Examen de Mathématiques Discrètes

Mercredi 16 janvier 2013

Durée : 3 heure

Les téléphones portables ne sont pas autorisés.
Seuls les documents de cours sont autorisés.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 : (1,5 points)

Montrez que le langage $L = \{a^m b^n \ / \ m, n \geqslant 0 \text{ et } m \neq n\}$ est algébrique.

Exercice 2 : (3 points)

Soit la grammaire $G = (A, V, P)$ suivante : $A = \{a, b\}$, $V = \{T, X, Y\}$, d'axiome T et avec

$$P = \begin{cases} T & \to & aTa \mid X \mid Y \\ X & \to & bX \mid \epsilon \\ Y & \to & YY \mid Xc \mid c \end{cases}$$

1. Rendez propre la grammaire G. On note G' cette grammaire.
2. Mettez la grammaire G' en forme normale de Greibach. On note G'' cette grammaire.
3. A-t-on $L(G) = L(G'')$? Justifiez.

Exercice 3 : (2 points)

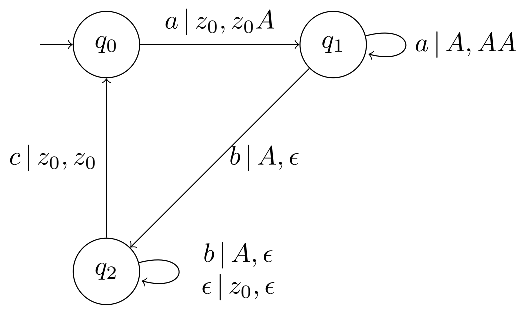
Soit la grammaire $G = (A, V, P)$ suivante : $A = \{a, b, +, \times\}$, $V = \{S\}$,

$$P = \{S \to S + S \mid S \times S \mid a \mid b\}$$

1. Montrez que G est ambiguë.
2. Donnez (sans preuve) une grammaire non ambiguë équivalente à G.

Exercice 4 : (2,5 points)

Dans cet exercice, vous n'avez pas besoin de prouver vos résultats, juste de les justifier de façon informelle.
Soit l'automate $\mathcal{A} = (Q, A, Z, E, q_0, z_0)$ suivant :



Quel est le langage reconnu par cet automate si

1. $\mathcal{A}$ accepte par pile vide ?
2. $\mathcal{A}$ accepte par état final q_2 ?

Exercice 5 : (4 points)

Soit la grammaire $G = (A, V, P)$ suivante : $A = \{a, b\}$, $V = \{W, X, Y, Z\}$,

$$P = \left\{ \begin{array}{lll} W & \rightarrow & aWbb \mid bZaa \mid bZYb \mid \epsilon \\ X & \rightarrow & bX \mid Z \\ Y & \rightarrow & aY \mid \epsilon \\ Z & \rightarrow & aZb \mid X \end{array} \right.$$

1. Réduisez G vis à vis de W. Soit G' la grammaire obtenue.
2. Déterminez le langage L_1 des mots engendrés par G à partir de W et prouvez-le (montrez que $L_1 \subset L_W(G)$, puis que $L_W(G) \subset L_1$).
3. Montrez que la grammaire G' n'est pas ambiguë.

Exercice 6 : (3 points)

Le but de cet exercice est de résoudre la récurrence vérifiée par la suite $(g_n)_{n \geqslant 0}$ suivante :

$$\left\{ \begin{array}{lll} g_n & = & 2g_{n-1} + n - 1 \text{ si } n \geqslant 1, \\ g_0 & = & 0. \end{array} \right.$$

On note $G(z)$ la série génératrice de la suite $(g_n)_{n \geqslant 0}$.

1. Calculez l'équation fonctionnelle vérifiée par G et déduisez-en une fraction rationnelle dépendant de z pour G.
2. Calculez alors l'expression de g_n en fonction de n. Vérifiez votre résultat pour $n = 0, 1$ et 2. Rappel : la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{(1-\alpha z)^2(1-\beta z)}$ est $\frac{a}{1-\alpha z} + \frac{b}{(1-\alpha z)^2} + \frac{c}{1-\beta z}$, où a, b et c sont à définir.

Exercice 7 : (4 points)

Le but de cet exercice est de résoudre la récurrence vérifiée par la suite $(j_n)_{n \geqslant 0}$ suivante :

$$\left\{ \begin{array}{lll} j_{2n} & = & 2j_n - 1 \\ j_{2n+1} & = & 2j_n + 2 \\ j_0 & = & 1. \end{array} \right.$$

On note $J(z)$ la série génératrice de la suite $(j_n)_{n \geqslant 0}$.

1. Calculez l'équation fonctionnelle vérifiée par J.
2. Déterminez les nombres a, b, c tels que $\frac{a+z}{a+bz+cz^2}$ soit solution de l'équation fonctionnelle trouvée en 1.
3. Exprimez alors j_n en fonction de n.