir que α/Π et donc Π sont transcendants. Mais, pour $q = 2$, $f(k)$ est stationnaire. Dans ce cas, il suffit de reprendre les sous-suites de la forme $(a(q^k n + q^k - k))_{n \in \mathbf{N}}$ avec $k \geq 2$, considérées par Allouche dans [1]. La méthode employée ci-dessus permet de retrouver le résultat suivant énoncé par Allouche dans le même article :

Proposition 4 *Soit $k \geq 2$. L'indice du premier terme non nul de $(a(q^k n + q^k - k))_{n \in \mathbf{N}}$ est $n = q + ... + q^{k-1}$.*

Il n'y a plus risque de stationnarité pour $q = 2$. Cet ensemble de sous-suites permet donc d'établir, aussi bien pour $q = 2$ que pour toute puissance entière strictement positive de p premier, la transcendance de Π sur $\mathbf{F}_q(x)$.

2.4 Preuve du lemme 3

On pose $(\beta_k(n))_{n \in \mathbf{N}}$ la suite définie par :

$$\beta_k(n) = b(q^k n + 1 + q + ... + q^{k-1}) \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Soit $k \geq 3$. Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $\beta_k(n) \neq 0$. Selon la proposition 2,

$\exists\, i \geq 1, \exists\, (\varepsilon_j)_{j \in \mathbf{N}}$ avec $\varepsilon_j = 0$ ou $1, \varepsilon_j = 0$ pour j assez grand, tels que

$$q^k n + 1 + q + ... + q^{k-1} = q + ... + q^i + \sum_{j \geq i+1}^{+\infty} \varepsilon_j (q^j - 1).$$

On pose $\sigma = \sum_{j \geq i+1}^{+\infty} \varepsilon_j$.

Nous allons distinguer trois cas suivant la position de i par rapport à k :

Cas 1 : Si $i \geq k$, on a

$$q^k n + 1 = q^k + ... + q^i + \sum_{j \geq i+1}^{+\infty} \varepsilon_j q^j - \sigma.$$

Par conséquent,

$$\exists \lambda \geq 1 \text{ tel que } \sigma = -1 + \lambda q^k.$$

On en déduit que

$$n = -\lambda + \sum_{0 \leq l \leq i-k} q^l + \sum_{j > i \text{ et } \sum_{j>i} \varepsilon_j = \sigma} \varepsilon_j q^{j-k}.$$

Autrement dit,

$$n = -\lambda + \sum_{0 \leq l \leq i-k} q^l + \sum_{j > i \text{ et } \sum_{j>i} \varepsilon_j = \lambda q^k - 1} \varepsilon_j q^{j-k}.$$

On vérifie réciproquement qu'un tel n convient.

Le plus petit entier $n_1(k)$ de cette forme est obtenu pour

$$\lambda = 1$$

$$i = k$$

$$\varepsilon_l = 1 \text{ pour } k+1 \leq l \leq k + q^k - 1$$

$$\varepsilon_l = 0 \text{ pour } l > k + q^k - 1$$

On a alors $n_1(k) = q + ... + q^{g_1(k)}$ avec $g_1(k) = q^k - 1$.

Cas 2 : Si $i = k-1$, on a

$$q^k n + 1 = \sum_{j \geq k}^{+\infty} \varepsilon_j q^j - \sigma.$$

Par conséquent,

$$\exists \lambda \geq 1 \text{ tel que } \sigma = -1 + \lambda q^k.$$

On en déduit que

$$n = \varepsilon_k - \lambda + \sum_{j>k \text{ et } \sum_{j>k} \varepsilon_j = -1+\lambda q^k - \varepsilon_k} \varepsilon_j q^{j-k}.$$

On vérifie réciproquement qu'un tel n convient.

Le plus petit entier $n_2(k)$ de cette forme est obtenu pour

$$\lambda = 1$$

$$\varepsilon_k = 1$$

$$\varepsilon_l = 1 \text{ pour } k+1 \leq l \leq k + q^k - 2$$

$$\varepsilon_l = 0 \text{ pour } l > k + q^k - 2.$$

On a alors $n_2(k) = q + ... + q^{g_2(k)}$ avec $g_2(k) = q^k - 2$.

Cas 3 : Si $1 \leq i \leq k-2$, on a

$$q^k n + 1 + q^{i+1} + ... + q^{k-1} = \sum_{i+1 \leq j \leq k-1} \varepsilon_j q^j + \sum_{k \leq l}^{+\infty} \varepsilon_l q^l - \sigma.$$

Par conséquent,

$$\exists \lambda \geq 1 \text{ tel que } \sigma = -1 + \lambda q^k + \sum_{i+1 \leq j \leq k-1} (\varepsilon_j - 1) q^j.$$

On en déduit que

$$n = \varepsilon_k - \lambda + \sum_{l>k \text{ et } \sum_{l>k} \varepsilon_l = \mathcal{S}} \varepsilon_l q^{l-k}.$$

$$\begin{aligned} \text{avec } \mathcal{S} &= \sigma - \sum_{j \leq k} \varepsilon_j \\ &= -1 + \lambda q^k + \sum_{j=i+1}^{k-1} (\varepsilon_j - 1) q^j - \sum_{j=i+1}^{k} \varepsilon_j. \end{aligned}$$

On vérifie réciproquement qu'un tel n convient.

Le plus petit entier $n_3(k)$ de cette forme est obtenu pour

$$\lambda = 1$$

$$i = 1$$

$$\varepsilon_j = 0 \text{ pour } 2 \leq j \leq k-1$$

$$\varepsilon_k = 1$$

$$\varepsilon_l = 1 \text{ pour } k+1 \leq l \leq k + q^k - 2 - (q^2 + ... + q^{k-1})$$

$$\varepsilon_l = 0 \text{ pour } l > k + q^k - 2 - (q^2 + ... + q^{k-1}).$$

On a alors $n_3(k) = q + ... + q^{g_3(k)}$ avec $g_3(k) = q^k - 2 - (q^2 + ... + q^{k-1})$.

Or $n_3(k) < n_2(k) < n_1(k)$. Par conséquent, le plus petit n tel que $\beta_k(n) \neq 0$ est $n_3(k)$, ce qui achève la preuve du lemme 3.

3 Preuve de la transcendance de $\zeta(s)/\Pi^s$

Théorème 3 *Pour $q \neq 2$ et $1 \leq s \leq q-2$, $\zeta(s)/\Pi^s$ est transcendant sur $\mathbf{F}_q(x)$.*

Nous allons reprendre point par point la preuve faite ci-dessus pour la généraliser au cas où $1 \leq s \leq q-2$.

On a vu que, pour $1 \leq s \leq q$,

$$\zeta(s) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{ks} \prod_{j=1}^{k} (\frac{1}{x^{q^j} - x})^s.$$

D'où

$$\frac{\zeta(s)\alpha^s}{\Pi^s} = \frac{\alpha^s}{\Pi^s} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{ks} (\frac{1}{x})^{s(q+...+q^k)} \prod_{j=k+1}^{+\infty} (1 - (\frac{1}{x})^{q^j - 1})^s.$$

Nous allons supposer s fixé dans l'intervalle $[1, q-2]$ pour la suite de cet article.

3.1 Développements en série formelle de $\frac{\zeta(s)\alpha^s}{\Pi^s}$ et de $\frac{\alpha^s}{\Pi^s}(\zeta(s)-1)$

Considérons, dans un premier temps, le développement en série formelle de

$$\prod_{j=k+1}^{+\infty} (1 - (\frac{1}{x})^{q^j - 1})^s \text{ pour } 1 \leq s \leq q-2.$$

Proposition 5 *Soit* $(A_k(n))_{n\in\mathbf{N}}$ *la suite définie par*

$$\prod_{j=k+1}^{+\infty}(1-(\frac{1}{x})^{q^j-1})^s=\sum_{n\geq 0}A_k(n)x^{-n}.$$

Si n *s'écrit*

$$n=\sum_{j=k+1}^{+\infty}\mu_j(q^j-1) \text{ avec } \mu_j\in\ \{0,1,...,s\},\mu_j=0 \text{ pour } j \text{ assez grand},$$

$$\text{alors } A_k(n)=(-1)^{\sum_{j=k+1}^{+\infty}\mu_j}\overline{\prod_{j=k+1}^{+\infty}\binom{s}{\mu_j}},$$

sinon $A_k(n)=0$.

$\overline{\prod_{j=k+1}^{+\infty}\binom{s}{\mu_j}}$ désigne la valeur modulo p de $\prod_{j=k+1}^{+\infty}\binom{s}{\mu_j}$, où p est la caractéristique de $\mathbf{F}_q$.

Nous aurons besoin du lemme suivant dans la preuve de la proposition 5 :

Lemme 4 *Si* n *s'écrit sous la forme*

$$n=\sum_{j=k+1}^{+\infty}\mu_j(q^j-1) \text{ avec } \mu_j\in\ \{0,1,...,s\},\ \mu_j=0 \text{ pour } j \text{ assez grand}, \quad (3)$$

une telle décomposition est unique.

Preuve du lemme 4 : Considérons une décomposition de n sous forme (3). Si n est nul, on a nécessairement : $\forall j,\ \mu_j=0$. Supposons alors n non nul. Soit M tel que $\mu_M\neq 0$ et $\forall j>M\ \mu_j=0$. On a

$$\forall r\geq 1 \quad (q-1)\sum_{i=1}^{r}(q^i-1)<q^{r+1}-1.$$

D'où

$$\sum_{j=k+1}^{M}\mu_j(q^j-1)<q^{M+1}.$$

Par conséquent, si n admet deux telles décompositions, les indices des plus grands termes non nuls seront égaux. Supposons alors qu'il existe $(\delta_i)_{k+1\leq i\leq M}$ à coefficients dans $\{0,1,...,s\}$ tels que

$$n=\sum_{j=k+1}^{M}\mu_j(q^j-1)=\sum_{i=k+1}^{M}\delta_i(q^i-1) \text{ avec } \mu_M\neq 0 \text{ et } \delta_M\neq 0.$$

Supposons, de plus, que $\delta_M \neq \mu_M$ et que, par exemple, $\mu_M > \delta_M$. On a alors

$$n - \delta_M(q^M - 1) \geq q^M - 1 > \sum_{i=k+1}^{M-1} \delta_i(q^i - 1) = n - \delta_M(q^M - 1),$$

ce qui est impossible. Par conséquent $\delta_M = \mu_M$. On montre ainsi, par récurrence, qu'une décomposition de n sous la forme (3) est unique.

Preuve de la proposition 5 : On rappelle que

$$\prod_{j=k+1}^{+\infty} (1 - (\frac{1}{x})^{q^j - 1}) = \sum_{n \geq 0} a_k(n) x^{-n}$$

avec $(a_k(n))_{n \in \mathbf{N}}$ définie par :
si n s'écrit

$$n = \sum_{i=k+1}^{+\infty} \varepsilon_i(q^i - 1) \text{ avec } \varepsilon_i = 0 \text{ ou } 1, \varepsilon_i = 0 \text{ pour } i \text{ assez grand,}$$

alors

$$a_k(n) = (-1)^{\sum_{i=k+1}^{+\infty} \varepsilon_i},$$

sinon $a_k(n) = 0$.

Soit $k \geq 0$. On a

$$\begin{aligned} \prod_{j=k+1}^{+\infty} (1 - (\frac{1}{x})^{q^j - 1})^s &= (\sum_{n \geq 0} a_k(n) x^{-n})^s \\ &= \sum_{n \geq 0} x^{-n} (\sum_{n_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{s} n_i = n} \prod_{i=1}^{s} a_k(n_i)). \end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbf{N}$. Soient $n_1, ..., n_s$ tels que

$$n = \sum_{i=1}^{s} n_i, \ \forall i \ \ n_i \geq 0 \text{ et } \prod_{i=1}^{s} a_k(n_i) \neq 0.$$

Par conséquent,

$$\exists \ (\varepsilon_{i,j}) \text{ avec } \varepsilon_{i,j} = 0 \text{ ou } 1, \ \forall i \ \varepsilon_{i,j} = 0 \text{ pour } j \text{ assez grand,}$$

$$\text{tels que } \forall i \ \ 1 \leq i \leq s \ \ n_i = \sum_{j=k+1}^{+\infty} \varepsilon_{i,j}(q^j - 1).$$

Nécessairement, n s'écrit sous la forme (3) :

$$n = \sum_{j=k+1}^{+\infty} \mu_j(q^j - 1) \text{ avec } \mu_j \in \ \{0, 1, ..., s\}, \mu_j = 0 \text{ pour } j \text{ assez grand.}$$

Réciproquement, soit n pouvant s'écrire sous cette forme. Il existe $\prod_{j=k+1}^{+\infty} \binom{s}{\mu_j}$ s-uplets vérifiant

$$\forall i \;\; n_i \geq 0,$$

$$\sum_{i=1}^{s} n_i = n,$$

$$\text{et } \prod_{i=1}^{s} a_k(n_i) \neq 0.$$

Pour chacun de ces s-uplets,

$$\exists\ (\varepsilon_{i,j}) \text{ avec } \varepsilon_{i,j} = 0 \text{ ou } 1,\ \forall i\ \varepsilon_{i,j} = 0 \text{ pour } j \text{ assez grand,}$$

$$\text{tels que } \forall i \;\; 1 \leq i \leq s \;\; n_i = \sum_{j=k+1}^{+\infty} \varepsilon_{i,j}(q^j - 1).$$

Or $n = \sum_{i=1}^{s} n_i = \sum_{i,j} \varepsilon_{i,j}(q^j - 1) = \sum_{j=k+1}^{+\infty} (\sum_{i=1}^{s} \varepsilon_{i,j})(q^j - 1).$

Il résulte du lemme 4 que : $\forall j \;\; \sum_{i=1}^{s} \varepsilon_{i,j} = \mu_j.$

Par conséquent,

$$\prod_{i=1}^{s} a_k(n_i) = \prod_{i=1}^{s} (-1)^{\sum_{j=k+1}^{+\infty} \varepsilon_{i,j}} = (-1)^{\sum_{i,j} \varepsilon_{i,j}} = (-1)^{\sum_{j=k+1}^{+\infty} \mu_j}.$$

Pour achever la preuve de la proposition 5, il suffit d'ajouter les deux remarques suivantes :

- n se décompose de manière unique sous la forme

$$n = \sum_{j=k+1}^{+\infty} \mu_j(q^j - 1) \text{ avec } \mu_j \in \{0, 1, ..., s\},\ \mu_j = 0 \text{ pour } j \text{ assez grand, ([lemme 4]).}$$

- on est de plus en caractéristique p.

On en déduit, d'une part, le développement en série formelle de $\frac{\alpha^s}{\Pi^s}$, obtenu pour $k = 0$.

On a, en effet, $\frac{\alpha^s}{\Pi^s} = \prod_{j=1}^{+\infty} (1 - (\frac{1}{x})^{q^j - 1})^s$, d'où la proposition 6 :

Proposition 6 *Soit* $(A(n))_{n\in\mathbf{N}}$ *la suite définie par*

$$\frac{\alpha^s}{\Pi^s}=\sum_{n\geq 0}A(n)x^{-n}.$$

Si n *s'écrit*

$$n=\sum_{j=1}^{+\infty}\mu_j(q^j-1) \text{ avec } \mu_j\in\ \{0,1,...,s\},\mu_j=0 \text{ pour } j \text{ assez grand,}$$

$$\text{alors } A(n)=(-1)^{\sum_{j=1}^{+\infty}\mu_j}\prod_{j=1}^{+\infty}\overline{\binom{\mu_j}{s}},$$

sinon $A(n)=0$.

On a, d'autre part, la proposition suivante :

Proposition 7 *Soit* $(B(n))_{n\in\mathbf{N}}$ *la suite définie par*

$$\frac{\alpha^s}{\Pi^s}(\zeta(s)-1)=\sum_{n\geq 0}B(n)x^{-n}$$

Si n *s'écrit*

$$n=s(q+...+q^i)+\sum_{j\geq i+1}^{+\infty}\mu_j(q^j-1) \text{ avec } i\geq 1,\ \mu_j\in\ \{0,1,...,s\},\ \mu_j=0 \text{ pour } j \text{ assez grand,}$$

alors

$$B(n)=(-1)^{si}(-1)^{\sum_{j=i+1}^{+\infty}\mu_j}\prod_{j=i+1}^{+\infty}\overline{\binom{\mu_j}{s}},$$

sinon $B(n)=0$.

En effet,

$$\frac{\zeta(s)\alpha^s}{\Pi^s}-\frac{\alpha^s}{\Pi^s}=\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{ks}(\frac{1}{x})^{s(q+...+q^k)}\sum_{n\geq 0}A_k(n)(\frac{1}{x})^n.$$

Par conséquent,

$$\frac{\alpha^s}{\Pi^s}(\zeta(s)-1)=\sum_{n\geq 0}(\frac{1}{x})^n\sum_{1\leq k \text{ tq } s(q+...+q^k)\leq n}(-1)^{ks}A_k(n-s(q+...+q^k)).$$

La proposition 7 découle alors du lemme suivant :

Lemme 5 *Il y a unicité de la décomposition sous la forme :*

$$n = s(q + ... + q^i) + \sum_{j=i+1}^{+\infty} \mu_j (q^j - 1)$$

$$\text{avec } i \geq 1, \mu_j \in \ \{0, 1, ..., s\}, \mu_j = 0 \text{ pour } j \text{ assez grand.}$$

La preuve de ce lemme se fait sur le modèle des preuves des lemmes 1 et 4.

3.2 Schéma de la preuve du théorème 3

Soit $(C(n))_{n \in \mathbf{N}}$ définie par

$$\frac{\alpha^s}{\Pi^s} \zeta(s) = \sum_{n \geq 0} C(n) x^{-n}$$

On a

$$(C(n))_{n \in \mathbf{N}} = (A(n))_{n \in \mathbf{N}} + (B(n))_{n \in \mathbf{N}}$$

On a, de même qu'à la section 2.2, les propositions et lemmes suivants :

Proposition 8 *Soit $k \geq 3$. Soit $F(k) = q^k - 1 - s(1 + q + ... + q^{k-1})$.*
Soient $u(k)$ et $v(k)$ les reste et quotient de la division euclidienne de $F(k)$ par s.
Soit $M(k) = s - 1 + s \sum_{1 \leq l \leq u(k)} q^l + v(k) q^{u(k)+1}$.
On a : $\forall\ n < M(k),\ C(q^k n + 1 + s(q + ... + q^{k-1})) = 0$.

Lemme 6 *Soit $k \geq 2$. Soit $F(k) = q^k - 1 - s(1 + q + ... + q^{k-1})$.*
Soient $u(k)$ et $v(k)$ les reste et quotient de la division euclidienne de $F(k)$ par s.
Soit $M(k) = s - 1 + s \sum_{1 \leq l \leq u(k)} q^l + v(k) q^{u(k)+1}$.
On a : $\forall\ n < M(k),\ A(q^k n + 1 + s(q + ... + q^{k-1})) = 0$.

Lemme 7 *Soit $k \geq 3$. Soit $G(k) = q^k - 1 - s - s(q^2 + ... + q^{k-1})$.*
Soient $x(k)$ et $y(k)$ les reste et quotient de la division euclidienne de $G(k)$ par s.
Soit $N(k) = s - 1 + s \sum_{1 \leq l \leq x(k)} q^l + y(k) q^{u(k)+1}$.
On a : $\forall\ n < N(k),\ B(q^k n + 1 + s(q + ... + q^{k-1})) = 0$.

Par ailleurs, $F(k) < G(k)\ \ \forall k \geq 3$. La proposition 8 résulte donc immédiatement des lemmes 6 et 7.

On sait, par la proposition 8, que chacune des sous-suites $(C(q^k n + 1 + s(q + ... + q^{k-1})))_{n \in \mathbf{N}}$ débute par au moins $M(k)$ zéros. Pour $s \leq q - 2$ et $q \neq 2$, la suite $(M(k))_{k\geq 2}$ est de plus strictement croissante. Il suffit alors que les suites $(C(q^k n + 1 + s(q + ... + q^{k-1})))_{n\in\mathbf{N}}$ soient toutes non nulles pour former un ensemble infini. Or on a la proposition suivante, que nous démontrerons au paragraphe 3.5 :

Proposition 9 *Supposons $s \not\equiv 0\ (p)$. Soit $k \geq 3$. Soit $Q(k) = -1+s \sum_{1\leq l\leq q^k-k} q^l$. On a*

$$C(q^k Q(k) + 1 + s(q + ... + q^{k-1})) \not\equiv 0.$$

Par conséquent, si $s \not\equiv 0\ (p)$, l'ensemble $\{(C(q^k n + r))_{n\in\mathbf{N}};\ k \geq 0;\ 0 \leq r \leq q^k - 1\}$ est infini. On déduit alors du théorème de Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy, les transcendances de $\frac{\alpha^s}{\Pi^s}\zeta(s)$ et de $\frac{\zeta(s)}{\Pi}$ sur $\mathbf{F}_q(x)$, pour $q \neq 2$ et $1 \leq s \leq q-2$.

Il reste alors à traiter le cas où $s \equiv 0\ (p)$.
Considérons le morphisme de Frobénius défini par $\mathcal{F} : x \longmapsto x^p$.
Soit t la plus grande puissance de p qui divise s. Il existe r entier non nul tel que $s = p^t r$. On a $r \not\equiv 0\ (p)$ et $1 \leq r \leq q-2$. On sait alors que $\zeta(r)/\Pi^r$ est transcendant sur $\mathbf{F}_q(x)$. Par conséquent, $(\zeta(r)/\Pi^r)^{p^t}$ est aussi transcendant sur $\mathbf{F}_q(x)$. Or

$$(\frac{\zeta(r)}{\Pi^r})^{p^t} = \mathcal{F}^t(\frac{\zeta(r)}{\Pi^r}) = \frac{\mathcal{F}^t(\zeta(r))}{\Pi^s}.$$

$\mathcal{F}$ étant un morphisme additif, on a

$$\mathcal{F}^t(\zeta(r)) = \mathcal{F}^t(\sum_{G\in\mathbf{F}_q[x] \text{ et } G \text{ unitaire}} 1/G^r) = \sum_{G\in\mathbf{F}_q[x] \text{ et } G \text{ unitaire}} 1/G^{rp^t} = \zeta(s).$$

On a donc montré le théorème 3, à savoir : $\zeta(s)/\Pi^s$ est transcendant sur $\mathbf{F}_q(x)$ pour tout s tel que $1 \leq s \leq q-2$ et pour $q \neq 2$.

Notons qu'en appliquant le morphisme de Frobénius à $\zeta(1)/\Pi$, on obtient que $\zeta(p^t)/\Pi^{p^t}$ est transcendant sur $\mathbf{F}_q(x)$ pour $q \neq 2$ et pour tout $t \geq 0$. On a, en particulier, que $\zeta(q^t)/\Pi^{q^t}$ est transcendant pour tout $t \geq 0$.

3.3 Preuve du lemme 6

On pose $(\mathcal{A}_k(n))_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par :

$$\mathcal{A}_k(n) = A(q^k n + 1 + s(q + ... + q^{k-1})) \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Soit $k \geq 2$. Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $\mathcal{A}_k(n) \neq 0$. Selon la proposition 6,

$\exists\ (\mu_j)_{j\in\mathbf{N}}$ avec $\mu_j \in\ \{0, 1, ..., s\}$ et $\mu_j = 0$ pour j assez grand, tels que

$$q^k n + 1 + s(q + ... + q^{k-1}) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mu_j (q^j - 1),$$

c'est-à-dire,

$$q^k n + 1 + s(q + ... + q^{k-1}) = \sum_{1 \leq j < k} \mu_j (q^j - 1) + \sum_{l \geq k} \mu_l (q^l - 1).$$

On pose $\sigma = \sum_{j=1}^{+\infty} \mu_j$. On a

$$q^k n + 1 + s(q + ... + q^{k-1}) = \sum_{1 \leq j < k} \mu_j q^j + \sum_{l \geq k} \mu_l q^l - \sigma.$$

Par conséquent,

$$\exists \lambda \geq 1 \text{ tel que } \sigma = \lambda q^k + \sum_{1 \leq j \leq k-1} (\mu_j - s) q^j - 1.$$

On en déduit que

$$n = (-\lambda + \mu_k) + \sum_{l > k \text{ et } \sum_{l>k} \mu_l = \sigma - \sum_{j \leq k} \mu_j} \mu_l q^{l-k}.$$

Autrement dit,

$$n = (-\lambda + \mu_k) + \sum_{l > k \text{ et } \sum_{l>k} \mu_l = \mathcal{S}} \mu_l q^{l-k}, \tag{4}$$

avec

$$\mathcal{S} = \lambda q^k + \sum_{j=1}^{k-1} (\mu_j - s) q^j - \sum_{j \leq k} \mu_j - 1.$$

Réciproquement, soit n pouvant s'écrire sous cette forme.
On vérifie alors que $q^k n + 1 + s(q + ... + q^{k-1})$ peut se décomposer comme

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \mu_j (q^j - 1), \text{ avec } \mu_j \in \{0, 1, ..., s\} \text{ et } \mu_j = 0 \text{ pour } j \text{ assez grand.}$$

Néanmoins, on ne connaît pas la valeur modulo p de $\prod_{j=1}^{+\infty} \binom{s}{\mu_j}$, valeur qui peut être éventuellement nulle.
Plus exactement, on a montré que si n n'est pas de la forme (6), alors $\mathcal{A}_k(n) = 0$.

Soit $M(k)$ le plus petit entier pouvant s'écrire sous la forme (6). On a : $\forall n < M(k)\ \mathcal{A}_k(n) = 0$.
On vérifie que $M(k)$ est obtenu pour

$$\lambda = 1$$

$$\mu_j = 0 \text{ pour } 1 \leq j < k$$

$$\mu_k = s$$

$$\sum_{l>k} \mu_l = q^k - 1 - s(1 + q + ... + q^{k-1}).$$

Soient $u(k)$ et $v(k)$ les reste et quotient de la division euclidienne de $q^k - 1 - s(1 + q + ... + q^{k-1})$ par s. On a

$$q^k - 1 - s(1 + q + ... + q^{k-1}) = u(k)s + v(k).$$

Or $s \leq q - 2$. D'où

$$q^k - 1 - s(1 + q + ... + q^{k-1}) \geq 1 + ... + q^{k-1} \geq s.$$

Par conséquent $u(k) \geq 1$ et $M(k) = s - 1 + s \displaystyle\sum_{1 \leq l \leq u(k)} q^l + v(k) q^{u(k)+1}$, ce qui achève la preuve du lemme 6.

3.4 Preuve du lemme 7

On pose $(\mathcal{B}_k(n))_{n \in \mathbf{N}}$ la suite définie par :

$$\mathcal{B}_k(n) = B(q^k n + 1 + s(q + ... + q^{k-1})) \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Soit $k \geq 3$. Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $\mathcal{B}_k(n) \neq 0$. Selon la proposition 7,

$\exists\ i \geq 1, \exists (\mu_j)_{j \in \mathbf{N}}$ avec $\mu_j \in\ \{0, 1, ..., s\}$ et $\mu_j = 0$ pour j assez grand, tels que

$$q^k n + 1 + s(q + ... + q^{k-1}) = s(q + ... + q^i) + \sum_{j \geq i+1}^{+\infty} \mu_j (q^j - 1).$$

On pose $\sigma = \displaystyle\sum_{j \geq i+1}^{+\infty} \mu_j$.

Nous allons distinguer trois cas suivant la position de i par rapport à k :

Cas 1 : Si $i \geq k$, on a

$$q^k n + 1 = s(q^k + ... + q^i) + \sum_{j \geq i+1}^{+\infty} \mu_j q^j - \sigma.$$

Par conséquent,

$$\exists \lambda \geq 1 \text{ tel que } \sigma = -1 + \lambda q^k.$$

On en déduit que

$$n = -\lambda + s \sum_{0 \leq l \leq i-k} q^l + \sum_{j>i \text{ et } \sum_{j>i} \mu_j = \sigma} \mu_j q^{j-k}.$$

Autrement dit,

$$n = -\lambda + s \sum_{0 \leq l \leq i-k} q^l + \sum_{j>i \text{ et } \sum_{j>i} \mu_j = \lambda q^k - 1} \mu_j q^{j-k}.$$

On vérifie réciproquement qu'un tel n convient.

Le plus petit entier $N_1(k)$ de cette forme est obtenu pour

$$\lambda = 1$$

$$i = k$$

$$\sum_{j>k} \mu_j = q^k - 1.$$

Soient $x_1(k)$ et $y_1(k)$ les reste et quotient de la division euclidienne de $q^k - 1$ par s. On a

$$q^k - 1 = s x_1(k) + y_1(k).$$

Or $s \leq q - 2$. D'où $x_1(k) \geq 1$.
$N_1(k)$ s'écrit alors $N_1(k) = s - 1 + s \sum_{1 \leq l \leq x_1(k)} q^l + y_1(k) q^{x_1(k)+1}$.

Cas 2 : Si $i = k - 1$, on a

$$q^k n + 1 = \sum_{j \geq k}^{+\infty} \mu_j q^j - \sigma.$$

Par conséquent,

$$\exists \lambda \geq 1 \text{ tel que } \sigma = -1 + \lambda q^k.$$

On en déduit que

$$n = \mu_k - \lambda + \sum_{j>k \text{ et } \sum_{j>k} \mu_j = -1 + \lambda q^k - \mu_k} \mu_j q^{j-k}.$$

On vérifie réciproquement qu'un tel n convient.

Le plus petit entier $N_2(k)$ de cette forme est obtenu pour

$$\lambda = 1$$

$$\mu_k = s$$
$$\sum_{l>k} \mu_l = q^k - 1 - s.$$

Soient $x_2(k)$ et $y_2(k)$ les reste et quotient de la division euclidienne de $q^k - 1 - s$ par s. On a
$$q^k - 1 - s = sx_2(k) + y_2(k).$$

Or $k \geq 3$ et $s \leq q-2$. Par conséquent $x_2(k) \geq 1$.
On a de plus : $x_2(k) = x_1(k) - 1$ et $y_2(k) = y_1(k)$. $N_2(k)$ s'écrit alors

$$N_2(k) = s - 1 + s \sum_{1 \leq l \leq x_2(k)} q^l + y_2(k) q^{x_2(k)+1}.$$

Cas 3 : Si $1 \leq i \leq k-2$, on a

$$q^k n + 1 + s(q^{i+1} + ... + q^{k-1}) = \sum_{i+1 \leq j \leq k-1} \mu_j q^j + \sum_{k \leq l}^{+\infty} \mu_l q^l - \sigma.$$

Par conséquent,

$$\exists \lambda \geq 1 \text{ tel que } \sigma = -1 + \lambda q^k + \sum_{i+1 \leq j \leq k-1} (\mu_j - s) q^j.$$

On en déduit que

$$n = \mu_k - \lambda + \sum_{l>k \text{ et } \sum_{l>k} \mu_l = \mathcal{S}} \mu_l q^{l-k},$$

$$\begin{aligned} \text{avec } \mathcal{S} &= \sigma - \sum_{j \leq k} \mu_j \\ &= -1 + \lambda q^k + \sum_{j=i+1}^{k-1} (\mu_j - s) q^j - \sum_{j=i+1}^{k} \mu_j. \end{aligned}$$

On vérifie réciproquement qu'un tel n convient.

Le plus petit entier $N_3(k)$ de cette forme est obtenu pour

$$\lambda = 1, i = 1, \mu_k = s, \mu_j = 0 \text{ pour } 2 \leq j \leq k-1,$$

$$\sum_{l>k}\mu_l = q^k - 1 - s - s(q^2 + ... + q^{k-1}).$$

Soient $x_3(k)$ et $y_3(k)$ les reste et quotient de la division euclidienne de $q^k - 1 - s - s(q^2 + ... + q^{k-1})$ par s. On a

$$q^k - 1 - s - s(q^2 + ... + q^{k-1}) = sx_3(k) + y_3(k).$$

Or $q^k - 1 - s - s(q^2 + ... + q^{k-1}) \geq sq$ pour $s \leq q - 2$, d'où $x_3(k) \geq 1$.
De plus $x_3(k) = x_2(k) - (q^2 + ... + q^{k-1})$ et $y_3(k) = y_2(k)$. $N_3(k)$ s'écrit alors

$$N_3(k) = s - 1 + s \sum_{1\leq l\leq x_3(k)} q^l + y_3(k)q^{x_3(k)+1}.$$

On a $x_1(k) > x_2(k) > x_3(k)$ et $y_1(k) = y_2(k) = y_3(k)$.
Par conséquent, $N_1(k) > N_2(k) > N_3(k)$.
$N_3(k)$ est donc le premier entier n tel que $q^k n + 1 + s(q + ... + q^{k-1})$ puisse s'écrire sous la forme

$$s(q + ... + q^i) + \sum_{j\geq i+1} \mu_j(q^j - 1)$$

$$\text{avec } i \geq 1, \mu_j \in \{0, 1, ..., s\}, \mu_j = 0 \text{ pour } j \text{ assez grand.}$$

On en déduit, selon la proposition 7, que : $\forall n < N_3(k)\ \ \mathcal{B}_k(n) = 0$.

3.5 Preuve de la proposition 9

Montrons le lemme préliminaire :

Lemme 8 *Soit n tel que $A(n) \neq 0$ alors $B(n) = 0$.*

Soit n tel que $A(n) \neq 0$. Selon la proposition 6,

$\exists\, (\mu_j)_{j\in\mathbf{N}}$ avec $\mu_j \in \{0, 1, ..., s\}$ et $\mu_j = 0$ pour j assez grand, tels que $n = \displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \mu_j(q^j - 1)$.

Supposons $B(n) \neq 0$. Selon la proposition 7,

$\exists\, i \geq 1, \exists\, (\delta_j)_{j\in\mathbf{N}}$ avec $\delta_j \in \{0, 1, ..., s\}$ et $\delta_j = 0$ pour j assez grand, tels que

$$n = s(q + ... + q^i) + \sum_{j\geq k+1}^{+\infty} \delta_j(q^j - 1).$$

Nécessairement $n \neq 0$. Soient $L = sup\ \{l, \mu_l \neq 0\}$ et $J = sup\ \{j, \delta_j \neq 0\}$.

On a vu que : $\forall r \in \mathbf{N}\ \ s\displaystyle\sum_{i=1}^{r} q^i < q^{r+1} - 1$. Par conséquent, $L = J$ et $\mu_L = \delta_J$.

On obtient ainsi, par récurrence, que $s(q + ... + q^i) = \sum_{l=1}^{i} \mu_l(q^l - 1)$, ce qui est impossible.
On a donc $B(n) = 0$.

Revenons à la preuve de la proposition 9.
Supposons $s \not\equiv 0\ (p)$.
Soit $Q(k) = -1 + s \sum_{1 \leq l \leq (q^k - k)} q^l$.
$Q(k)$ s'écrit sous forme (6), définie au paragraphe 3.3, avec

$$\lambda = s,\ \mu_j = s \text{ pour } 1 \leq j \leq k-1,\ \mu_k = s-1,$$

$$\mu_l = s \text{ pour } 1 + k \leq l \leq q^k,\ \mu_l = 0 \text{ pour } l \geq q^k + 1.$$

On a

$$q^k Q(k) + 1 + s(q + ... + q^{k-1}) = s(\sum_{1 \leq j \leq k-1} (q^j - 1)) + (s-1)(q^k - 1) + s(\sum_{k < l \leq q^k} (q^l - 1)).$$

D'où, selon la proposition 5,

$$\mathcal{A}_k(Q_k) = \overline{\binom{s}{s-1}}(-1)^{sq^k - 1} = \overline{s}(-1)^{sq^k - 1}.$$

On a donc montré que, pour $s \not\equiv 0\ (p)$, $\mathcal{A}_k(Q_k) \neq 0$. Il résulte alors du lemme 8 que $\mathcal{B}_k(Q_k) = 0$. Par conséquent, $C(q^k Q_k + 1 + s(q + ... + q^{k-1})) \neq 0$.

Il reste à étendre la preuve exposée ici au cas plus général où $s \not\equiv 0\ (q-1)$, c'est-à-dire montrer que $\zeta(s)/\Pi^s$ est transcendant sur $\mathbf{F}_q(x)$ pour tout s non divisible par $q - 1$. La plus grande complexité de l'expression de $\zeta(s)/\Pi^s$ pour $s > q$ pose alors des problèmes combinatoires. Il semble néanmoins raisonnable d'espérer que la méthode exposée dans cet article puisse permettre de traiter le cas général.

References

[1] J.-P. ALLOUCHE *Sur la transcendance de la série formelle* Π, Sém. de Théorie des Nombres de Bordeaux **2** (1990), 103-117.

[2] L. CARLITZ *On certain functions connected with polynomials in a Galois field*, Duke Math. J., 1 (1935), 137-168.

[3] G. CHRISTOL, T. KAMAE, M. MENDÈS FRANCE et G. RAUZY *Suites algébriques, automates et substitutions,* Bull. Soc. Math. France **108** (1980), 401-419.

[4] G. DAMAMME *Irrationalité de $\zeta(s)$ dans le corps des séries formelles* $\mathbf{F}_q((\frac{1}{t}))$, C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada **9, 5** (1987), 207-212.

[5] G. DAMAMME *Transcendance de la fonction zéta de Carlitz par la méthode de Wade,* Thèse, Caen, 1990.

[6] G. DAMAMME et Y. HELLEGOUARCH *Transcendance of the values of the Carlitz zeta function by Wade's method,* J. Number Theory, 39, 3 (1991), 257-278.

[7] G. DAMAMME et Y. HELLEGOUARCH *Propriétés de transcendance des valeurs de la fonction zéta de Carlitz,* C.R. Acad. Sci. Paris **307, Série I** (1988), 635-637.

[8] D.S. THAKUR *Gauss functions and Gauss sums for function fields and periods of Drinfeld modules,* Ph. D. thesis, Harvard (Avril 1987).

[9] L.J. WADE *Certain quantities transcendental over $GF(p^n, x)$,* Duke Math. J., 8 (1941), 701-720.

[10] J. YU *Transcendence and Special Zeta Values in Characteristic p,* Annals of Mathematics, **134** (1991), 1-23.