# Partiel de Mathématiques Discrètes

Mardi 18 octobre 2011

Durée : 1 heure

**Les documents et téléphones portables ne sont pas autorisés.**
Le barème est donné à titre indicatif.

## Exercice 1 : Questions de cours (4 points)

1. Les ensembles suivants forment-ils des classes combinatoires et pourquoi ?
   (a) Ensemble des colliers de perles avec $k$, $k > 0$, couleurs de perle, comptés suivant le nombre de perles.
   (b) Ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$ comptés suivant leur longueur.
2. Les séries formelles suivantes sont-elles inversibles et pourquoi ?
   (a) $\sum_{n \geqslant 0} nz^n$.
   (b) $\sum_{n \geqslant 0} (n+1)z^n$.

## Exercice 2 : Complexité (12 points)

1. Montrer la formule suivante : $\sum_{i=0}^{n-1} (2i+1) = n^2$.
2. Calculer en fonction de $n$, $n \geqslant 0$, la complexité $c_n$ en nombre d'opérations du bout de code suivant :

```
for(i=1;i<=n;i++){
  for(j=1;j<=i;j++)
    a = operation(a,operation(i,j));
  b = operation(a,a);
}
```

   On ne comptera pas l'affectation (=) comme une opération.
3. Montrer que la suite $(c_n)_{n \geqslant 0}$ vérifie une récurrence linéaire non-homogène à coefficients constants.
4. Déduire de la question précédente une expression en fonction de $z$ pour la série génératrice de la suite $(c_n)_{n \geqslant 0}$ : $C(z) = \sum_{n \geqslant 0} c_n z^n$.

## Exercice 3 : Séries génératrices (4 points)

Soit $(a_n)_{n \geqslant 0}$ une suite vérifiant une récurrence linéaire à coefficients constants et soit $A(z)$ sa série génératrice : $A(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$. Exprimer en fonction de $z$, de $A$ et de certains de ses coefficients, la série génératrice de la suite $(p_n)_{n \geqslant 0}$ : $p_n = 2^n a_{n+1}$.